数理解析研究所講究録
605巻 1987年 73-91

MU-lambda algebra

京大数理研　島田信夫 (Nobuo Shimada)

いわゆる lambda algebra Λ は $\mathbb{Z}/p$ (p: 素数) 上の、次数つき添加代数で微分作用素は derivation として働くもの (DGA-algebra) であり、Bousfield, Curtis, Kan その他 [4] により導入された。これは Kan 流の方法で、(単体的)球面スペクトラムの Kan ループ群の降中心列によるフィルター づけから得られた Adams 型スペクトル系列の E_1-項として、もともと定義されたものであるが、その後 Steenrod 代数 $\mathcal{S}$ の双対 Hopf 代数 $\mathcal{S}_*$ から比較的簡単に構成され得ることがわかった。

Λ を特徴づける事として、twisted なテンソル積[6] $\mathcal{S}_*\otimes\Lambda$ が、いわゆる (normalized) cobar 構成 $\mathcal{S}_*\otimes T(\mathcal{S}_*)$ の商であり、それ自身、$\mathcal{S}_*$-comodule による $\mathbb{Z}/p$ の非輪状入射的分解としては、恐らく極小のものであろうと考えられる。

爾来、Λ のホモトピー論への多くの興味ある応用が知られている。[5], [7], [10] 等。

ここでは，MU-(コ)ホモロジー論（複素コボルディズム論）におけるラムダ代数の類似である Λ^{MU} を導入しよう[18].

§1. Hopf algebroid associated to the MU-homology theory

定義1.1. 可換環R上の Hopf algebroid とは，次数つき可換な R-代数 A，Γ の組 (A, Γ) から成り，次の様な R-代数準同型写像：

$\eta_L : A \to \Gamma$ (left unit)

$\eta_R : A \to \Gamma$ (right unit)

$\varepsilon : \Gamma \to A$ (augmentation or counit)

$\Delta : \Gamma \to \Gamma \otimes_A \Gamma$ (diagonal or comultiplication)

$\mu : \Gamma \otimes_A \Gamma \to \Gamma$ （Γ 自身の可換な積とは別物）

$c : \Gamma \to \Gamma$ (conjugation)

が与えられている。Γ は η_L によって左 A-加群，η_R によって右 A-加群と見做され，$\Gamma \otimes_A \Gamma$ は両側加群のテンソル積を表わす。Δ と ε は両側 A-加群の射であり，$\varepsilon\eta_L = \varepsilon\eta_R = 1$，$\varepsilon c = \varepsilon$，$c^2 = 1$，$c\eta_L = \eta_R$，$c\eta_R = \eta_L$，また Δ, μ は結合的であり，次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} A \otimes_A \Gamma & \Gamma \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\Delta"] & \Gamma \otimes_A A \\ & \Gamma \otimes_A \Gamma \arrow[ul, "\varepsilon \otimes 1"] \arrow[ur, "1 \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "\eta_R"'] & \Gamma \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & A \arrow[d, "\eta_L"] \\ \Gamma & \Gamma \otimes_A \Gamma \arrow[l, "\mu(c \otimes 1)"] \arrow[r, "\mu(1 \otimes c)"'] & \Gamma \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "c"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \arrow[d, "C"] \\ \Gamma \arrow[r, "\Delta"] & \Gamma \otimes_A \Gamma \end{tikzcd}, \qquad \left(C(\gamma \otimes \delta) = (-1)^{\deg\gamma \cdot \deg\delta} c(\delta) \otimes c(\gamma) \right)」$$

Aは係数環，Γはcooperation algebraとよばれる．$\eta_L=\eta_R$の場合は普通のHopf代数である．Hopf algebroidの例は，ring-spectrum Eに対して$A=\pi_*(E)$，$\Gamma=E_*E=\pi_*(E\wedge E)$によって与えられる(Adams [2])，ただし$\Gamma$は左$A$-flat(従って，また右$A$-flat)と仮定する．この条件は多くの重要な場合$E=KO$，K，MO，MU，MSp，S，$H\mathbb{Z}/p$，BP等において満されている[2]，[3]．

以下，特に$E=MU$の場合を考えよう[3]．

良く知られた様に，Hopf algebroid $(A,\Gamma)=(MU_*,MU_*MU)$において，$A=MU_*$は多項式環$\mathbb{Z}[x_1,x_2,\cdots]$，$\deg x_i=2i$，に同型であり，$\Gamma=MU_*MU$は$A\otimes S$と同型である．ここで$S=\mathbb{Z}[b_1,b_2,\cdots]$，$\deg b_i=2i$，はLandweber-Novikov作用素代数のdual Hopf algebraで，多項式環であり，そのdiagonalは

$$(1.2)\qquad \psi(b)=\sum_{i\geq 0} b^{i+1}\otimes b_i$$

で与えられる．ここで$b=1+b_1+b_2+\cdots$，$b_0=1$．

$\eta_L: A\longrightarrow \Gamma=A\otimes S$，$\eta_L(a)=a\otimes 1$，

$\varepsilon:\Gamma=A\otimes S\longrightarrow A$，$\varepsilon(1\otimes s)=0$ for $\deg s>0$，

