

2次元乱流の数値シミュレーション

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

京大理物理 山田 道夫 (Michio Yamada)

京大理物理 大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

1. はじめに

2次元 Navier-Stokes 方程式に従う流体乱流は、厳密な意味では決して実現されることのない流体運動であるにもかかわらず、理論、応用の広い範囲で研究されてきた。それは一つには、地球物理学的規模の流体運動(大気、海洋)や強磁場下の磁気流体の運動などでは、2次元性が良く保たれるため、多くの統計的性質が2次元乱流の特性として理解できると期待されるためである。理論的にみても、2次元流は、3次元流と異なる保存量をもつため特異な乱流構造を持つことが期待され興味深い。しかし純粹な2次元乱流を実験室内で実現することが困難なため、乱れの様々の性質は、従来は逆に、大気、海洋などの観測結果から、推測、議論されてきた。真の2次元性を持った乱流の"実現"と"観測"が

可能になったのは、近年の電子計算機の発達以後のことで、世界各地で行なわれた大規模数値計算によって、観測では得られなかった乱流場の詳細な構造を知ることが可能になった。

現在では、2次元乱流について、地球物理学的観測と計算機実験による2種類のデータが存在している。言うまでもなく、観測データは、実際には熱、成層、回転等の複雑な効果を含む形状比の大きな次元流についてのもので、これをそのまま2次元Navier-Stokes乱流のデータとするには問題が多く、またばらつきも大きい。(WiinとNielsen(1967), Julian et al. (1970), Desbois (1975)) 他方、これまでに行われた数値計算では、記憶容量や計算速度などの制約から十分大きなReynolds数を扱うことができなかった。そのため、得られた結果が高Reynolds数における漸近的性質を表わしていることを必ずしも保証できない。事実これらの2種類のデータは、エネルギー・スペクトル等の基本的な点においてすら一致しているとはいいがたい。

2次元乱流についての最も重要な量の一つは慣性領域におけるエネルギー・スペクトルの形状である。ところが上に述べたように、多くの大気、海洋のデータでは高波数領域におけるエネルギー・スペクトルが k^{-3} に近い形を示すのに対し、2次元乱流の数値実験はしばしば k^{-4} 等のより傾きの大

きいスペクトルを示して、観測と数値実験は一致せず、正しい形状は未だ確定されていない。興味深いことに、これらの2つのスペクトル形については、それぞれ対応する現象論的理論が存在している。地球物理学的観測から得られる k^{-3} スペクトルは、慣性(小)領域の統計量がエンストロフィー散逸率 ϵ と波数 k によって決定されるとするエンストロフィー・カスケード理論から得られるエネルギー・スペクトル、(Kraichnan (1967), Leith (1968), Batchelor (1969))

$$E(k) = A \eta^{2/3} k^{-3} \quad (A; \text{無次元定数}), \quad (1.1)$$

と一致している。一方、多くの等温度領域が狭い(細い)遷移領域を伴って2次元平面を埋め尽くしているとする Saffman のモデル理論は、高波数領域に於て、スペクトル(Saffman (1971))

$$E(k) \sim k^{-4} \quad (1.2)$$

を与え、これは数値実験においてしばしば見いだされる k^{-4} スペクトルと一致している。しかし、周知のように、乱流のエネルギー・スペクトルの形を疑義なく決定できる解析的理論が未だ得られていないため、何れの現象論的理論が2次元乱流の統計的性質を正しく反映しているのかを理論的に判断することは難しい。現在のところ、純粹の2次元性を実現できる点で数値実験に優るものはなく、正確で信頼できる結論

を得るためには、十分大きな Reynolds 数の数値実験を行う以外に方法がないように思われる。

数値実験によつて慣性領域のエネルギー・スペクトルなど高波数成分の統計量を調べるためには、エンストロフィーが散逸する波数領域を含んだ計算が必要である。この散逸領域の波数は、エンストロフィー・カスケード理論によれば、Reynolds 数の平方根に比例する。そのため、広い慣性領域を実現するような大きな Reynolds 数に対しては広い波数領域が必要であり、多大な記憶領域と長い計算時間を費やさねばならない。従来行われてきた計算は、殆どが周期境界条件下の流れを用いているが、この様な単純な流れを用いても、現在現実的に可能な最も大きい規模の数値実験でさえ、十分に広い慣性領域を実現することは難しい。(Lilly (1969), Deem と Zabusky (1971), Herring et al. (1974), Orszag (1976), Kowalski と Peskin (1981), Satofuka (1982), Yamamoto (1984), McWilliams (1984))

我々がここに報告する 2次元 Navier-Stokes 乱流の数値計算では、速度場に Navier-Stokes 方程式が保存する高い対称性(周期境界条件及び回転、反転対称性、Kida (1985))を課して流れを更に単純化し、記憶領域の広さを変えずに波数領域を拓げることを試みた。一般的に言えば、速度

場に高い対称性を課すことは、乱流を極めて実現しにくいものに制限し、その性格を本来の物から歪ませる恐れがあると考えられる。しかし、その対称性が実空間において大域的なものにとどまっている限り、高波数成分の統計的振舞いは重大な影響を受けないと期待できる。事実、ほとんどの乱流の数値実験で用いられる周期境界条件はこのような性格のものであり、周期より大きなスケールの乱れを考えた場合実現される見込みのない乱流を扱っているにもかかわらず、高波数成分の統計性は十分に真の乱流に近いと期待される。我々の数値実験で用いた対称性も、周期的な領域を16の部分に分けるがそれ以上細かい実空間の構造には制限をつけないという点で周期条件に近いものであり、高波数成分の統計性はやはり真の乱流に十分近いものと期待できる。

我々は、速度場に対しこの高い対称性を課すことにより、記憶領域及び計算時間を増すことなく、波数領域の広さを、周期境界条件のみの場合の16倍にすることに成功した。数値計算は、有効モード数 1364^2 に相当する大きさのものを Fourier 級数による擬スペクトル法で行い、慣性領域の無次元化エネルギー・スペクトルとして、

$$E(k) = A k^{-3} \exp\{-\sqrt{2A} k\}, \quad (A \approx 1.6)$$

を得た。このスペクトルの形状は従来の数値実験が k^{-3} より

も傾いたスペクトルを与えた原因を示唆している。また、エネルギー・スペクトルの低波数領域の構造から、数値実験において避けることの難しい最低波数付近へのエネルギーの集中がもたらす効果について考察する。

2. 高対称流と数値的方法

Navier-Stokes 方程式に従う非圧縮性流体の2次元運動を考える。 $x = (x_1, x_2)$ を空間座標、 t を時間とすると、速度場 $u = u(x, t)$ の時間発展は、渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} S - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) T + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \omega \quad (2.1)$$

によって支配される。但しここで

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad S = u_1^2 - u_2^2, \quad T = u_1 u_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

である。速度場が x_1, x_2 方向に共に 2π の周期を持つと仮定し Fourier 分解

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k} \tilde{u}(k, t) \exp[ik \cdot x] \\ \omega(x, t) &= \sum_{k} \tilde{\omega}(k, t) \exp[ik \cdot x] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= (k_1, k_2) \\ k_1, k_2 &\text{は整数} \end{aligned} \quad (2.3)$$

を導入すると、各 Fourier 係数の発展は次の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\omega}(k, t) = -k_1 k_2 \tilde{S}(k, t) + (k_1^2 - k_2^2) \tilde{T}(k, t) - k^2 \tilde{\omega}(k, t)$$

$$\tilde{U}(k, t) = i \frac{\tilde{\omega}(k, t)}{k^2} (k_2, -k_1) \quad (2.4)$$

$$\tilde{S}(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int S(x, t) \exp[-ikx] dx$$

$$\tilde{T}(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int T(x, t) \exp[-ikx] dx$$

で記述される。高精度の乱流シミュレーションには(2.4)式を用いた(擬)スペクトル法が適していることは良く知られている。しかし一般的な周期条件のままではまだ速度場に関する制約が緩く、数値計算の際、十分に広い波数領域を確保することは現在の段階では非常に難しい。そこで我々は、速度場に、更にNavier-Stokes方程式が保存する回転と反転に関する対称性を課し、計算に必要な記憶領域と計算時間の節約を試みた。ここで採用した対称性は次の様なものである。

(1) x_1 軸及び x_2 軸に関する反転対称性

$$U_1(x_1, x_2; t) = -U_1(-x_1, x_2; t) = U_1(x_1, -x_2; t) \quad (2.5)$$

$$U_2(x_1, x_2; t) = U_2(-x_1, x_2; t) = -U_2(x_1, -x_2; t)$$

(2) $(x_1, x_2) = (\pi/2, \pi/2)$ に関する $\pi/2$ 回転での不変性

$$U_1(x_1, x_2; t) = U_2(\pi - x_2, x_1; t)$$

$$u_2(x_1, x_2; t) = -u_1(\pi - x_2, x_1; t) \quad (2.6)$$

この対称条件のもとで $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ における速度場は互いに合同な16の部分に分割される。従って速度場全体はこの1/16の領域を知ることで再構成することができる。(図1)
このことは、計算に必要な領域と時間が1/16程度に縮小できることを示唆している。対称性条件(1), (2)によって、Fourier係数 $\tilde{u}(k, t)$, $\tilde{S}(k, t)$, $\tilde{T}(k, t)$ に現われる対称性は、

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k_1, k_2; t) &= -\tilde{u}(-k_1, k_2; t) = -\tilde{u}(k_1, -k_2; t) \\ &= \mp \tilde{u}(k_2, k_1; t) \\ \tilde{S}(k_1, k_2; t) &= \tilde{S}(-k_1, k_2; t) = \tilde{S}(k_1, -k_2; t) \\ &= \pm \tilde{S}(k_2, k_1; t) \\ \tilde{T}(k_1, k_2; t) &= -\tilde{T}(-k_1, k_2; t) = -\tilde{T}(k_1, -k_2; t) \\ &= \pm \tilde{T}(k_2, k_1; t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

(複号の上は波数成分 k_1, k_2 が共に偶数の時で)
下はそれらが奇数の時

となる。ここで $\tilde{u}(k, t)$, $\tilde{S}(k, t)$, $\tilde{T}(k, t)$ はすべて実数、かつ $k_1 + k_2 = \text{偶数}$ とならない k に対してはすべての Fourier係数はゼロとなる。実空間の場合と同様、この対称性によって独立な Fourier成分の数はやはり1/16となる。

数値計算では波数領域はある最高波数 ($=N/2$ とおく) 以下

のモードのみを用いる。この時(2.3)式の $\sum_{\mathbf{k}}^{\mathbf{N}/2}$ は $\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 = -\mathbf{N}/2}^{\mathbf{N}/2}$ で
 また(2.4)式の積分は有限和

$$\tilde{S}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 = -N/2}^{N/2-1} S\left(\frac{2\pi}{N} \mathbf{j}, t\right) \exp\left[-\frac{2\pi}{N} \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}\right] \quad (2.8)$$

($\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ は整数, $\mathbf{j} = (\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$)

で置きかえられる。 $\tilde{\gamma}(\mathbf{k}, t)$ に対しても同様である。我々は、aliasing 誤差を消去するために $|\mathbf{k}| \geq N/3$ の Fourier 成分をゼロとおいた。従って有効なモード数は $[N/3]^2$ である。($[]$ はガウス記号) さて、 $\tilde{\omega}(\mathbf{k}, t)$ の発展方程式(2.4)の右辺を評価するためには、

- (1) $\tilde{\omega}(\mathbf{k}, t)$ から $U\left(\frac{2\pi}{N} \mathbf{j}, t\right)$ を計算
- (2) $S\left(\frac{2\pi}{N} \mathbf{j}, t\right)$ から $\tilde{S}(\mathbf{k}, t)$ を計算
- (3) $T\left(\frac{2\pi}{N} \mathbf{j}, t\right)$ から $\tilde{\gamma}(\mathbf{k}, t)$ を計算

