数理解析研究所講究録
605巻 1987年 7-15

反自己双対接続のモジュライ空間の計量に関する考察

東大理　松本幸夫 (Yukio Matsumoto)

4次元多様体上の反自己双対なSU(2)-接続のなすモジュライ空間の構造は、Donaldson [3], 古田[4] 等により詳しく研究されているが、モジュライ空間の許容する計量についての考察はまだそれほどなされていないようである。このノートでは、モジュライ空間の計量についてのいくつかの実験的計算結果を述べる。いずれも、4次元球面S^4上のBPST-インスタントンに関する計算である。

§1. 正の曲率を与える計量

反自己双対接続のモジュライ空間に一番素直な方法で計量を入れるには、$\Omega^1(\mathrm{ad}\,\eta)$の内積から決まる計量を入れればよいが、4次元球面$S^4$のBPST-インスタントンについて計算すると、この計量は正の断面曲率を与える。これは、広島大学の松本堯生氏と土井英雄氏、それに筆者の協同作業の結果

である.

まず記号を決めておこう. ηをS^4上のHopf bundle $S^7 \to S^4$に付随した$\mathbb{C}^2$-bundleとする. 第2 Chern類は$c_2(\eta) = 1$であることがわかる.

ηの構造群を$SU(2)$, 張り合わせの関数を$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SU(2)$としよう. このとき, U_α達と, $SU(2)$のLie環$su(2)$の直積$\{U_\alpha \times su(2)\}_{\alpha \in A}$を次の同値関係

$$(x_\alpha, u_\alpha) \sim (x_\beta, u_\beta) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} x_\alpha = x_\beta ;\ u_\alpha = g_{\alpha\beta} u_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$$

で張り合わせて得られるベクトル束を$\mathrm{ad}\,\eta$と記す. $\mathrm{ad}\,\eta$のファイバーは$su(2)$である.

非負整数$p \geq 0$について$\Omega^p(\mathrm{ad}\,\eta) = \Gamma(\mathrm{ad}\,\eta \otimes \Lambda^p T^*M)$とおく. (ただし, 今の場合は$M = S^4$)

η上の接続∇は, 局所的には$su(2)$-valued 1-form A_αで与えられる: $\nabla = \{A_\alpha\}$. η上に2つの接続$\nabla = \{A_\alpha\}$, $\nabla' = \{A'_\alpha\}$があったとき, 差$\nabla' - \nabla = \{A'_\alpha - A_\alpha\}$は大局的な$\mathrm{ad}\,\eta$-valued 1-form $\in \Omega^1(\mathrm{ad}\,\eta)$になることがわかる: $\nabla' - \nabla \in \Omega^1(\mathrm{ad}\,\eta)$.

η上の接続全体を$\mathcal{C}$と記すと, $\mathcal{C}$は無限次元の空間になるが, 上のことから, $\mathcal{C}$の∇における"接ベクトル空間"は,

$\Omega^1(\mathrm{ad}\eta)$ に他ならない．すなわち $T_\nabla C = \Omega^1(\mathrm{ad}\eta)$.

S^4の自然な計量に関する$*$作用素 $*: \Lambda^p T^*S^4 \to \Lambda^{4-p}T^*S^4$ を $\mathrm{id}\otimes *$ により $*: \Omega^p(\mathrm{ad}\eta) \to \Omega^{4-p}(\mathrm{ad}\eta)$ に拡張しよう．すると，$u, v \in \Omega^p(\mathrm{ad}\eta)$ に対し，

$$\langle u, v\rangle = -\int_{S^4} \mathrm{Trace}(u \wedge *v)$$

とおいて，$\Omega^p(\mathrm{ad}\eta)$に正定値内積が定まる．ただし，Traceは uと$*v$の係数（ともに$su(2)$に属す）の複素行列としての積をとったもののTraceである．

$\nabla = \{A_\alpha\}$ による共変外微分 $d^\nabla: \Omega^p(\mathrm{ad}\eta) \to \Omega^{p+1}(\mathrm{ad}\eta)$ を，$u \in \Omega^p(\mathrm{ad}\eta)$ に対し，

$$d^\nabla u = du + A_\alpha \wedge u - (-1)^p u \wedge A_\alpha$$

と定義すると，これは大域的につながって well-defined である．$d^\nabla: \Omega^p(\mathrm{ad}\eta) \to \Omega^{p+1}(\mathrm{ad}\eta)$ の，内積$\langle\ ,\ \rangle$に関する形式的随伴作用素を $\delta^\nabla: \Omega^{p+1}(\mathrm{ad}\eta) \to \Omega^p(\mathrm{ad}\eta)$ とする．

Cの，接空間$T_\nabla C$ は 内積$\langle\ ,\ \rangle$に関して，$T_\nabla C = \mathrm{Im}\, d^\nabla \oplus \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$ と直交分解される．（$d^\nabla: \Omega^0(\mathrm{ad}\eta) \to \Omega^1(\mathrm{ad}\eta)$, $\delta^\nabla: \Omega^1(\mathrm{ad}\eta) \to \Omega^0(\mathrm{ad}\eta)$.）これは，次のような幾何的な