$\Delta=1\otimes\psi:\Gamma=A\otimes S\longrightarrow \Gamma\otimes_A\Gamma=A\otimes S\otimes S$，

$\mu=1\otimes m:\Gamma\otimes_A\Gamma=A\otimes S\otimes S\longrightarrow \Gamma=A\otimes S$ (mはSの積)，

等が成り立つ。

diagonal (1.2) は具体的には，

$$\psi(b_1) = b_1 \otimes 1 + 1 \otimes b_1 \ , \ \psi(b_2) = b_2 \otimes 1 + 2b_1 \otimes b_1 + 1 \otimes b_2 \ ,$$

$$\psi(b_3) = b_3 \otimes 1 + (2b_2 + b_1^2) \otimes b_1 + 3b_1 \otimes b_2 + 1 \otimes b_3 \ , \quad \text{etc.}$$

を表わす。

S における primitive な元として b_1，$b_2 - b_1^2$ が見つかるが，それらを S の生成元として組み入れる様な変数変換を施すのが以下の目的に対して便利である。

そこで

$$(1.3) \qquad s = 2 - b^{-1} ,$$

$$s = 1 + s_1 + s_2 + \cdots \ , \ s_0 = 1 \ .$$

とおく。 このとき

$$(1.4) \qquad 2b = 1 + bs \ ,$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{k-1} b_i s_{k-i} \qquad (k \geq 1)$$

であり，帰納的に b_k は s_i の多項式として表わされ，逆も成立する，例えば：

$$b = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{1-(s-1)} = \sum_{n\geq 0} \bar{s}^n \ , \quad \bar{s} = s - 1 \ ,$$

$$(1.5) \qquad b_1 = s_1 \ , \ b_2 = s_2 + s_1^2 \ , \ b_3 = s_3 + 2s_1s_2 + s_1^3 ,$$

$$b_4 = s_4 + 2s_1s_3 + 3s_1^2s_2 + s_2^2 + s_1^4 , \quad \text{etc.}$$

<u>補題 1.6.</u> $S = \mathbb{Z}[s_1, s_2, \cdots]$ ，$\deg s_i = 2i$ ，

$$\psi(s) = s \otimes 1 + \sum_{i \geq 1} b^{i-1} \otimes s_i \ .$$

より具体的には，

(1.7)
$$\psi(s_1) = s_1\otimes 1 + 1\otimes s_1,$$
$$\psi(s_2) = s_2\otimes 1 + 1\otimes s_2$$
$$\psi(s_3) = s_3\otimes 1 + 1\otimes s_3 + s_1\otimes s_2$$
$$\psi(s_4) = s_4\otimes 1 + 1\otimes s_4 + (s_2+s_1^2)\otimes s_2 + 2s_1\otimes s_3, \text{ etc.}$$

<u>証明</u>. $\psi(b^{-1}) = \psi(b)^{-1} = b^{-1}\otimes 1 - \sum_{j\geq 1} b^{j-1}\otimes s_j$

と (1.3), (1.4) から

$$\psi(s) = 2(1\otimes 1) - \psi(b^{-1}) = s\otimes 1 + \sum b^{j-1}\otimes s_j$$ ⌟

§2. DGA-algebra Λ^S.

整数環$\mathbb{Z}$上の Hopf 代数 $S = \mathbb{Z}[s_1, s_2, \cdots]$ における生成元 s_i $(i\geq 1)$ のうち primitive なものは s_1 と s_2 のみである。s_1 と s_2 とで生成された S の部分 Hopf 代数を $S_2 = \mathbb{Z}[s_1, s_2]$ とする．$\rho: S \longrightarrow S_2$ を標準的射影，また $\varepsilon: S$ (または S_2) $\to \mathbb{Z}$ を添加写像とし，その核 $\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ を，それぞれ，$\overline{S}$, $\overline{S_2}$ で表わす．簡単のため次の記号を用いる：

(2.1)
$$L = S_2, \quad \overline{L} = \overline{S_2}, \quad \overline{S} = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$$
$$\theta: S \xrightarrow{\rho} S_2 \xrightarrow{1-\varepsilon} \overline{L}, \quad \theta = (1-\varepsilon)\circ\rho \text{ 線形写像},$$
$$\theta\,(s_k\ (k\geq 3)\text{を含む monomial}) = 0$$
$$\theta\,(s_1^i s_2^j) = \lambda_{ij} = [s_1^i s_2^j] \text{ in } \overline{L} = \overline{S_2}\ (i,j\geq 0,\ i+j>0)$$
$$\theta\,(1) = 0.$$