の3段階を経なければならぬが、段階(1)では2つ、段階(2)、(3)では各々1つの計4つの高速 Fourier 変換 (FFT) を必要とする。一般的な周期流の場合には、各々は $N \times N$ の大きさの2次元実 Fourier 変換を用いなければならぬが、我々の用いた高対称流ではこの各々の Fourier 変換を必要モード数に見合った大きさである、 $N/4 \times N/4$ の大きさのもので処理することが可能になる。この技術的な詳細はここでは省略する。(Kida, Yamada と Ohkitani (submitted to JFM))

大きさ N の一次元 Fourier 変換に必要な時間を $N \log_2 N$ (FFT) で見積ると、我々の計算スキームは、一般周期流の場合に比べて、記憶領域で $1/16$ の減少、計算速度では 16 倍以上の加速を実現している。従って同じ大きさの記憶領域と同じ長さの計算時間を用いる時は、一般周期流の場合よりも最高波数を 4 倍大きくとることが可能になる。ここで報告する数値実験は $N = 2048, 1024$ (有効モード数 $= 1364^2$ 及び 682^2) のものである。後者の N は過去行なわれた最大の大きさの数値実験 (Brachet と Sulem (1985)) と一致している。時間方向の発展には 4 次の Runge-Kutta-Gill 法を用いた。

3. 初期条件とパラメータ

数値実験に用いた初期条件は、対称性 (2.7) を持ちエネルギー・スペクトル

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq |k| < k+1} |\hat{u}(k, t)|^2 \quad (3.1)$$

が $t = 0$ において

$$E(k, 0) = c k \exp[-(k/k_0)^2] \quad (3.2)$$

$$c = 0.1, k_0 = \sqrt{10}$$

に近くなるように擬似乱数を用いて生成した。用いた初期条件のエネルギー $\mathcal{E}(t)$, エンストロフィー $\mathcal{Q}(t)$, パリンストロフィー $\mathcal{P}(t)$, 即ち

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) &= \sum_{k=0}^{[N/3]} E(k,t) \\
 Q(t) &= \sum_{k=0}^{[N/3]} k^2 E(k,t) \\
 P(t) &= \sum_{k=0}^{[N/3]} k^4 E(k,t)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

の値は、それぞれ $\varepsilon(0) = 0.357$, $Q(0) = 6.94$, $P(0) = 182$ である。我々は一個の初期条件について4つの異なる粘性率 $\nu = 2.5 \times 10^{-6}$ (Case I), 10^{-5} (Case II), 4×10^{-5} (Case III), 1.6×10^{-4} (Case IV) に対して数値実験を行った。Nの値は、2048 (Case I, II) 及び 1024 (Case III, IV) である。時間差分 Δt は 10^{-3} 又は 2×10^{-3} を用いた。

4. 渦度場の時間発展と統計量

我々の用いた流れは高対称性 (2.5), (2.6) を満たすため、領域 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 内の流れはこの領域の外へ出ることができない。図2に示したのは、この領域内の渦度の時間発展の様子である。初期には、中心に強い正の渦度の領域があり、それを取りまく比較的弱い正又は負の渦度の領域がある。時間がたつにつれて、周辺の正の渦度の領域は中心の正の渦にまきこまれ反時計方向に回転する。他方周辺の負の渦度の領域は時計方向に移動してゆく。これらの渦の動きは、速度場に課された対称性から、図に示した領域の外側にも丁度鏡像の形

で渦が存在するためである（大きさが同じで符号が異なる渦対の並進）。

一見してわかるように、時間と共に周辺の渦の領域は急速に引きのばされ中心の強い正の渦にまきついてゆく。渦の引きのばしは、粘性による平滑化作用が働き始める途続くが、図3は、この引きのばしと平滑化作用の程度は、粘性率によって大巾に異なることを示している。同時にこの図は、渦の大きな構造は粘性率には依存しないことも示している。

以上の時間発展の際、エネルギー $\varepsilon(t)$ はほとんど保存されている： $\varepsilon(0) = 0.357$, $\varepsilon(19) = 0.356$ (Case I), 0.355 (Case II), 0.348 (Case III), 0.325 (Case IV)。これは $\nu \rightarrow 0$ の時厳密に $d\varepsilon/dt \rightarrow 0$ となることに対応している。一方、エンストロフィーは時間的に減衰するが、この減衰は小さな粘性の場合ほど後の時刻に始まる（図4）。波数の下限 ($k=1$) の存在は、エネルギーの逆カスケードに伴って最低波数付近にエネルギーが（従ってエンストロフィーも）蓄積することを示唆する。そこでエンストロフィー $Q^{(\alpha)}(t)$ ($\alpha = I, II, III, IV$) を

$$Q^{(\alpha)}(t) = Q_0^{(\alpha)} + Q_1(t - T^{(\alpha)}) \quad (4.1)$$

に従って2つの部分に分ける。ここで $Q_0^{(\alpha)}$ は低波数領域からのエンストロフィーへの寄与で初期条件等に依存する値、 Q_1 は高波数領域からの寄与で普遍的な時間依存性を持つ関

数であると予想される。 $Q_0^{(\alpha)}$ と $T^{(\alpha)}$ の値を最小二乗法によって求めた結果を表1に示した。

表1

α	$Q_0^{(\alpha-1)} - Q_0^{(\alpha)}$	$T^{(\alpha-1)} - T^{(\alpha)}$	最小二乗法適用区間
II	0.16	1.2	$9 \leq t \leq 19$
III	0.26	1.0	$8 \leq t \leq 19$
IV	0.48	0.7	$7 \leq t \leq 20$

$Q_0^{(\alpha-1)} - Q_0^{(\alpha)}$ が $\alpha = \text{IV}, \text{III}, \text{II}$ の順にほぼ半分になっているが、これは $\nu \rightarrow 0$ の時 Q_0 がある有限値に収束することを示唆している。また $T^{(\alpha-1)} - T^{(\alpha)}$ が $\alpha = \text{II}, \text{III}, \text{IV}$ でほぼ等しい値をとることは、2次元乱流の特性時刻が $\ln(1/\nu)$ に比例するという予想を支持する。 $Q_0^{(\alpha)}$ と $T^{(\alpha)}$ の値を用いてインストロフイー減衰曲線を移動させて描いたものが図4である。 $t \geq 10$ での良い一致は分解(4.1)の妥当性を示している。

図5はインストロフイー散逸率 $\eta(t)$

$$\eta(t) = -\frac{d}{dt} Q(t) = 2\nu \mathcal{P}(t) \quad (4.2)$$

の時間変化を示す。但し図5では、特性時刻を一致させるため(case II, III, IV)について各々水平に1.2, 2.2, 2.9移動させてある。 $Q(t)$ の場合と同様、後半の時刻においてグラフはほぼ一致しており、 $\nu \rightarrow 0$ の時 $\eta(t) \rightarrow \text{有限}$ となること(インストロフイー・カスケード理論の前提)を示している。

なお $\eta(t)$ に時間的な振動が見られるが、これは渦が空間的に回転することによって起る。

図6は Reynolds 数 $R(t)$

$$R(t) = \varepsilon(t) / \eta(t)^{1/3} \rho$$

$$= \frac{\varepsilon(t)}{2^{1/3} \rho(t)^{1/3} \rho^{4/3}} \quad (4.3)$$

の時間変化を示す。 $t \leq 1.2$ では $\rho(t)$ が ρ によらないため $R(t) \sim \rho^{-4/3}$ となるが、 $t \geq 10$ では $\eta(t-T)$ が ρ に依存しなくなり $R(t) \sim \rho^{-1}$ となる。

5. エネルギー・スペクトル

初期条件の作り方から、波数空間でのエネルギー分布は $t=0$ において等方的であるが、渦度場の発展に伴い非等方性が現われる。これは図2に見られる中心渦周辺の細長い渦層の形成によるものである。更に時間がたつと、 $t \sim 6$ においてエネルギー分布の非等方性が弱まり、以後渦の回転による周期的変化は伴うものの、次第に等方分布に近づいてゆく。

この間のエンストロフィー・スペクトル $Q(k,t) \equiv k^2 E(k,t)$ の様子を、Case II の場合について図7に示す。図中 ●、▲、■、◆ は各々 $Q(k,t=6)$, $Q(k,t=10) \times 10^{-1}$, $Q(k,t=14) \times 10^{-2}$, $Q(k,t=18) \times 10^{-3}$ を表わしている。エネルギー・スペクトル

は $k_x \sim 10$ を境にして2つの波数領域に分けることができる。低波数側の領域ではエネルギーの逆カスケードにより最低波数付近にエネルギー（従ってエンストロフィー）の集中が生じている。一方高波数側の領域（普遍領域）ではエンストロフィー・カスケードによつて各モードが励起され、スペクトルの時間変化は相似的であり、統計的性質は初期条件にはよらない（普遍的）ことが期待される。

普遍領域におけるスペクトル形（普遍スペクトル）を求めるために試行関数

$$E(k, t) = A(t) k^{-n(t)} \exp[-\alpha(t)k] \quad (5.1)$$

を採用して、 $A(t)$, $n(t)$, $\alpha(t)$ を最小二乗法 ($7 \leq k \leq N/3 - 2$ の範囲) で決定しこれらの時間変化を調べた結果が図8である。べき指数 $n(t)$ は初期に急激に減少した後、 $n(t) = 3$ に近い値をとるが、この傾向は Δ が小さいほど顕著である。これに対し $\alpha(t)$ は Δ と共に小さくなるが、これらの関係はほぼ $\alpha(t) \propto \sqrt{\Delta}$ である。

一方、エンストロフィー・カスケード理論は普遍領域のスペクトル形として

$$E(k, t) = \eta(t)^{1/6} \Delta^{3/2} F(k) \quad (5.2)$$

$$k = k/k_d(t), \quad k_d(t) = \eta(t)^{1/6} \Delta^{-1/2}$$

を与え、上述の $\eta(t)$, $\alpha(t)$ の性質は、規格化されたスペクト

ル形 $F(k)$ として

$$F(k) = \tilde{\lambda} k^{-3} \exp[-\tilde{\alpha} k] \quad (5.2)$$

を採用するのが適当であることを示唆している。関係(4.2)より、

$$\int_0^{\infty} k^4 F(k) dk = 1/2 \quad (5.3)$$

が成り立つので $\tilde{\alpha} = \sqrt{2\tilde{\lambda}}$ であり結局無次元スペクトル形は

$$F(k) = \tilde{\lambda} k^{-3} \exp[-\sqrt{2\tilde{\lambda}} k] \quad (5.5)$$

のように得られる。

数値計算から得られたスペクトルを Case I ($11 \leq t \leq 20$) と Case II ($10 \leq t \leq 19$) について各々10個のデータを用いて(5.2)の形に無次元化し平均したものが図9である。(図はエンストロフィー・スペクトル $Q(k) = k^2 F(k)$ による。) Case I については高波数領域 ($k \geq 0.7$) においてスペクトルが小さくなっていないがこれは採用した粘性率に比してモード数が十分でないことによる打ち切り誤差と考えられる。先に述べたようにスペクトルは2つの波数領域に分けることができ、それらの境界は $k \sim 0.04$ (Case I), 0.08 (Case II) 付近である。普遍領域では ($k \geq 0.7$ となる部分を除いて) スペクトルは良い一致を示し、スケーリング則(5.2)の妥当性を支持している。Case IIのスペクトルを用いて最小二乗法により(5.5)のスペクトル形と一致するように $\tilde{\lambda}$ の値を決定し、

$$\tilde{\Lambda} = 1.6 \quad (5.6)$$

を得た。図中実線はこの値を用いた無次元スペクトル形を示す。

低波数領域 ($k \leq 10$) では、各モードの振舞は粘性によらず時間的にほぼ周期的である。Case I について $10 \leq t \leq 20$ で平均されたスペクトル (図 10) はこの領域で $Q(k) \sim k^{-2}$ (あるいは $E(k) \sim k^{-4}$) に近い形を示した後急激に減少している。これは比較的大きなスケール ($k \leq 10$) に限って *divorticity layer* ($|\nabla \omega|$ が大きな値をとる層) には含まれた等温度領域が出現し、Saffman のモデルに近い状況が実現しているためと考えられる。