意味をもつ．

ηの各ファイバーには自然にHermite計量が入っているとしてよいが，この計量を保つηの自己同型$f:\eta\to\eta$をゲージ変換と呼ぶ．ゲージ変換の全体$\mathcal{G}$をゲージ群という．$\mathcal{G}$は自然に$\mathcal{C}$に作用している．実は，直交分解$T_\nabla \mathcal{C} = \mathrm{Im}\, d^\nabla \oplus \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$において，$\mathrm{Im}\, d^\nabla$は$\mathcal{G}$のorbit方向の接空間であり，$\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$は，その直交補空間である．（Sobolev normによる完備化等の話は省略した．）

$\nabla = \{A_\alpha\}$につき，$F_\alpha = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha$とおくと$su(2)$-valued 2-form F_αは大域的につながって$\Omega^2(\mathrm{ad}\,\eta)$の元$F_\nabla = \{F_\alpha\}$を与える．$F_\nabla$を接続$\nabla$の曲率という．$F_\nabla$が，$*F_\nabla = -F_\nabla$を満たすとき，$\nabla$を反自己双対接続という．この性質はゲージ変換で不変である．反自己双対接続全体のなす$\mathcal{C}$の部分空間を$\mathcal{G}$で割って得られる空間が（反自己双対接続の）モジュライ空間$\mathcal{M}$である．

我々の場合，（底空間がS^4のとき），$\mathcal{M}$は5次元円板の内部$\mathring{D}^5$と自然に同一視される．（Atiyah-Hitchin-Singer [1]）$\Omega^1(\mathrm{ad}\,\eta)$の内積を$\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$に制限したものを$T_{[\nabla]}\mathcal{M}$に落すことによって，$\mathcal{M}$は"自然に" Riemann計量を持っている．我々の計算したのは，この計量である．

計算結果を述べよう．

$\mathbb{H}=\{x \mid x=x_1+x_2 i+x_3 j+x_4 k\}$ を4元数体とする. $x=x_1+x_2 i+x_3 j+x_4 k$ に対し, $\bar{x}=x_1-x_2 i-x_3 j-x_4 k$, $|x|^2=x\bar{x}$ (ただし $|x|\geqq 0$), $\mathrm{Im}(x)=x_2 i+x_3 j+x_4 k$ とおく.

立体射影の逆に相当する写像

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto \left(\frac{2x_1}{|x|^2+1}, \frac{2x_2}{|x|^2+1}, \frac{2x_3}{|x|^2+1}, \frac{2x_4}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \cap & \qquad\qquad & \cap \\ \mathbb{R}^4=\mathbb{H} & & S^4 \end{array}$$

によって $\mathbb{H}$ を S^4 の局所座標と思う. Lie環 $\mathfrak{su}(2)$ を $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ と同一視する. S^4 上の BPST-インスタントンと呼ばれる反自己双対接続の $\mathbb{H}$ における connection form A は, $A=\dfrac{\mathrm{Im}(\bar{x}\,dx)}{\lambda^2+|x|^2}$ $(\lambda>0)$ で与えられる. これを2-パラメーターファミリーにした

$$A_{a,\lambda}=\frac{\mathrm{Im}\{(1+\lambda^2|a|^2)\bar{x}\,dx+(\lambda^2-1)\bar{a}\,dx\}}{|x-a|^2+\lambda^2|\bar{a}x+1|^2}$$

$$(a\in\mathbb{H}\quad \lambda\in(0,1))$$

が $\mathcal{M}=\mathring{D}^5$ の回転不変な座標を与える.

<u>補題</u>. $\left.\dfrac{\partial A_{a\lambda}}{\partial a_\nu}\right|_{a=0}$ $\nu=1,2,3,4$ と $\left.\dfrac{\partial A_{a\lambda}}{\partial \lambda}\right|_{a=0}$ の $\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla\wedge$ の horizontal lift はそれぞれ

$$\left(\frac{\partial A_{a\lambda}}{\partial a_1}\Big|_{a=0}\right)^h = \frac{2(1-\lambda^2)\lambda^2}{1+\lambda^2}\left\{-\frac{(1+|x|^2)\,\mathrm{Im}(dx)}{(\lambda^2+|x|^2)^2} + \frac{2x_1}{\lambda^2+|x|^2}A\right\}, \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\partial A_{a\lambda}}{\partial \lambda}\Big|_{a=0}\right)^h = \frac{-2\lambda}{\lambda^2+|x|^2}A\ ,\quad \text{ここに}\ A = \frac{\mathrm{Im}(\bar{x}dx)}{\lambda^2+|x|^2} = \sum_{\nu=1}^{4} A_\nu dx_\nu ,$$

で与えられる.

これから次の結果を得る.