従って Γ は $\{\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{01}, \lambda_{11}, \cdots, \lambda_{ij}, \cdots\}$ を生成系とする自由アーベル群（free $\mathbb{Z}$-module）と考える。Γ は

(2.2) $$\operatorname{bideg} \lambda_{ij} = (1, 2i+4j)$$

によって bigraded となる。$T(\Gamma)$ を Γ で生成されたテンソル代数，つまり，

$$T(\Gamma) = \mathbb{Z} + \Gamma + \Gamma\otimes\Gamma + \Gamma\otimes\Gamma\otimes\Gamma + \cdots$$

とする。また線形写像 $\theta\vee\theta : S \to \Gamma\otimes\Gamma \subset T(\Gamma)$ を

(2.3) $$\theta\vee\theta = (\theta\otimes\theta)\circ\psi$$

によって定義する。

<u>定義−命題 2.4.</u> テンソル代数 $T(\Gamma)$ の商環

$$\Lambda^S = T(\Gamma)/I$$

を定義しよう，ここで I は，$\operatorname{Ker}\theta$ の $\theta\vee\theta$-像 $\theta\vee\theta(\operatorname{Ker}\theta)$ によって生成された両側イデアルを表わす。これは $\mathbb{Z}$ 上の DGA-algebra（differential, (bi)graded, augumented）であって，その微分作用素 d は Λ^S の derivation であって，$d\theta = -\theta\vee\theta$ の関係を満足する。

この定義が well-defined であることを示すため，先づ，線形写像

(2.5) $$\iota : \Gamma \to S, \quad \iota(\lambda_{ij}) = a_1^i a_2^j, \text{ および}$$
$$d = -(\theta\vee\theta)\circ\iota : \Gamma \longrightarrow \Gamma\otimes\Gamma \subset T(\Gamma)$$

を定義する。d を $T(\Gamma)$ 上に derivation として拡張すれば，

$d(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ および $d\cdot d \equiv 0 \pmod{\mathrm{I}}$ が成り立つ。実際，

$$d(\theta \cup \theta) = d\theta \cup \theta - \theta \cup d\theta = -\{(\theta \cup \theta)\circ 2\theta\} \cup \theta + \theta \cup \{(\theta\cup\theta)\circ 2\theta\}$$
$$= \{(\theta\cup\theta)(1-2\theta)\} \cup \theta - (\theta\cup\theta)\cup\theta - \theta\cup\{(\theta\cup\theta)\circ(1-2\theta)\} + \theta\cup(\theta\cup\theta)$$
$$\equiv 0 \pmod{\mathrm{I}}.$$

従って，Λ^s は，単位元 1 をもち，$\{\lambda_{ij}\,;\, i,j \geq 0,\ i+j > 0\}$ によって生成された $\mathbb{Z}$ 上の DGA-algebra である。生成元 λ_{ij} の間の関係式は次の様にして得られる：先づ基本関係

$$(2.6)\quad R_k = \theta\cup\theta(\Delta_k) = \sum_{i+2j=k-2} \binom{i+j}{i} \lambda_{ij}\cdot\lambda_{01} = 0$$

（$i,j \geq 0$，$k \geq 3$，$\cdot$ はテンソル積から導びかれた Λ^s における積を表わす。$\binom{i+j}{i}$ は二項係数）

があり，より一般に

$$(2.7)\quad D_1^i D_2^j (R_{k_1} * \cdots * R_{k_\ell}) = \theta\cup\theta(\Delta_1^i \Delta_2^j \Delta_{k_1} \cdots \Delta_{k_\ell}) = 0$$
$$(i,j \geq 0,\ 3 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_\ell),$$

がある，これらからすべての関係式が生成される（つまり，両側イデアル I の生成系として $\{D_1^i D_2^j (R_{k_1} * \cdots * R_{k_\ell})\}$ がとれる）。ここで (2.7) における記号を説明しよう。$D_1 : T(\bar{L}) \to T(\bar{L})$ および $D_2 : T(\bar{L}) \to T(\bar{L})$ は共に derivation として

$$(2.8)\quad D_1(\lambda_{ij}) = \lambda_{i+1,j}\ ,\quad D_2(\lambda_{ij}) = \lambda_{i,j+1}$$

によって定義され，$D_1(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$，$D_2(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ の性質をもつものである。また $* : (\bar{L}\otimes\bar{L})\otimes(\bar{L}\otimes\bar{L}) \longrightarrow \bar{L}\otimes\bar{L}$ は，

$$(2.9)\qquad (\lambda_{i_1 j_1}\cdot\lambda_{k_1 l_1}) * (\lambda_{i_2 j_2}\cdot\lambda_{k_2 l_2}) = \lambda_{i_1+i_2,\, j_1+j_2}\cdot\lambda_{k_1+k_2,\, l_1+l_2}$$