以上に述べたようなスペクトル、特に慣性小領域のスペクトルに対応する流れ場の空間的構造を見るために、フーリエ成分にバンドパスフィルタを用いた後フーリエ変換して実空間の場の様子を描いた。図 11 に、このようにして処理された Case I の場合 ($t=12$) のエネルギー $u^2/2$ の分布を示す。低波数領域 ($k \leq 20$)、慣性小領域 ($20 \leq k \leq 200$)、散逸領域 ($200 \leq k$) のエネルギーは、それぞれ、代表的な 5 つの渦上、これらの渦の周辺、線上にひきのぼされた渦の上、に局在していることが見られる。またこれらの局在場所が互いに一致していないことは、次第に乱流化していく渦塊が空間的に移

動していることを示している。

6. ニ相似領域モデル

前節で述べたように、数値実験の結果は、波数領域が2つの部分、低波数領域と普遍領域に分れることを示唆している。低波数領域のスペクトルは全エネルギー ε と代表的波数(例えば最低波数) k_0 で、また、普遍領域のスペクトルをエンストロフィー・カスケード理論に従って $\eta(t)$ と $k_d(t)$ で、それぞれ特徴づけられるとすれば、エンストロフィー・スペクトルは、

$$Q(k, t) = \begin{cases} \varepsilon k_0 Q_1(k/k_0) & k \leq k^*, \\ \eta(t)^{1/2} k^{1/2} Q_2(k/k_d(t)) & k \geq k^* \end{cases} \quad (6.1)$$

と表わされる。ここで Q_1 は初期条件等に依存する無次元関数、 Q_2 は普遍的無次元関数である。(図12) 数値計算から得られた性質を考慮すれば、このスペクトルは時間と共に、図12中に矢印で示された方向に変化する。 $Q_1(k/k_d)$ が高波数側で急速に減少しているので k^* は時間的にほとんど一定である。

スペクトルのモデル (6.1) (及び (5.2), (5.5)) を用いて、エンストロフィーの時間変化を調べる。エンストロフィーはこのモデルでは次のようになる。

$$\begin{aligned} Q(t) &\sim \varepsilon k_0^2 \int_0^\infty Q_1(k) dk + \eta(t)^{2/3} \int_{k^*/k_d(t)}^\infty Q_2(k) dk \\ &\sim Q_0 + A \eta^{2/3}(t) \left[\ln \left(\frac{k_d(t)}{\sqrt{2A} k_r} \right) - \gamma \right] \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで $Q_0 = \varepsilon k_0^2 \int_0^\infty Q_1(k) dk$, $\gamma \approx 0.577$ (Euler 定数)。

(6.2) を t で微分して得られる $\eta(t)$ の微分方程式より

$$\eta(t)^{1/3} \sim \frac{2A}{t-t_0} \left[\ln \frac{\eta^{1/6}}{\sqrt{2A} k_*} - \gamma + \frac{3}{4} \right] \quad (6.3)$$

を得る (ここで k_* は定数とした。 t_0 は積分定数)。従って

$$\eta(t) \sim \frac{\text{const}}{(t-t_0)^3} \quad (6.4)$$

数値計算で得られた $\eta(t)$ を用いて、図13に $\eta(t)^{-1/3}$ を描いた。時間は Case II, III, IV について各々 1.2, 2.2, 2.9 ずつずらしてあり、図中の直線は、

$$\eta(t)^{1/3} = 10 / (t - T^{(A)} + T^{(I)} + 7.8) \quad (6.5)$$

を表わす。いま $\lambda \sim 1.6$, $\eta(t) \sim 0.1$, $k_* \sim 10$ を (6.3) に代入すれば (Case I ~ IV 各々について (6.5) の係数が 10.7, 8.5, 6.3, 4.1 となり、(6.5) との一致は高 Reynolds 数の場合程良い。

7. おわりに

従来行なわれてきた多くの2次元乱流の数値実験では、 k^{-3} よりも傾きの大きい k^{-4} あるいは k^{-5} のエネルギー・スペクトルが観察されてきた。今回報告した数値実験、特にここで導入した二相領域モデルはこの傾きの大きなスペクトルに2つの可能な理由を与える。第一に、普遍領域のスペクトルは非

常に高い Reynolds 数で"はじめて実現されるため、低い Reynolds 数の 数値実験では低波数領域のスペクトル $Q_1(k)$ が全領域をおおってしまい、そのため高い波数で $E(k) \sim k^{-4}$ 又はより傾きの大きいスペクトルが現われる。第二に、普遍領域のスペクトルが実現したとしても、指数因子((5.5)を参照)のために見かけの中が-3より傾いたものになる。実際見かけの中 $\hat{n}(k/k_d)$ は(5.5)を用いると、

$$\hat{n}(k/k_d) \equiv -\frac{\partial \ln E}{\partial \ln k} = 3 + \sqrt{2\tilde{\alpha}} k/k_d \quad (6.6)$$

となり、 $\tilde{\alpha} = 1.6$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} \hat{n}(1.1) &\sim 5, \hat{n}(0.6) \sim 4, \hat{n}(0.1) \sim 3.2 \\ \hat{n}(0.01) &\sim 3.02 \end{aligned} \quad (6.7)$$

が得られる。従って、例えば見かけの中が1%以下の誤差で-3となるためには、普遍領域の下端が0.01以下でなければならぬがこれは非常に大きな波数領域を必要とする。

Batchelor (1969) は相似性の議論を用いてインストロフイー減衰則 $1/\tau^2$ を導いた。しかし数値実験では、エネルギー逆カスケードによつて最低波数付近にエネルギーが蓄積するため、インストロフイーの時間変化が汚され、純粹な代数的減衰則を得るのが難しい。ここに報告した数値計算では、インストロフイーは、最低波数付近の寄与による定数項と、

$1/l^2$ で減衰する項の和として表現することができ、この減衰則は、我々の二相似領域モデルから得られるものと一致した。

文献

- Batchelor, G.K. 1969 Phys. Fluids 12 Suppl. II 233
- Brachet, M.E. and Sulem, P.L. 1985
Lecture Notes in Physics (Springer) 218 103
- Deem, G.S. and Zabusky, N.J. 1971
Phys. Rev. Lett. 27 396
- Desbois, M. 1975 J. Atmos. Sci. 32 1838
- Herring, J.R., Orszag, S.A., Kraichnan, R.H. and
Fox, D.G. 1974 Phys Rev. A23 2673
- Julian, P.R., Washington, W.M., Hembree, L. and
Ridley, C. 1970 J. Atmos. Sci. 27 376
- Kida, S. 1985 J. Phys. Soc. Japan 54 2840
- Kowalski, A.D. and Peskin, P.L. 1981
J. Fluid Mech. 109 45
- Kraichnan, R.H. Phys. Fluids 10 1417
- Leith, C.E. 1968 Phys. Fluids 11 671
- Lilly, D.K. 1969 Phys. Fluids 12 Suppl. II, 240
- McWilliams, J.C. 1984 J. Fluid Mech. 146 21
- Orszag, S.A. 1976
Lecture Notes in Physics (Springer) 59 32
- Saffman, P.G. 1971 Stud. Appl. Math. 50 377

Satofuka, N. 1982 Proc. Intern. Symp. Appl. Math.

Inform. Sci, Kyoto Univ. 5-7-5-14

Wiin-Nielsen, A. 1967 Tellus 19 540

Yamamoto, K. 1984 J. Phys. Soc. Japan 53 4094

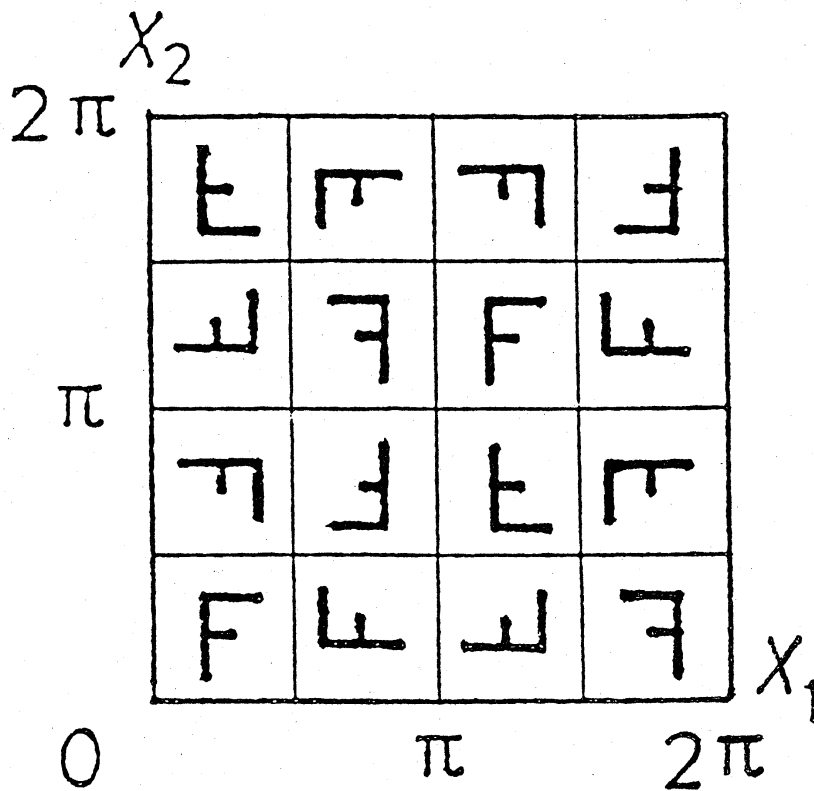
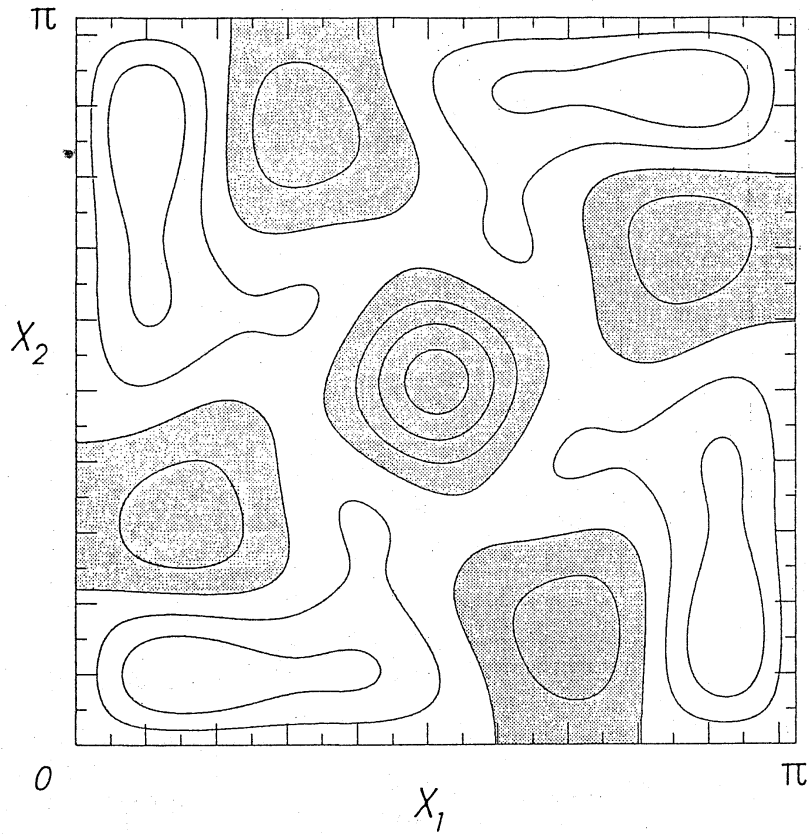