計算結果([2]) 点$(a,\lambda)\in\mathfrak{M}$における$\mathfrak{M}$の計量は

$$\frac{16\pi^2}{(|a|^2+1)^2}\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2\left\{1-\frac{\lambda^4}{5}F(4,3,6;1-\lambda^2)\right\}|da|^2+\frac{16}{5}\pi^2\lambda^2F(4,3,6;1-\lambda^2)d\lambda^2$$

である. ここで, $F(4,3,6;\xi)$は超幾何関数. また断面曲率のふるまいは, $\lambda\to 0$ ($\mathfrak{M}$の周辺部) では $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}\right) \to \frac{4}{16}\frac{1}{\pi^2}>0$, $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \to \frac{3}{16}\frac{1}{\pi^2}>0$. また$\lambda\to 1$ ($\mathfrak{M}$の中心部) では $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}\right) \to \frac{5}{16}\frac{1}{\pi^2}>0$, $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \to \frac{5}{16}\frac{1}{\pi^2}>0$.

§2. 負の曲率を与える計量

松本尭生氏([5])は, $\mathfrak{M}$に負の定曲率空間の構造を与える計量の入れ方を見出した. 彼の方法は曲率形式Fの(パラメーターによる)微分を利用するものであるが, S^4から一般の単連結4次元多様体にそのままでは拡張できない. そこで, 一般の単連結4次元多様体にも拡張できそうな計量の入れ方

を彼の方法を少し変形して述べよう．そしてS^4の場合に計算して見る．新しく modify した方法は彼のもとの計量と異なり，S^4に負の定曲率空間の構造は与えない．

定義．$v, w \in T_{[\nabla]}\mathcal{M}$ の horizontal lifts を $v^h, w^h \in \operatorname{Ker} \delta^{\nabla} (\subset T_{\nabla}\mathcal{C})$ とする．v と w の新しい"内積" $\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle$ を

$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle d^{\nabla}(v^h), d^{\nabla}(w^h) \rangle$$

によって定義する．ただし，$d^{\nabla}: \Omega^1(\operatorname{ad}\eta) \to \Omega^2(\operatorname{ad}\eta)$ であり、また上式右辺の $\langle\,,\rangle$ は $\Omega^2(\operatorname{ad}\eta)$ における内積である．

新しい"内積" $\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle$ が $T_{[\nabla]}\mathcal{M}$ の正定値な形式であることは前以って証明できないが，S^4の場合に計算してみると確かに正定値内積になっている．S^4上の計算は前節の補題（horizontal lifts の explicit formula）により出来る．

計算結果．点 $(a, \lambda) \in \mathcal{M}$ において計算した上の内積 $\langle\!\langle\,,\rangle\!\rangle$ による計量は，

$$\frac{32\pi^2}{5(|a|^2+1)^2}\,\frac{(1-\lambda^2)^2}{\lambda^2}\left\{1 + \frac{(1-\lambda^2)^2}{2(1+\lambda^2)^2}\right\}|da|^2 + \frac{32\pi^2}{5}\,\frac{1}{\lambda^2}\,d\lambda^2$$ である．

また断面曲率は $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}\right) < 0$ が証明できる．（ただし

$K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}) < 0$ が常に成立つかどうかは計算していない.)
曲率のふるまいは, $\lambda \to 0$ ($\mathcal{M}$の周辺部)では, $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}) \to -\frac{5}{32\pi^2}$, $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}) \to -\frac{5}{32\pi^2}$. また $\lambda \to 1$ ($\mathcal{M}$の中心部)では $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}) \to -(\frac{5}{8\pi})^2$, $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}) \to -(\frac{5}{8\pi})^2$.

§§1, 2の計量を比較してみると, §1の"素直な"はずの計量には超幾何関数などが顔を出しているが, §2の計量は, aとλの有理関数だけで記述されている. §2の計量の方がどうやら扱いやすそうである.

前頁で述べたように, §2の"計量"が本当に計量であるかどうかは一般の単連結4次元多様体Mについてはまだわからない. §2の"計量"が本当の計量であることは, 次の予想と同値である. (S^4については, この予想が正しいことが前頁の計算結果からわかる.)

<u>予想</u> ηを単連結4次元多様体M上の$\mathbb{C}^2$-bundleで$c_2(\eta) = 1$をみたすものとする. ∇をη上の反自己双対接続とする. このとき, $u \in \Omega^1(\mathrm{ad}\,\eta)$につき, $d^\nabla u = 0$かつ$\delta^\nabla u = 0$ならば $u = 0$である. (反自己双対接続に関する調和1形式は自明なものしかない!?)

(1986. 5月12日記)

References

[1] M.F.Atiyah,N.J.Hitchin,I.M.Singer; Self-duality in four-dimensional Riemanian geometry, Proc.Roy.Soc.London, A362 (1978),425-461

[2] H.Doi,Y.Matsumoto,T.Matumoto; in preparation

[3] S.K.Donaldson; An application of gauge theory to four-dimensional topology, J.Diff.Geom.18 (1983) 279-315

[4] M.Furuta; Perturbation of Moduli Spaces of Self-dual Connections,preprint

[5] T.Matumoto; Hyperbolic metric on the moduli space of 1-instantons over S^4, preprint.