を線形写像として拡張したもので，$\Gamma\otimes\Gamma$ における可換な積を与え，$I_{(2)} * I_{(2)} \subset I_{(2)}$ が成り立つ ($I_{(2)} = \theta^{\vee}\theta(\mathrm{Ker}\,\theta) = I \cap (\Gamma\otimes\Gamma)$)。

ここで，関係式の具体例を挙げておこう：簡単のため，$(ijkl) = \lambda_{ij}\cdot\lambda_{kl}$ の記号を用いる．

$$(2.10)\qquad \left[\;\begin{aligned}
&R_3 = (1001),\quad R_4 = (2001) + \underline{(0101)},\\
&\qquad\qquad D_1 R_3 = (2001) + (1011).\\[1ex]
&R_5 = (3001) + 2\underline{(1101)}\\
&D_1 R_4 = (3001) + (2011) + \underline{(1101)} + \underline{(0111)}\\
&D_1^2 R_3 = (3001) + 2(2011) + (1021)\\
&D_2 R_3 = \underline{(1101)} + (1002)\\[1ex]
&R_6 = (4001) + 3\underline{(2101)} + \underline{(0201)}\\
&D_1 R_5 = (4001) + (3011) + 2\underline{(2101)} + 2\underline{(1111)}\\
&D_2 R_4 = \underline{(2101)} + (2002) + \underline{(0201)} + (0102)\\
&R_3 * R_3 = (2002)\\
&D_1 D_2 R_3 = \underline{(2101)} + \underline{(1111)} + (2002) + (1012)\\
&D_1^3 R_3 = (4001) + 3(3011) + 3(2021) + (1031)\\
&D_1^2 R_4 = (4001) + 2(3011) + (2021) + \underline{(2101)} + 2\underline{(1111)} + \underline{(0121)}\\[1ex]
&R_7 = (5001) + 4\underline{(3101)} + 3\underline{(1201)}\\
&R_3 * R_4 = (3002) + (1102)\\
&\quad\vdots\\
&\text{etc.}\qquad\qquad (\text{下線の意味は後出})
\end{aligned}\right.$$

また differential $d: \Lambda^S \to \Lambda^S$ は，(2.5) からわかる様に

(2.11) $$d\theta = -\theta \vee \theta$$

の関係を満足する。つまり θ を coalgebra S から algebra Λ^S への線形写像と見るとき，これは E.H. Brown [6] の意味の twisting cochain である。 d は具体的には，

(2.12) $$d\lambda_{ij} = -\sum_{k,l\geq 0} \binom{i}{k}\binom{j}{l} \lambda_{kl} \cdot \lambda_{i-k,j-l}$$

で与えられる。

次に Λ^S の加法的構造として

<u>定理 2.13</u>. Λ^S は $\mathbb{Z}$ 上の自由加群である.

この定理の証明のため，先ず次の補題を準備しよう．

<u>補題 2.14</u>. Hopf algebra $S = \mathbb{Z}[s_1, s_2, s_3, \cdots]$ の n 個のテンソル積 $S^{\otimes n} = S \otimes \cdots \otimes S$ において，

$$\sum_{i=0}^{n-2} \bar{S}^{\otimes i} \otimes \psi(S) \otimes \bar{S}^{\otimes(n-i-2)} = \sum \bar{S} \otimes \cdots \otimes \psi(S) \otimes \cdots \otimes \bar{S}$$

は直和因子である。ここで $\bar{S} = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$，$\psi$ は S の diagonal (1.6).

<u>証明</u>. n に関する帰納法。 $n=2$ のとき，

$$S \underset{\psi}{\overset{\varepsilon\otimes 1}{\rightleftarrows}} S \otimes S \quad , \quad (\varepsilon \otimes 1) \circ \psi = id.$$

から $S \otimes S = \psi(S) \oplus (\bar{S} \otimes S)$ （直和分解）がある。$n=3$ の場合 $S^{\otimes 3} = \{\psi(S) \oplus (\bar{S} \otimes S)\} \otimes S = (\psi(S) \otimes S) \oplus (\bar{S} \otimes S \otimes S) =$
$(\psi(S) \otimes \mathbb{Z} \oplus (\psi(S) \otimes \bar{S}) \oplus (\bar{S} \otimes \psi(S)) \oplus (\bar{S} \otimes \bar{S} \otimes S)$

従って $(\psi(S) \otimes \bar{S}) \oplus (\bar{S} \otimes \psi(S))$ は $S^{\otimes 3}$ の直和因子，以下同様。

この補題における直和因子の $\rho^{\otimes n}: S^{\otimes n} \to L^{\otimes n}$ ((2.1)参照)による像

$$\rho^{\otimes n}\left(\sum \bar{S}\otimes\cdots\otimes\psi(S)\otimes\cdots\otimes\bar{S}\right) = \sum \bar{L}\otimes\cdots\otimes(\rho^{\vee}\rho(S))\otimes\cdots\otimes\bar{L}$$