図1 速度場の対称性

(a)
t=0



(b)
t=2

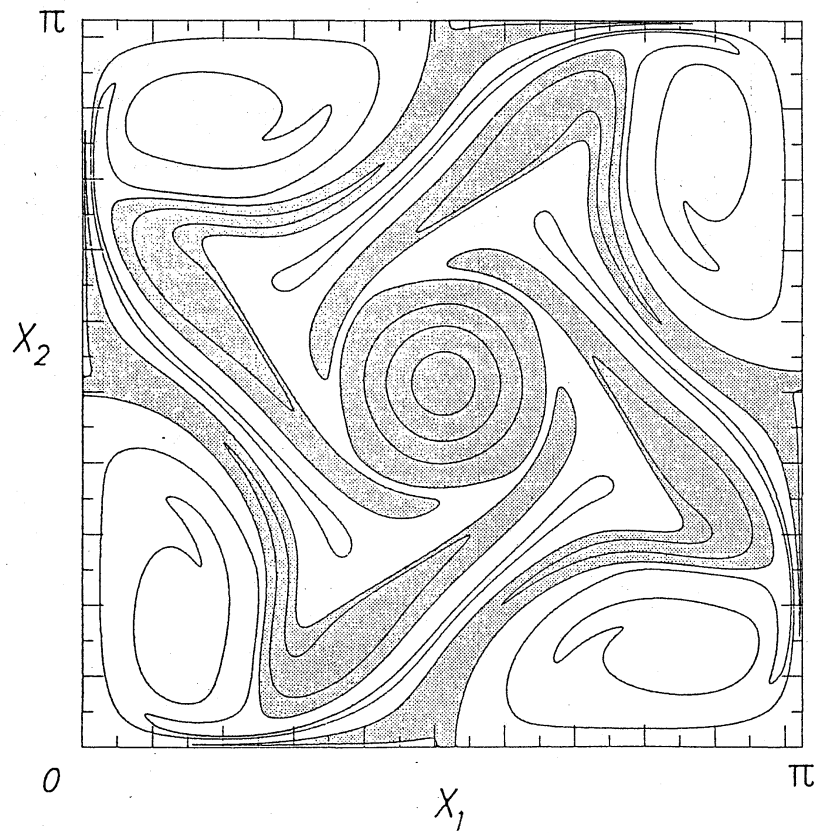


図2 渦度場の時間発展 (Case II)
影の領域は正の渦度を表す
レベルは -6, -3, 0, 3, 6, 9
25

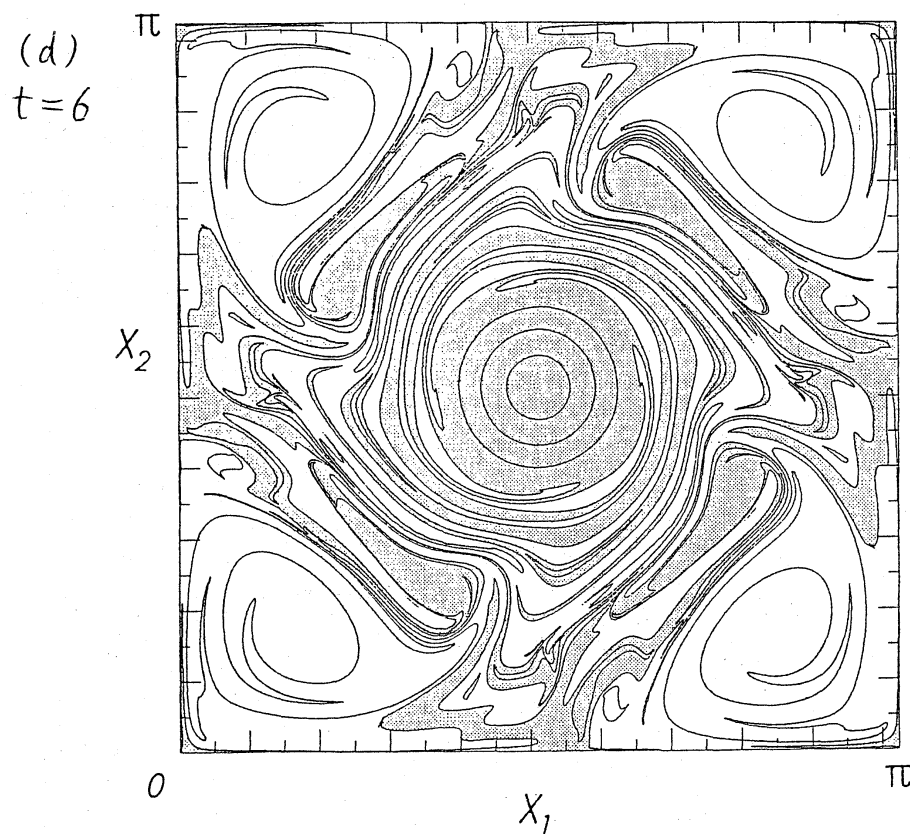
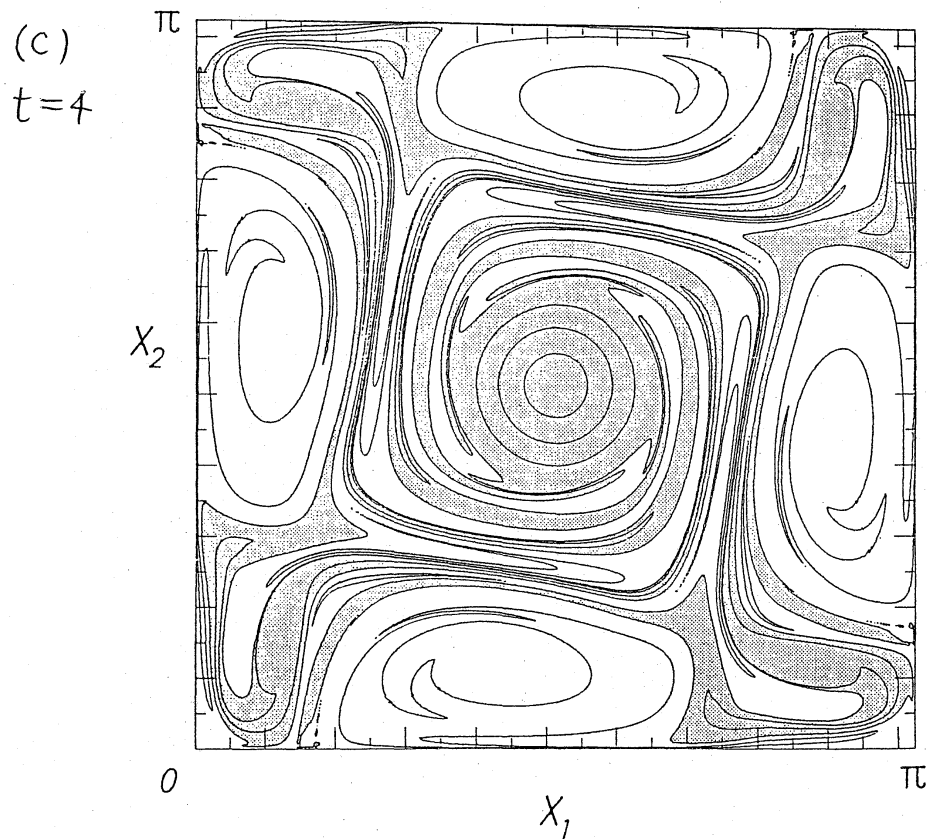


図2 (つづき)

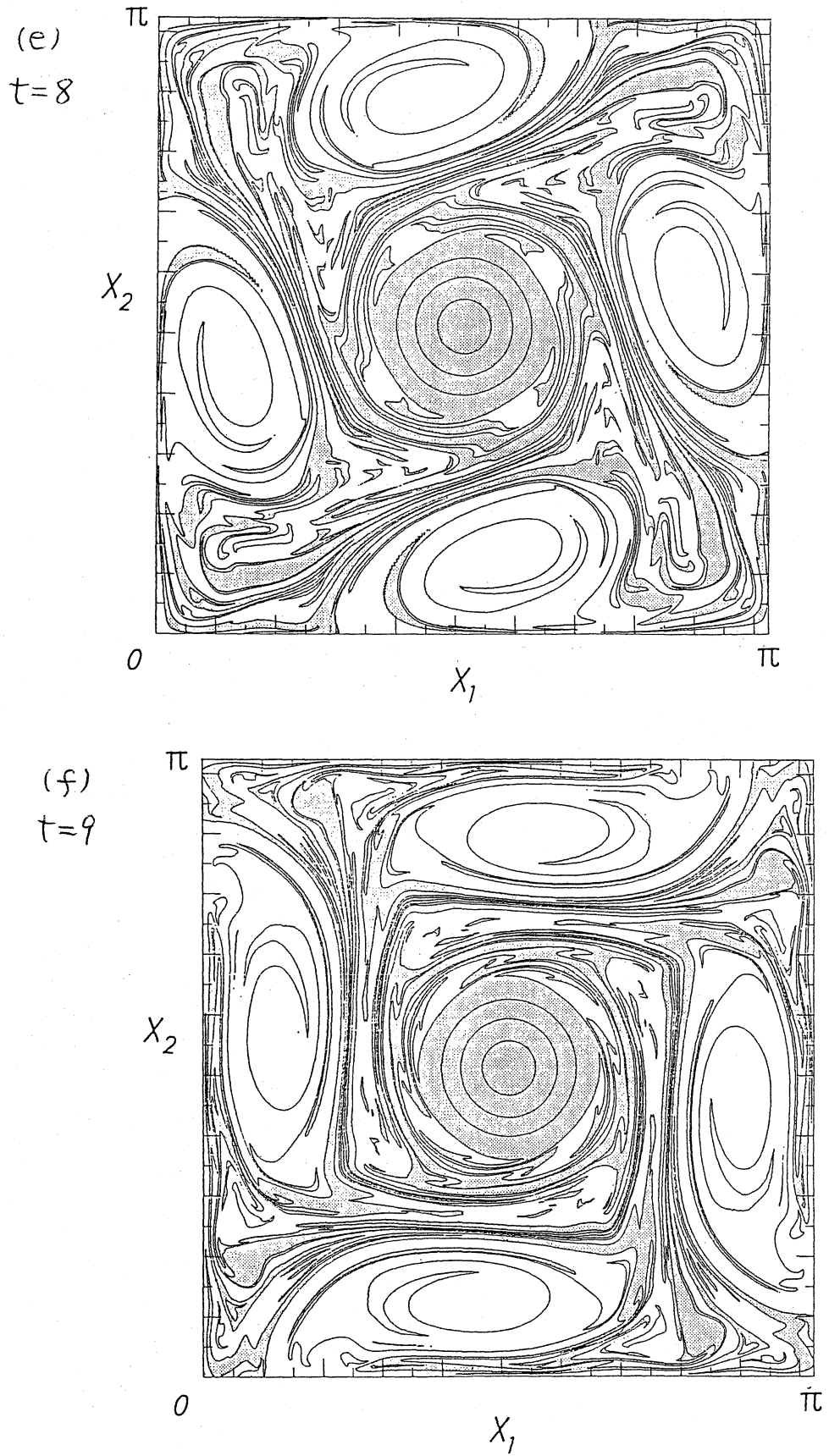


図2 (つづき)

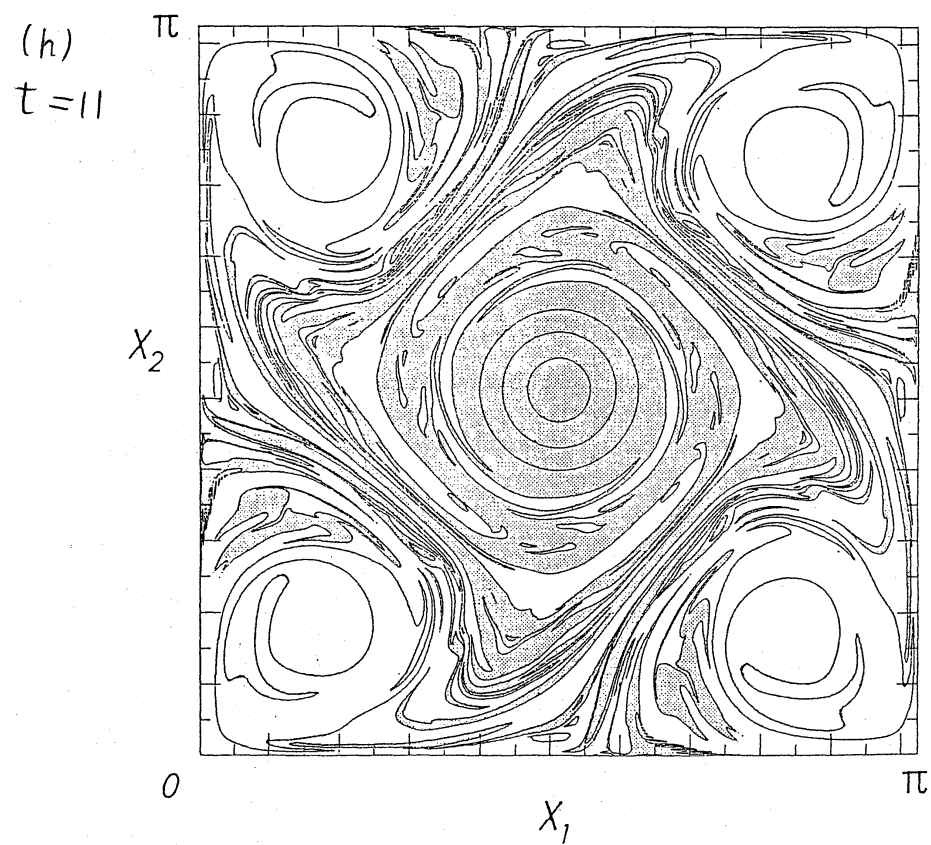
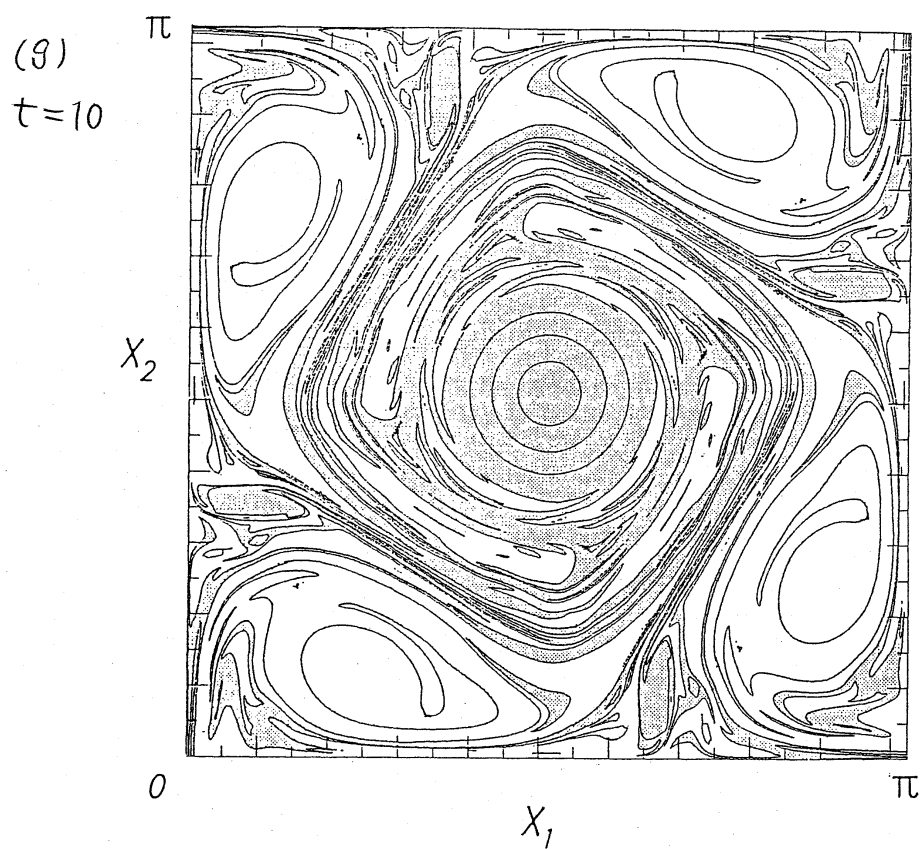


図2 (つづき)

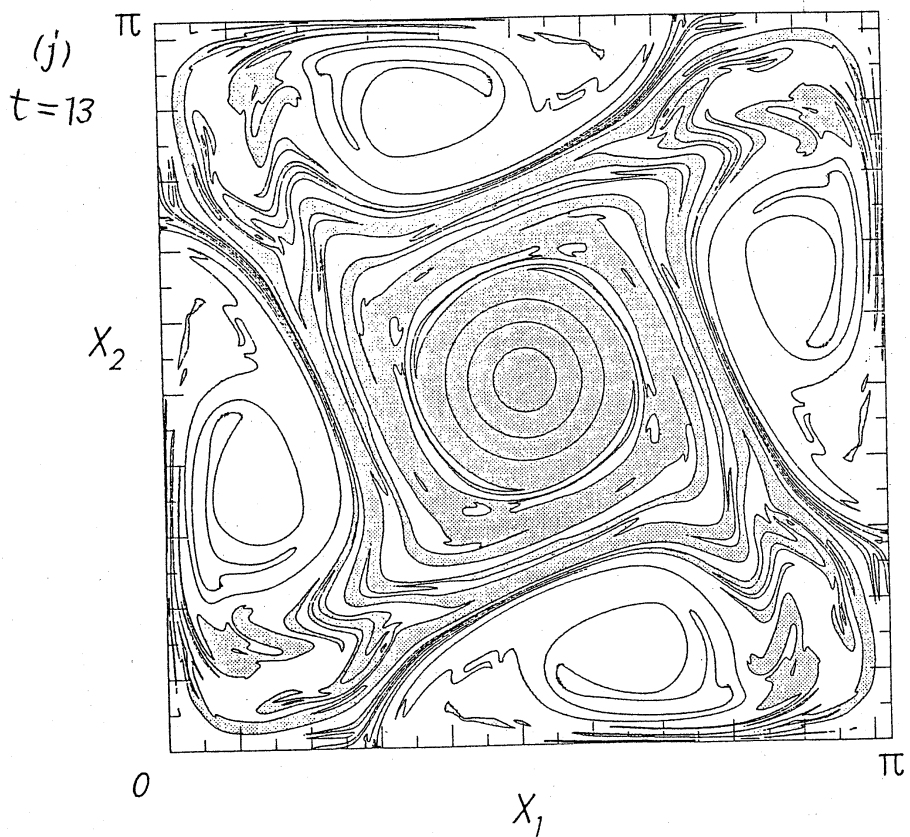
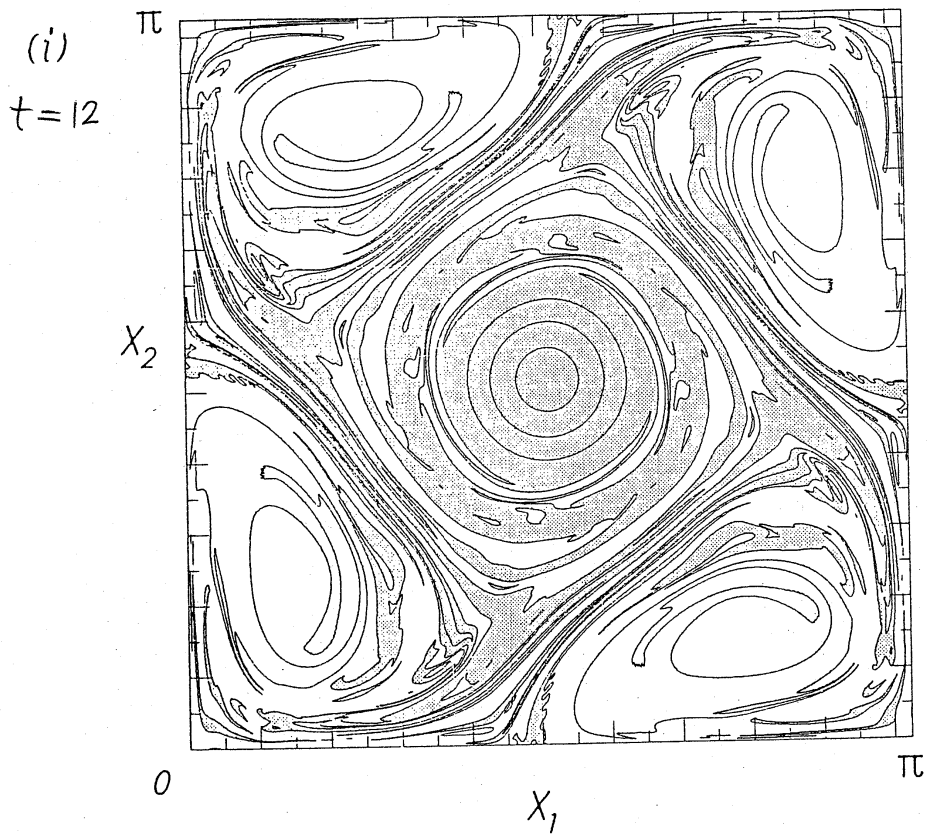


図2 (フグキ)