は，自由加群 $L^{\otimes n} = S_2^{\otimes n}$ の部分加群であるから，それ自身 $\mathbb{Z}$-free である。一方 $\rho^{\otimes n}$ は全射であるから，

(2.15) $\sum \bar{L}\otimes\cdots\otimes(\rho^{\vee}\rho(S))\otimes\cdots\otimes\bar{L}$ は $\sum \bar{S}\otimes\cdots\otimes\psi(S)\otimes\cdots\otimes\bar{S}$ の，従って $S^{\otimes n}$ の直和因子。

一方

(2.16) $\sum \bar{L}\otimes\cdots\otimes(\rho^{\vee}\rho(S))\otimes\cdots\otimes\bar{L} \cap \bar{L}^{\otimes n}$
$$= \sum \bar{L}\otimes\cdots\otimes(\theta^{\vee}\theta(\mathrm{Ker}\,\theta))\otimes\bar{L}\otimes\cdots\otimes\bar{L}$$

である。従って

(2.17) $$\Lambda^S_{(n)} = \bar{L}^{\otimes n}\Big/\sum \bar{L}\otimes\cdots\otimes(\theta^{\vee}\theta(\mathrm{Ker}\,\theta))\otimes\cdots\otimes\bar{L} \subset L^{\otimes n}\Big/\sum\bar{L}\otimes\cdots\otimes(\rho^{\vee}\rho(S))\otimes\cdots\otimes\bar{L}$$
$$\subset S^{\otimes n}\Big/\sum\bar{L}\otimes\cdots\otimes(\rho^{\vee}\rho(S))\otimes\cdots\otimes\bar{L}$$

となり，この最後のものは(2.15)により自由 $\mathbb{Z}$-加群であるから，Λ^S における長さ n の部分 $\Lambda^S_{(n)}$ も自由 $\mathbb{Z}$-加群となる。┘

Λ^S の基については，次のことが予想される。Λ^S における単項式 $\lambda_{i_1j_1}\lambda_{i_2j_2}\cdots\lambda_{i_kj_k}$ で条件

(2.18) $$\min(1, j_1) \geqq j_2 \geqq \cdots \geqq j_k \geqq 0$$

を満足するものを <u>admissible</u> と呼ぶことにする。このとき

<u>予想2.19.</u> admissible monomials の全体は Λ^S の基をつくる。

例えば，表(2.10)において下線を付したものは admissible である。

§3. comodule resolutions

(A,Γ) を Hopf algebroid (§1) とする。

<u>定義3.1.</u> 左 A-module M と A-map $\psi_M : M \to \Gamma \otimes_A M$ が与えられて，条件

1) $(M \xrightarrow{\psi_M} \Gamma \otimes_A M \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} M) = id.$

2) 次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_M} & \Gamma\otimes_A M \\ \psi_M \downarrow & & \downarrow \Delta\otimes 1 \\ \Gamma\otimes_A M & \xrightarrow{1\otimes\psi_M} & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M \end{array}$$

を満足するとき，(M,ψ_M) を <u>左 (A,Γ)-comodule</u>，或いは，単に M を <u>左 Γ-comodule</u> という。

例えば A は，$\psi_A = \eta_L : A \to \Gamma$ (left unit) によって，また Γ 自身は $\psi_\Gamma = \Delta$ によって，左 Γ-comodule とみなすことができる。

左 Γ-comodule M と N の間の射 (Γ-comodule map) $f : M \to N$ は ψ_M，ψ_N と compatible な A-map として定義される。M から N への射全体を $Hom_\Gamma(M,N)$ で表わす。このとき，例えば

$$(3.2)\quad \begin{array}{l} Hom_\Gamma(A,N) \cong \{n\in N ;\ \psi_N(n) = 1\otimes n\} \\ Hom_\Gamma(A,A) \cong \{a\in A ;\ \eta_L(a) = \eta_R(a)\} \end{array}$$

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(A,\Gamma)=\{f:A\to\Gamma\,;\ f(1)=\eta_R(a) \text{ for some } a\}\cong A$$

が成り立つ。これらは容易に験すことができるが，最後のものについて補足すれば，可換図

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ {\scriptstyle \psi_A=\eta_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ \Gamma & \xrightarrow{1\otimes f} & \Gamma\otimes_A\Gamma \end{array} ,$$

において，$1\otimes f(1)=\Delta f(1)$ の両辺に $1\otimes\varepsilon$ をほどこせば，$1\otimes\varepsilon f(1)=f(1)$。$\varepsilon f(1)=a\in A$ とおけば，$f(1)=\eta_R(a)$ を得る。

前節の coalgebra S と DGA-algebra Λ^S に対して，twisting cochain $\theta:S\longrightarrow\Lambda^S$ ((2.11)参照) による twisted tensor product $S\otimes_\theta\Lambda^S$ (簡単のため $S\otimes\Lambda^S$ で表わす)を考える。これは $S\otimes\Lambda^S$ に differential