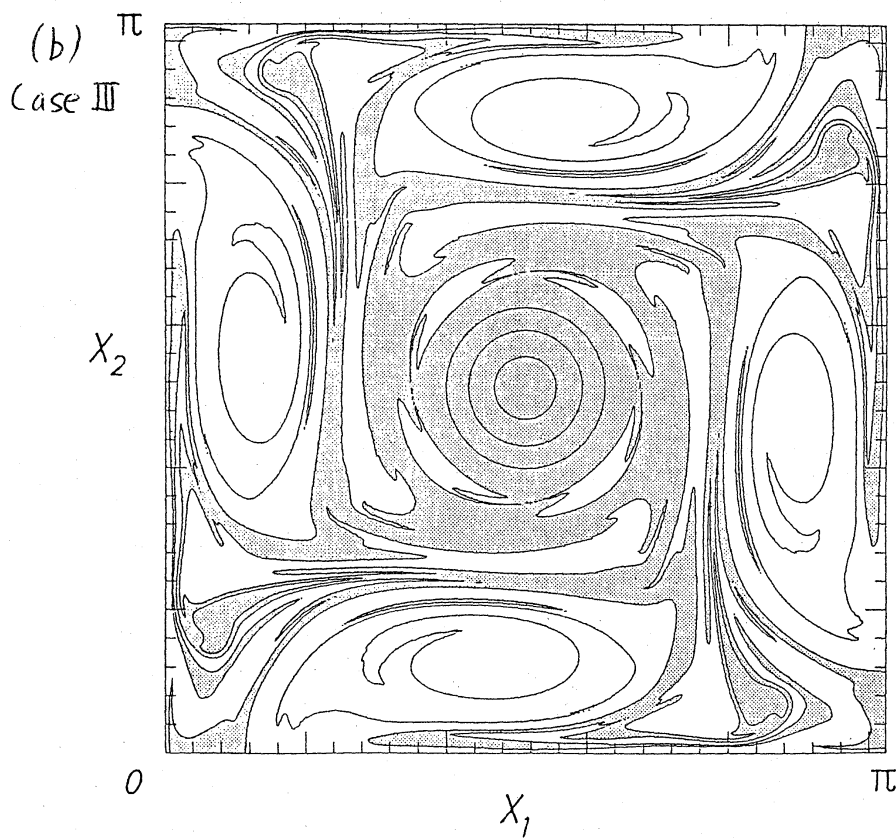
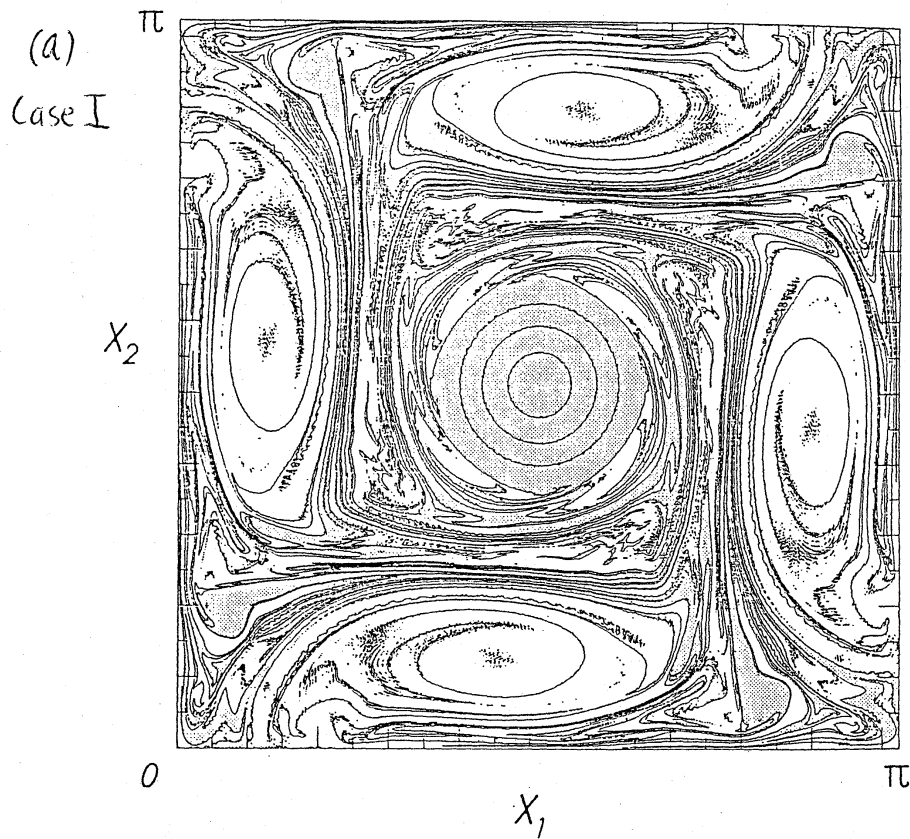


図3 $t=9$ における渦度場
影の領域は正の渦度を表す
レベルは $-6, -3, 0, 3, 6, 9$
30

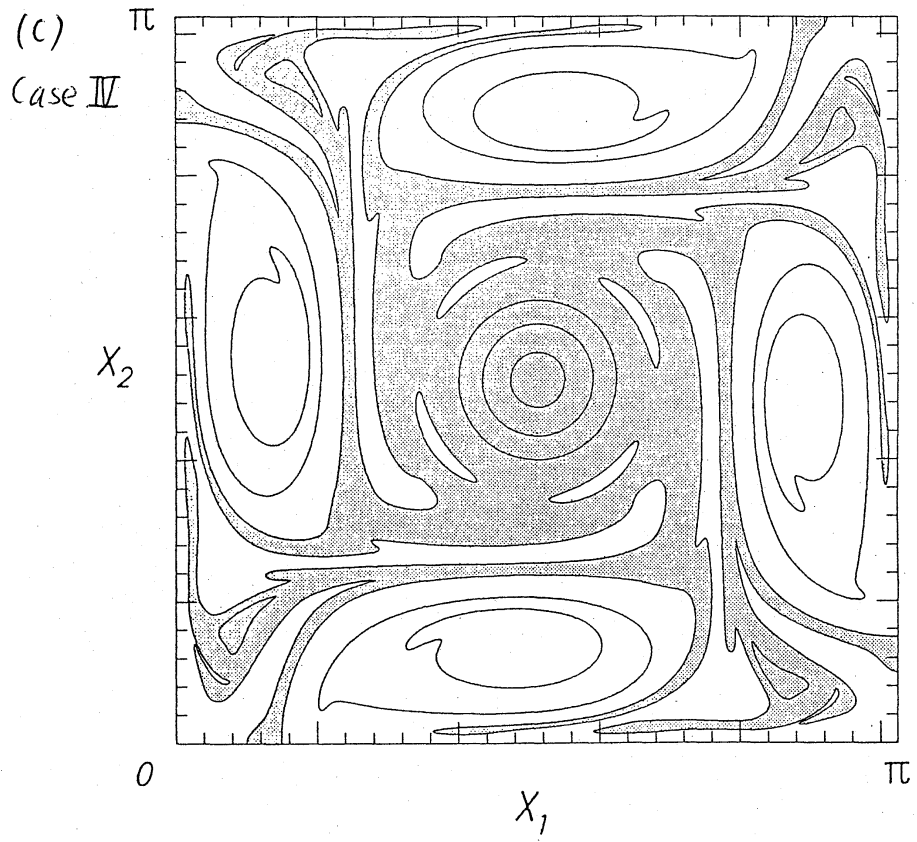


図3 (つつき)