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &d(s\otimes\lambda)=ds\cdot\lambda+s\otimes d\lambda, \qquad (s\in S,\ \lambda\in\Lambda^S), \\ &ds=(1\otimes\theta)\psi(s), \qquad \mathrm{bideg}\, d=(1,0),\ \mathrm{bideg}\, s=(0,\deg s), \end{aligned}$$

を導入したものである。これによって $S\otimes\Lambda^S$ は cochain complex となる。

定理3.4. $$H^{s,t}(S\otimes\Lambda^S,d)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & (s,t)=(0,0)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}.$$

証明. 先ず S 上の unnormalized cobar construction $S\otimes T(S)$ を考える。$T(S)$ は S 上のテンサー代数。differential d は

$$d(\alpha[\alpha_1|\alpha_2|\cdots|\alpha_n])=\sum\alpha'[\alpha''|\alpha_1|\alpha_2|\cdots|\alpha_n]+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha[\alpha_1|\cdots|\overset{i\text{番目}}{\psi(\alpha_i)}|\cdots|\alpha_n]$$
$$+(-1)^{n+1}\alpha[\alpha_1|\cdots|\alpha_n|1]$$

で与えられる。良く知られた通り

$$H^{s,t}(S\otimes T(S))=\mathbb{Z} \text{ for } (s,t)=(0,0),\ =0 \text{ otherwise}.$$

いま $\pi : T(S) \to \Lambda^S$ を自然な射影とする．これは $T(\theta) : T(S) \to T(\bar{S}_2)$ を経由する．$J = \mathrm{Ker}\,\pi$ は $T(S)$ の両側いでやるで，Λ^S が free だから

$T(S) = J \oplus J'$，$J' \overset{\pi}{\approx} \Lambda^S$，なる直和分解がある $\left(J' \subset T(\bar{S}_2) \text{ としてよい} \right)$．

複体の完全列

$$(3.5)\quad 0 \to S \otimes J \to S \otimes T(S) \to S \otimes \Lambda^S \to 0$$

において

<u>補題 3.6.</u> $\quad H^{**}(S \otimes J) = 0$

を言えば H^{**}-長完全系列から定理 3.4 が証明される．

この目的で次の様な J の subcomplexes を考える：

$$(3.7)\qquad J'' = S \cdot J + \bar{K}_\theta \cdot J' + \Psi(K_\theta) \cdot J' \quad , K_\theta = \mathrm{Ker}(\theta : S \to \bar{S}_2)$$

$$J''' = \bar{S} \cdot J + [1] \cdot J'' \qquad \bar{K}_\theta = K_\theta \cap \bar{S}$$

ここで・はテンソル積．このとき $dJ'' \subset J''$，$dJ''' \subset dJ'''$ が直接計算によって験される．

<u>補題 3.8.</u> 1) 複体の完全列

$$0 \to S \otimes J''' \xrightarrow{i} S \otimes J \to S \otimes J/J''' \to 0$$

において，$i_* : H^{**}(S \otimes J''') \to H^{**}(S \otimes J)$ は零写像である，

2) $H^{**}(S \otimes J/J''') = 0$．

<u>証明.</u> 1) は，cochain homotopy $\sigma : S \otimes J''' \to S \otimes J$ を，

$$\sigma(\alpha \otimes |\beta| \cdot u) = \varepsilon(\alpha) \cdot \beta \otimes u \quad , \alpha \in S, \left(\begin{smallmatrix} \beta \in \bar{S} \\ u \in J \end{smallmatrix} \right. \text{ 又は } \left(\begin{smallmatrix} \beta = 1 \\ u \in J' \end{smallmatrix} \right.,$$

とおけば，$d\sigma + \sigma d = i$．次に 2) の証明に移る．このため

$$(3.9) \qquad J/J''' \cong K_\theta\cdot J' \oplus \Psi(K_\theta)\cdot J'$$

に注意する．

このとき，contracting homotopy

$$(3.10) \qquad \sigma(\alpha\otimes|k|\cdot v) = 0 \qquad (\alpha\in S,\ k\in K_\theta,\ v\in J')$$

$$\sigma(\alpha\otimes|\Psi(k)|\cdot v) = \begin{cases} -\alpha\otimes|k|\cdot v & (k\in \bar{K}_\theta) \\ \alpha\otimes|1|\cdot v & (k=1) \end{cases}$$

と置けば，直接計算によって

$$(3.11) \qquad d\sigma + \sigma d = id \qquad \text{on } K_\theta\cdot J' \oplus \Psi(K_\theta)\cdot J'$$

が示される．ここで $|k|\cdot dv$, $|\Psi(k)|\cdot dv$ 等が現れるが，

$$(3.12) \qquad \begin{tikzcd} J' \arrow[r, "d"] \arrow[dr, dashed, "\pi^{-1}d_1\pi"] \arrow[dd, "\pi", "\wr"'] & T(S_2) \arrow[dd, bend left, "\pi"] \\ & J' \arrow[u, hook] \arrow[d, "\wr"] \\ \Lambda^S \arrow[r, "d_1"] & \Lambda^S \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \pi\circ d = d_1\circ\pi \\ d \equiv \pi^{-1}d_1\circ\pi \mod J \end{array}$$