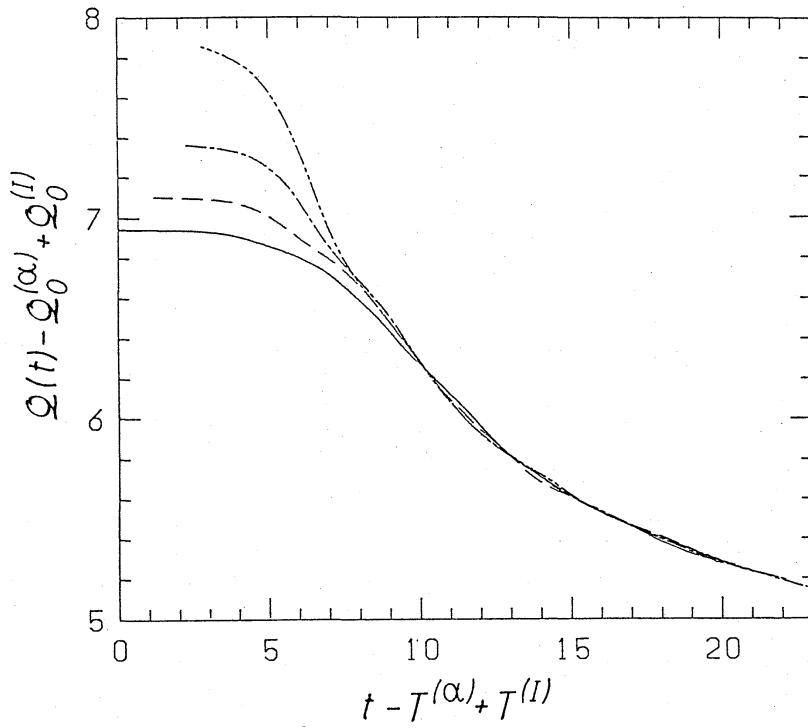


図4 インストロフイ-減衰曲線

Case I ——— Case II - - - -
Case III - · - · Case IV · · · ·

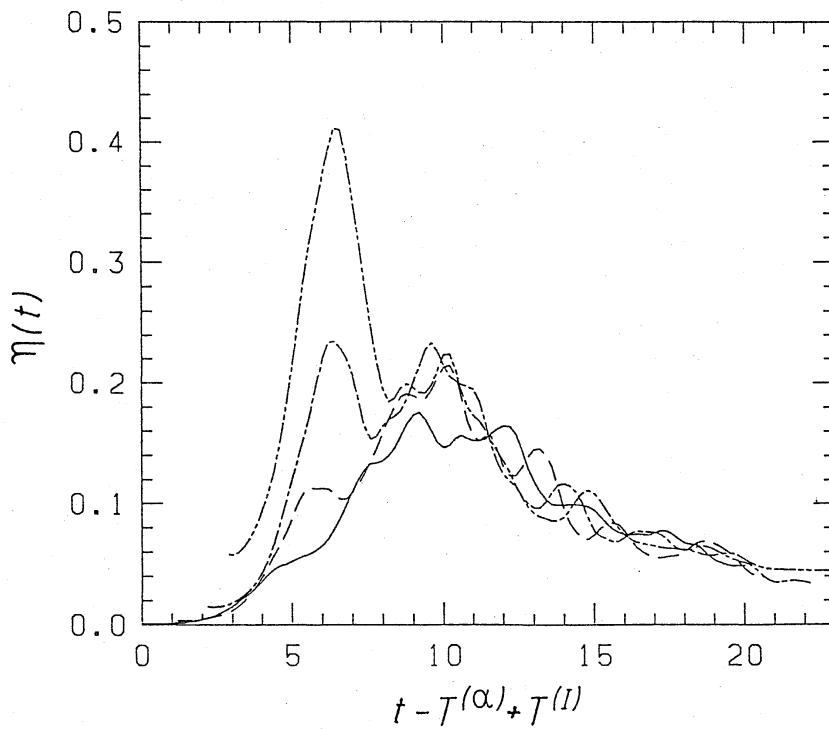


図5 インストロフイ-散逸率

Case I ——— Case II - - - -
Case III - · - · Case IV · · · ·

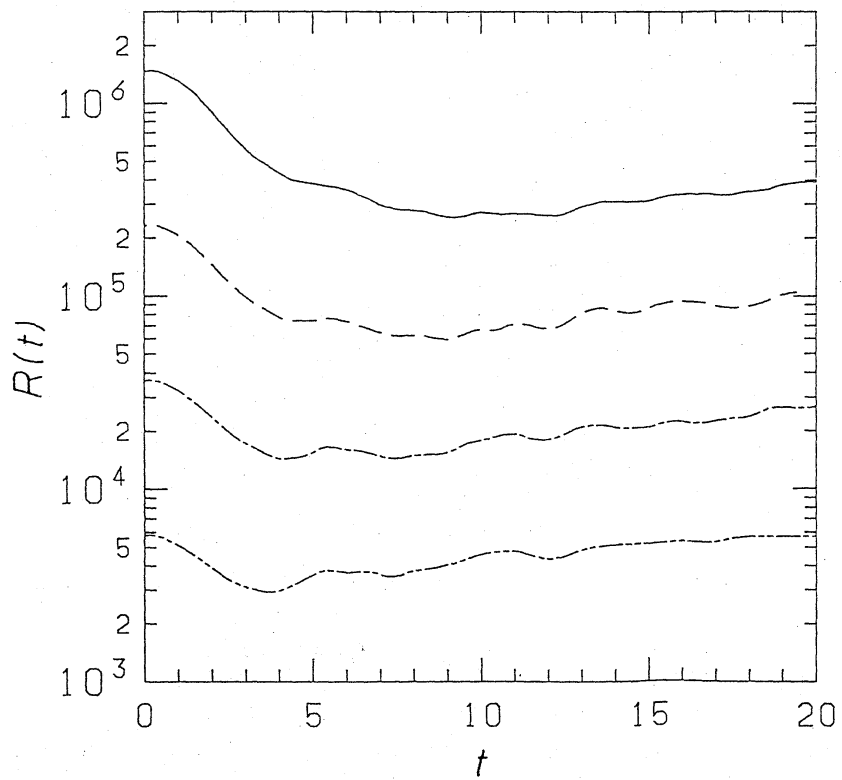


図6 Reynolds 数の時間変化

Case I ——— Case II — — — —
 Case III — · — Case IV — · — · —

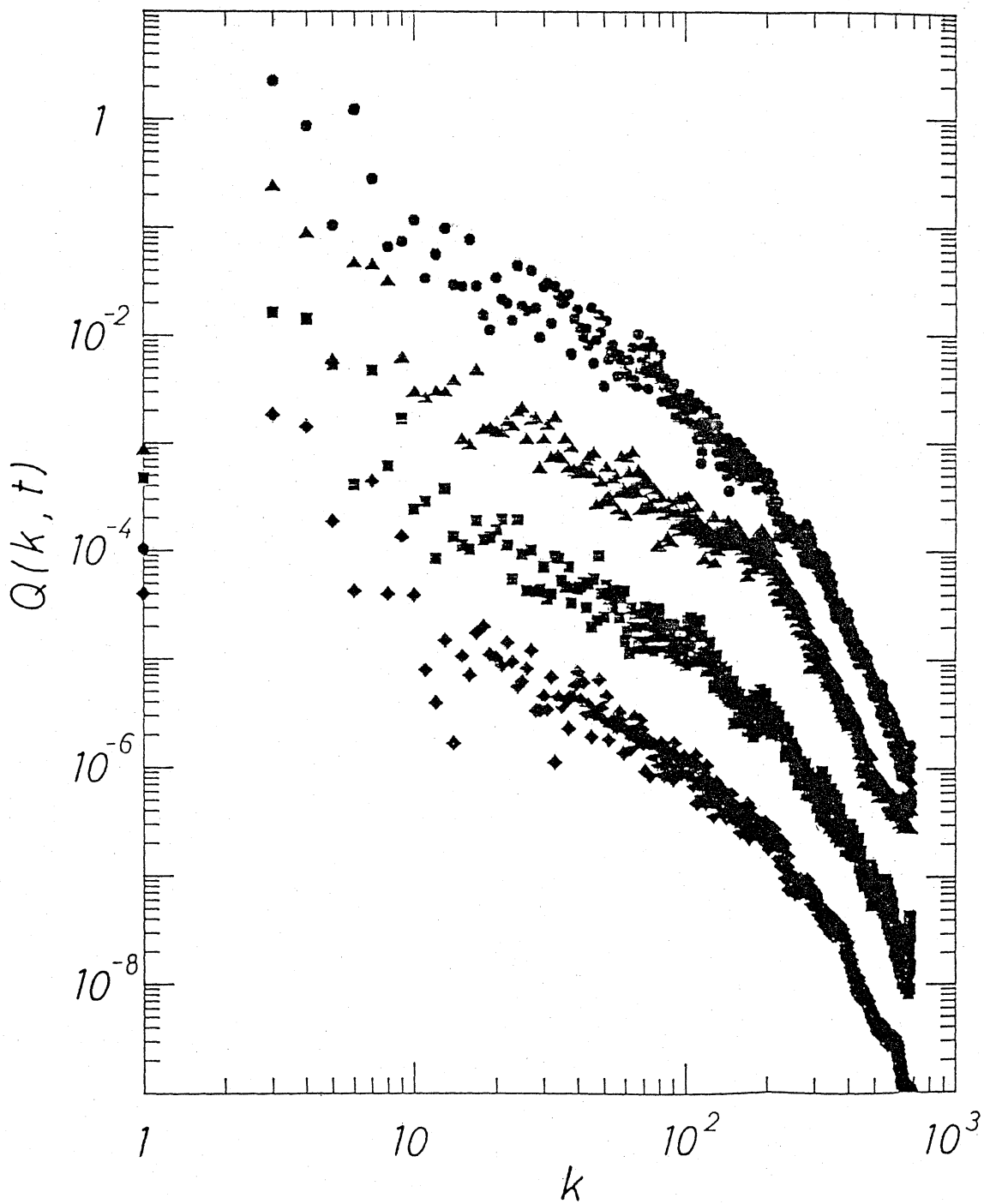


図 7 インストロフイー・スペクトル (Case II)

- , $t=6$
- ▲, $t=10$
- , $t=14$
- ◆, $t=18$

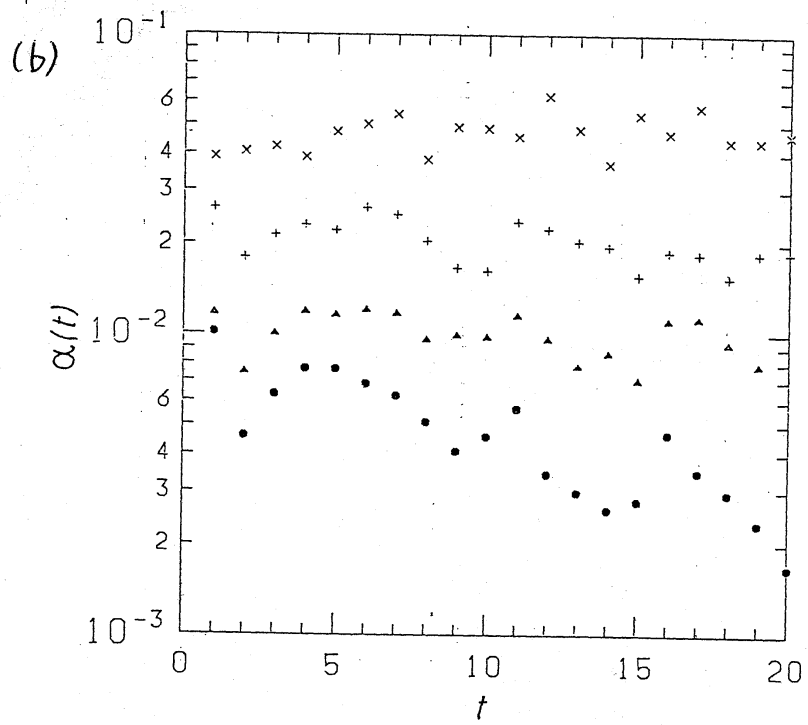
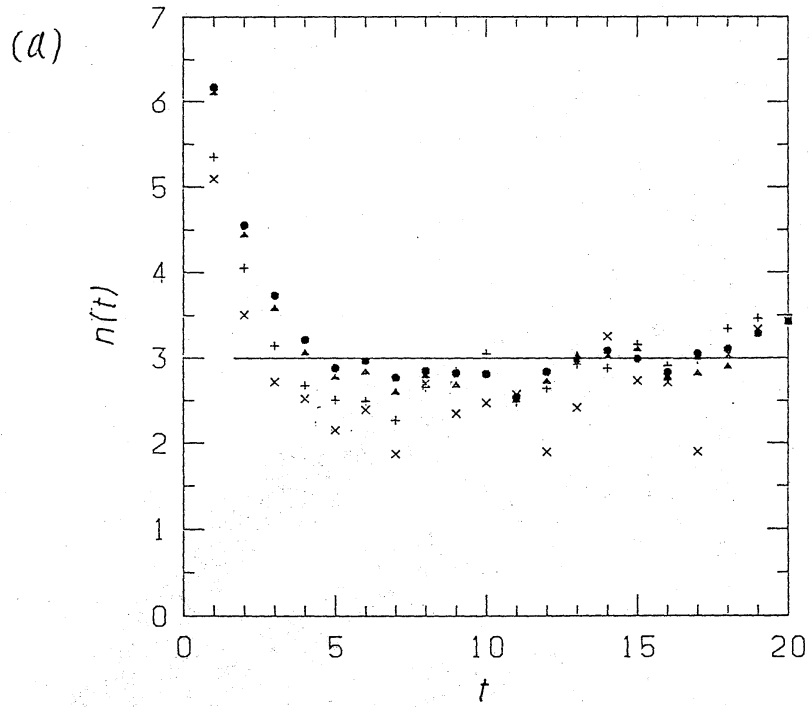


図8 $n(t)$ 及び $\alpha(t)$ の時間変化
 共に Case I, ●; Case II, ▲;
 Case III, +; Case IV, ×