を考慮すれば，$|k|\cdot dv$, $|\Psi(k)|\cdot dv$ における dv は，mod J''' で，$\pi^{-1}d_1\pi(v)$ $(\in J')$ に置きかえ得る，或いは $dv\in J'$ と見做してもよい．

ともかく，これによって補題3.8，補題3.6従ってまた定理3.4の証明が完了する。」

その結果，$\mathbb{Z}$ の acyclic, injective (left) S-comodule resolution

$$(3.13) \qquad \begin{array}{c} \mathbb{Z} \to S\otimes\Lambda^S, \text{ または} \\ 0\to\mathbb{Z}\to S \xrightarrow{d} S\otimes\Lambda^S_{(1)} \xrightarrow{d} S\otimes\Lambda^S_{(2)} \to \cdots \end{array}$$

が得られ，これに左から $A = MU_*$ を tensor することによ

って, A の acyclic, injective (left) Γ-comodule resolution:

$$(3.14) \qquad A \xrightarrow{\eta_L} \Gamma \otimes \Lambda^S \qquad (\Gamma = A \otimes_? S = MU_*MU)$$

が得られる。

§4. Λ^{MU} and a spectral sequence of the Adams-Novikov type.

左 Γ-comodule の圏における Hom-函手を (3.14) に適用して

$$(4.1) \qquad \mathrm{Hom}_\Gamma(A, \Gamma \otimes \Lambda^S) \cong A \otimes \Lambda^S$$

を得る, differential は (3.14) のそれから導びかれるもので,

$$(4.2) \qquad d(a \otimes \lambda) = (1 \otimes \theta)\eta_R(a) \cdot \lambda + a \otimes d\lambda$$

となる。

$\mathrm{Hom}_\Gamma(A, \ )$ の derived functor が $\mathrm{Ext}_\Gamma(A, \ )$ であることから, 次の定理を得る:

<u>定理4.3.</u> (i) cochain complex $\Lambda^{MU} = MU_* \otimes \Lambda^S$ (4.1) のコホモロジー群 $H^{s,t}(\Lambda^{MU}, d)$ は $\mathrm{Ext}^{s,t}_{MU_*MU}(MU_*, MU_*)$ と同型である (後者は Adams-Novikov スペクトル系列の E_2-項), (ii) Λ^{MU} は両側 MU_*-加群の構造をもち, それによって, Λ^{MU} は DGA-algebra over $\mathbb{Z}$ となる, (iii) Adams-Novikov 型のスペクトル系列が存在して, Λ^{MU} はその E_1-項となる.

<u>証明.</u> (i) は Ext の定義から明らか。(ii) を示すため, Λ^{MU} に MU_* の右作用を次の様に定義する:

$$(4.4) \qquad (a \otimes \lambda) \cdot b \overset{\text{def}}{\equiv} \sum a \cdot b_{ij} \otimes D_1^i D_2^j(\lambda), \quad a, b \in MU_*, \ \lambda \in \Lambda^S,$$

$$\eta_R(b) = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} \otimes \Delta_1^i \Delta_2^j + (\Delta_k (k \geq 3) \text{ を含む項})$$

ここで D_1, D_2 は (2.8) で定義された Λ^S の derivations である。この右作用が well-defined であること、つまり

(4.5) $$(\lambda\cdot\mu)\cdot b = \lambda\cdot(\mu\cdot b),$$
$$\lambda\cdot(ab) = (\lambda\cdot a)\cdot b, \quad \lambda,\mu\in\Lambda^S,\ a,b\in MU_*$$

等の証明は省略させて頂く。また

(4.6) $$d(\lambda_{ij}a) = d\lambda_{ij}\cdot a - \lambda_{ij}\cdot da, \quad a\in MU_*$$

によって Λ^{MU} は $\mathbb{Z}$ 上の DGA-algebra となる。つぎに (iii) の証明は、Adams [3] の方法に従って、先ずスペクトラムの cofibrations

$$S^0=Y_0 \xrightarrow{\eta} W_0 = MU \to Y_1, \quad Y_1 \to W_1 = MU\wedge S^{\Lambda^S_{(1)}} \to Y_2, \quad \text{等}$$

一般に $Y_n \to W_n = MU\wedge S^{\Lambda^S_{(n)}} \to Y_{n+1}$ を帰納的に定義する。

(4.7)
$$\begin{tikzcd}
S^0=Y_0 \arrow[dr, "\eta"'] & & Y_1 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & & Y_3 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & & \cdots \\
& W_0 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\delta_0"'] & & W_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\delta_1"'] & & W_2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\delta_2"'] & & W_3 &
\end{tikzcd}$$

ここで

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & MU_*(S^0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & MU_*(W_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & MU_*(W_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
0 \arrow[r] & MU_* \arrow[r, "\eta_L"'] & \Gamma \arrow[r, "d_0"'] & \Gamma\otimes\Lambda^S_{(1)} \arrow[r, "d_1"'] & {}
\end{tikzcd}$$

は (3.14) の acyclic resolution, $S^{\Lambda^S_{(n)}} = \bigvee_I S^{t(\lambda_I)}$ (wedge sum), ただし $\{\lambda_I\}$ は $\Lambda^S_{(n)}$ の基, bideg $\lambda_I = (n, t(\lambda_I))$ とする。

補題 4.8 (Prop. 13.5, Adams [3], Part III) F を E-module spectrum, E_*X が projective E_*-module のとき、

$$F^*X \cong \mathrm{Hom}_{E_*}(E_*X, F_*)$$

この補題を $E=MU$, $X=W_{n-1}=MU\wedge S^{\Lambda^S_{(n-1)}}$, $F=MU\wedge W_n$ に適用して $d_{n-1}: MU_*(W_{n-1})\to MU_*(W_n)$ に対応する射

$$\delta_{n-1}: W_{n-1}\longrightarrow MU\wedge W_n\longrightarrow W_n$$

が得られ cofibration $Y_{n-1}\xrightarrow{j_{n-1}} W_{n-1}\xrightarrow{k_{n-1}} Y_n$ から $\delta_{n-1}=j_n\circ k_{n-1}$ となる射 $j_n: Y_n\to W_n$ が得られる。(4.7)の三角形に函手 $\pi_*=[S^*,-]$ を適用して exact couple

$$(4.9)\qquad \begin{tikzcd} \sum\pi_*(Y_{n+1}) \arrow[rr, "i"] & & \sum\pi_*(Y_n) \arrow[dl, "j"] \\ & E_1=\sum\pi_*(W_n)\approx\sum MU_*\otimes\Lambda^S_{(n)}=\Lambda^{MU} \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

に伴うスペクトル系列を作れば，Adams-Novikov 型の，球面の安定ホモトピー群に収束するものが得られる。

後書. Λ^{MU}を用いての Ext の計算は，differential に η_R が関係しているので，低次元を除いて困難である。Λ^{MU}のホモトピー論への応用は今後の問題である。Λ^{BP}も同様の方法で構成できる(広大下村克己氏との共同研究)。

このテーマについては学会その他で既にお話したことがあるが，証明の完成のために 岩井斉良，石井秀則，小島一元，柳田伸顕，下村克己，平田浩一の諸氏をはじめ多くの方々から御助言を頂いた。ここに深く感謝いたします。

References

[1] J. F. Adams, On the cobar construction, Colleque de Topologie Algebrique, Louvain, Paris (1956).

[2] J. F. Adams, Lectures on generalized cohomology, Lecture Notes in Mathematics 99, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[3] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, Chicago Lectures in Mathematics, The Univ. of Chicago Press. 1974.

[4] A. K. Bousfield, E. B. Curtis, D. M. Kan, D. G. Quillen, D. L. Rector and J. W. Schlesinger, The mod-p lower central series and the Adams spectral sequence, Topology 5 (1966), 331-342.

[5] A. K. Bousfield and D. M. Kan, The homotopy spectral sequence of a space with coefficients in a ring, Topology 11 (1972), 79-106.

[6] E. H. Brown, Twisted tensor product I, Ann. of Math. 69 (1959), 223-246.

[7] E. H. Brown and S. Gitler, A spectrum whose cohomology is a cyclic module over the Steenrod algebra, Topology 12 (1973), 283-295.

[8] P. S. Landweber, cobordism operations and Hopf algebras,

Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 94-110.

[9] W. Lellmann and M. Mahowald, A generalization of the lambda algebra, to appear.

[10] M. Mahowald, A new infinite family in ${}_2\pi_*^S$, Topology 16 (1977), 249-256.

[11] H. Miller, Some algebraic aspects of the Adams-Novikov spectral sequence, Dissertation, Princeton Univ. 1974.

[12] J. W. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math. 67 (1958), 150-171.

[13] J. W. Milnor, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Amer. J. of Math. 82 (1960), 505-521.

[14] S. P. Novikov, The method of algebraic topology from the view point of cobordism theories (Russian), Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 31 (1967), 855-951.

[15] S. B. Priddy, Koszul resolutions, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 39-60.

[16] D. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1293-1298.

[17] N. Shimada and A. Iwai, On the cohomology of some Hopf algebras, Nagoya Math. J. 30 (1967), 103-111.

[18] N. Shimada, An MU-analogue of the lambda algebra, to appear.

[19] R. Zahler, The Adams-Novikov spectral sequence for the spheres, Ann. of Math. 96 (1972), 480-504.