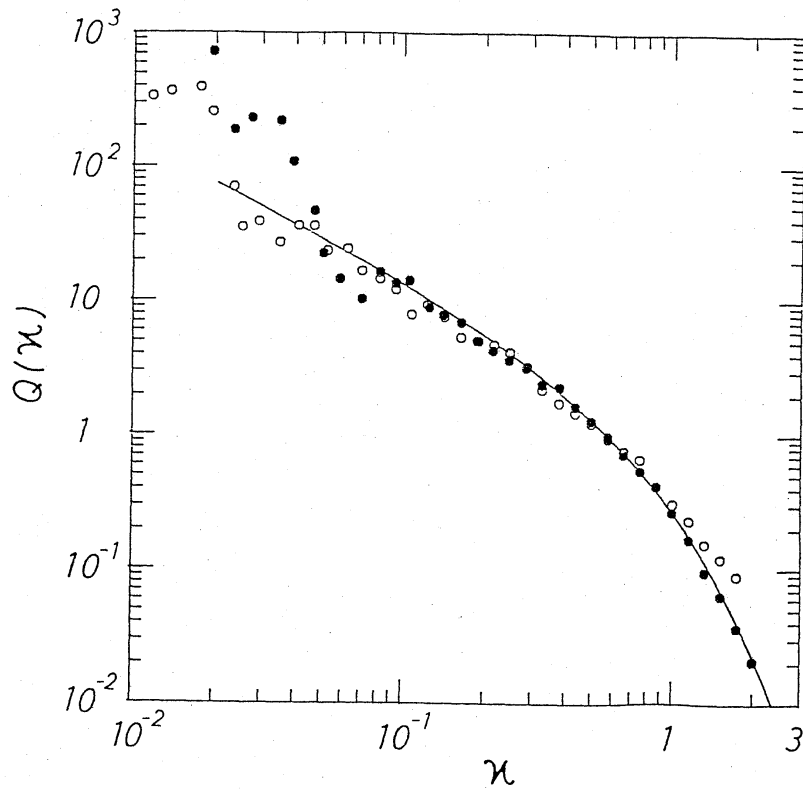


図9 無次元化スペクトル

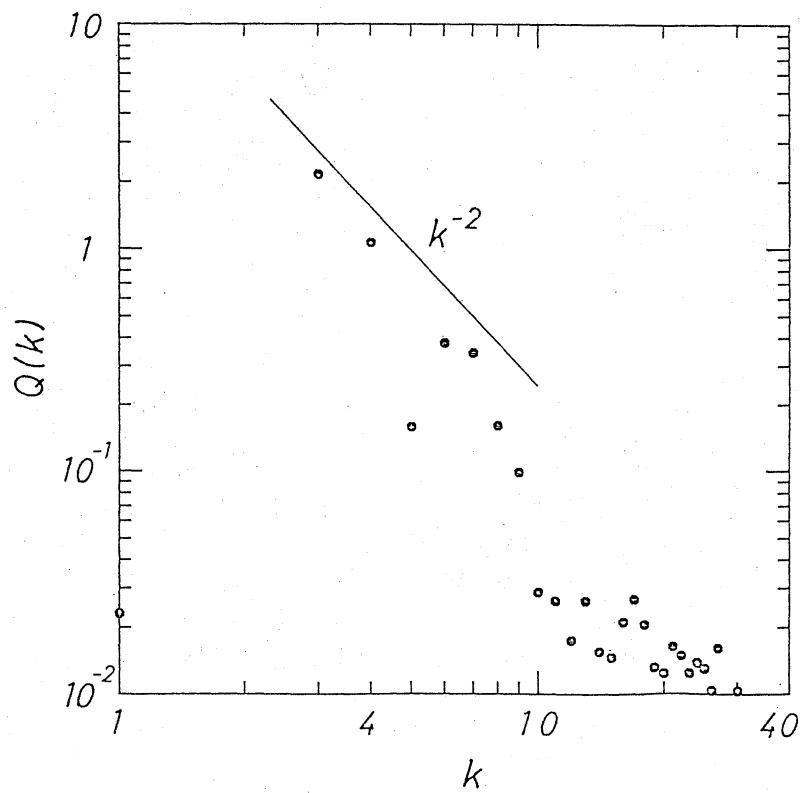


図10 低波数領域のスペクトル

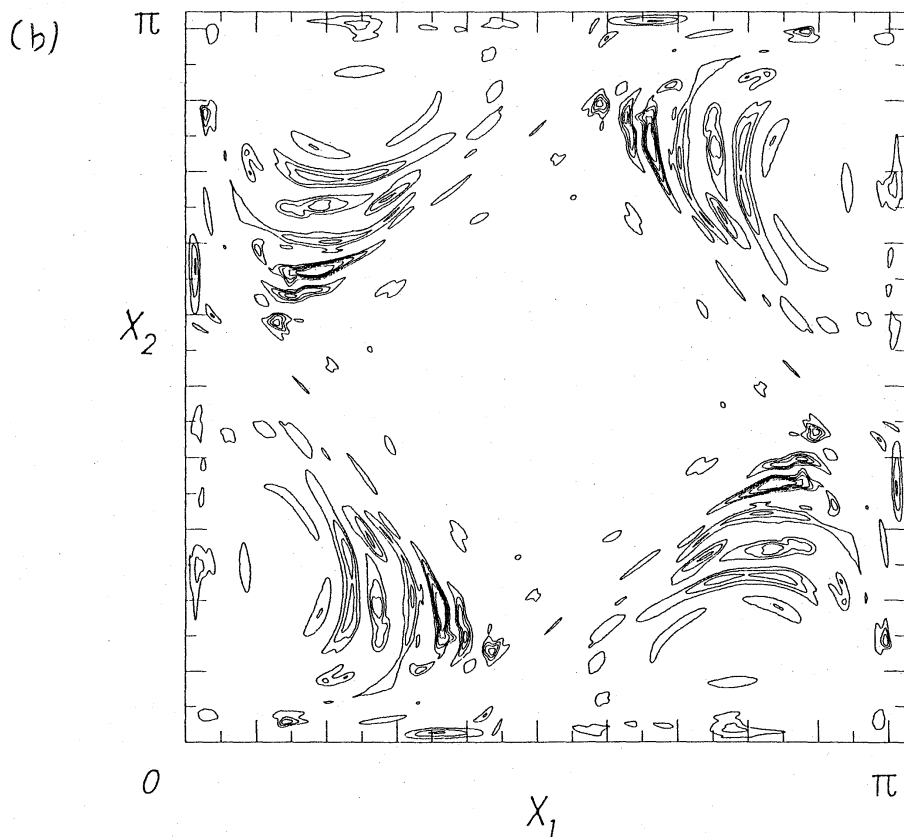
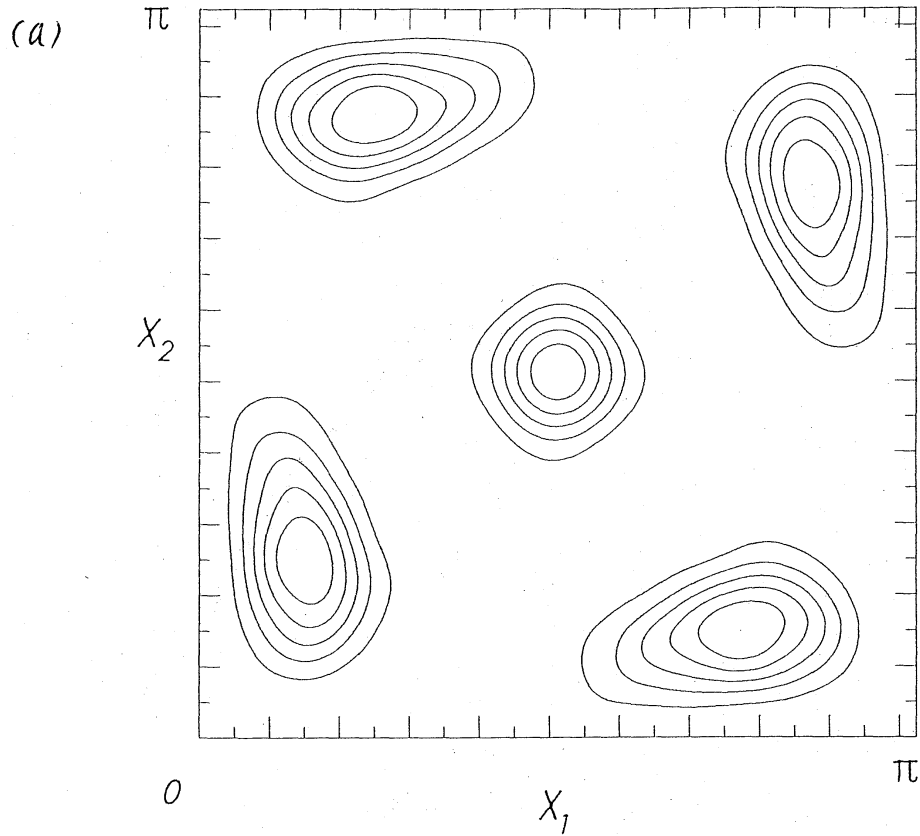
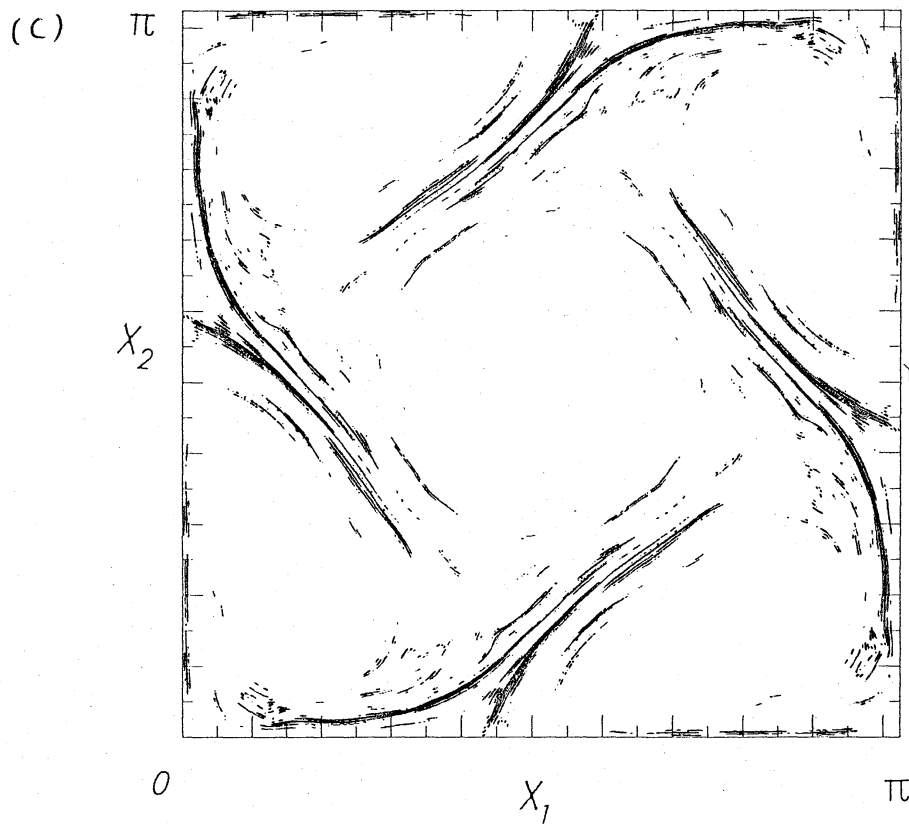


図 11 エネルギーの空間的局在 (Case I, $t=12$)

- (a) 低波数領域 ($k \leq 20$)
- (b) 慣性小領域 ($20 \leq k \leq 200$)
- (c) 散逸領域 ($200 \leq k$)



L^{∞} ノルムは (a) 0.65, 1.3, 1.9, 2.6, 3.2, 3.8
 (b) 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12
 (c) 2.7×10^{-5} , 5.5×10^{-5} , 8.2×10^{-5} ,
 1.1×10^{-4} , 1.4×10^{-4} , 1.6×10^{-4}

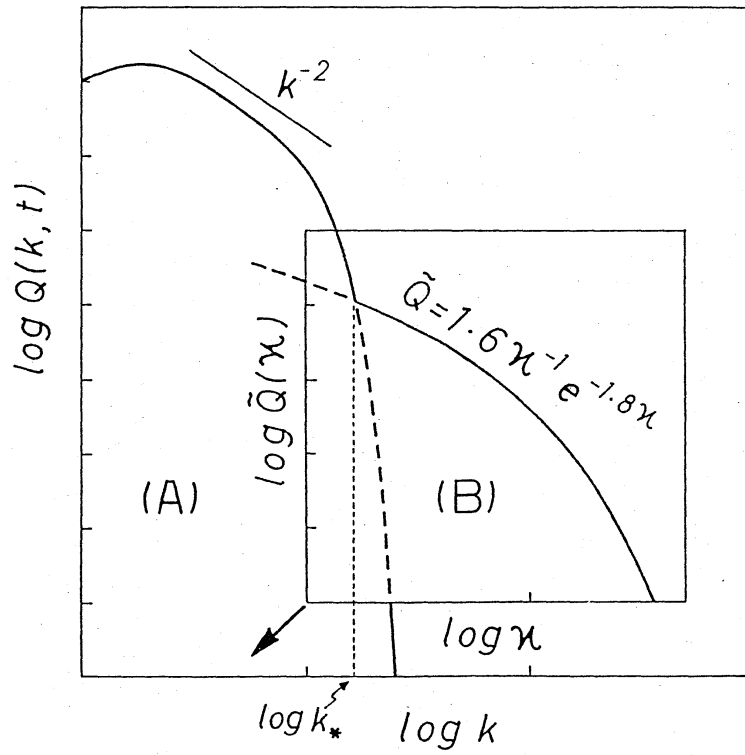


図12 相似領域モデル

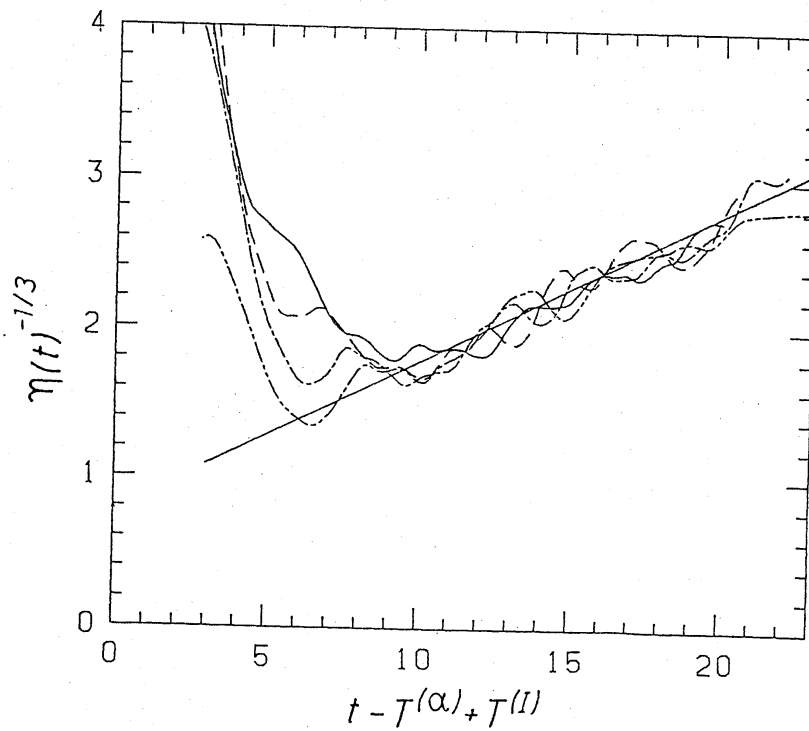


図13 $\eta(t)^{-1/3}$ の時間変化

Case I ——— Case II - - - -
 Case III - · - - Case IV - · - -