数理解析研究所講究録
606巻 1987年 36-59

3次元渦運動のギ正準形式とヴォートン解析

名大工 桑原真二 (Sinzi Kuwabara)

§1. まえおき

こゝでは縮まない、粘性のない流体の3次元渦運動を考える。このような運動においては、位置ベクトル、渦度の対応する成分を共役正準座標にとり、その系のヘリシティーの半分をハミルトニアンとするとギ正準形式に書けることを示す。[5] 対をなす通常の正準方程式の右辺の符号が正負になるのに対し、ギ正準形式のそれは共に正となる。

このギ正準方程式から近似的にヴォートンの方程式を導出する。渦糸の切断と再結合には粘性の効果が必要である。数値積分において、空間、時間メッシュの分割から人工粘性が生ずるように、ヴォートン分割がそのような効果をもつと考えても全く不合理ではなかろう。そこで渦の切断、再結合をヴォートン近似によって可能であると考えられる。

§2. 3次元渦運動のギ正準形式

無限に広い領域での縮まない、粘性のない流体の渦運動

は、Lagrange座標 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ と時刻 t を独立変数とする位置ベクトル $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$ $(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},0)=\boldsymbol{a})$, 渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a},t)$ を用いて

$$\frac{D\boldsymbol{x}}{Dt}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}',t)\times\boldsymbol{r}\,d^3a' \qquad (2\cdot1)$$

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}=\boldsymbol{e}_\alpha\,\omega_\lambda\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\lambda} \qquad (\boldsymbol{e}_\alpha\text{：デカルト単位ベクトル})$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iiint\left[-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}')-\frac{3}{r^5}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}')\times\boldsymbol{r})\right]d^3a' \qquad (2\cdot2)$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}',t),\qquad r=|\boldsymbol{r}|$$

と書くことができる。こゝで $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},t)$ は流速ベクトルで渦度をもちいてBiot-Savartの法則で表わされている。ここでは無限遠からの効果はないと仮定されている。なお(2·2)又は以下では、和の略記号がもちいられる。(2·1)(2·2)は渦運動を論ずるのに完全に閉じた形式である。すなわち、$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a},t)$の初期条件 $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a},0)=0)$ を与えれば、以後の渦運動は完全に決定される。(2·2)は容易に

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}=\boldsymbol{e}_\alpha\,\omega_\lambda\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}')-\frac{3}{r^5}\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}')))\right]d^3a' \qquad (2\cdot2')$$

と書きなおすことができる。

こゝで汎関数微分を考える。Iが1変数 x の関数 $f(x)$ の汎関数、すなわち $I=I[f(x)]$ であるとき、$f(x)$ を少し変化

させ $f(x)+\delta f(x)$ としたとき、I の変化 δI が

$$\delta I = I[f(x)+\delta f(x)] - I[f(x)]$$
$$= \int A(x)\,\delta f(x)\,dx + O(\delta f^2) \qquad (2.3)$$

と表わされるとき、$A(x)$ を I の $f(x)$ による汎関数微分といい

$$A(x) = \frac{\delta I}{\delta f(x)} \qquad (2.4)$$

と表わす。f が変数 $x_1, \cdots, x_L$ の関数であるばあいには、対応する式は

$$\delta I = I[f(x_1,\cdots,x_L)+\delta f(x_1,\cdots,x_L)] - I[f(x_1,\cdots,x_L)]$$
$$= \int\cdots\int A(x_1,\cdots,x_L)\,\delta f(x_1,\cdots,x_L)\,d^Lx + O(\delta f^2) \qquad (2.3')$$

$$A(x_1,\cdots,x_L) = \frac{\delta I}{\delta f(x_1,\cdots,x_L)} \qquad (2.4')$$

又、多変数関数の多数の関数 $f_1(x_1,\cdots,x_L), \cdots, f_M(x_1,\cdots,x_L)$ の汎関数のばあいは

$$\delta I = I[f_1+\delta f_1, \cdots, f_M+\delta f_M] - I[f_1,\cdots,f_M]$$
$$= \int\cdots\int \sum_{m=1}^{M} A_m(x_1,\cdots,x_L)\,\delta f_m(x_1,\cdots,x_L)\,d^Lx + O(\delta f^2) \qquad (2.3'')$$

$$A_m(x_1,\cdots,x_L) = \frac{\delta I}{\delta f_m(x_1,\cdots,x_L)} \qquad (2.4'')$$

となる。

今

$$I = \int F(f(x))\,dx \qquad (2.5)$$

の形の汎関数の場合には

$$\delta I = \int F(f+\delta f)\,dx - \int F(f)\,dx$$
$$= \int \frac{\partial F}{\partial f}\,\delta f(x)\,dx + O(\delta f^2)$$

となるので

$$\frac{\delta I}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} \qquad (2.6)$$

である。

$\mathbf{x}(\mathbf{a})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a})$ の汎関数 $H[\mathbf{x},\boldsymbol{\omega}]$ を

$$H[\mathbf{x},\boldsymbol{\omega}] = \frac{1}{8\pi}\iiint\!\!\iiint \frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}')\cdot(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}'')\times\mathbf{r})\,d^3a'\,d^3a''$$
$$= \frac{1}{8\pi}\iiint\!\!\iiint \frac{1}{r^3}\,\epsilon_{\lambda\beta\gamma}\,\omega_\lambda(\mathbf{a}')\,\omega_\beta(\mathbf{a}'')\,r_\gamma\,d^3a'\,d^3a'' \qquad (2.7)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}(\mathbf{a}',t) - \mathbf{x}(\mathbf{a}'',t)\,, \qquad r = |\mathbf{r}|$$

と定義すると

$$\frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(\mathbf{a})} = \frac{1}{8\pi}\iiint \frac{1}{r^3}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta(\mathbf{a}'')\,(x_\gamma(\mathbf{a}) - x_\gamma(\mathbf{a}''))\,d^3a''$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\iiint \frac{1}{r^3}\,\epsilon_{\lambda\alpha\gamma}\,\omega_\lambda(\mathbf{a}')\,(x_\gamma(\mathbf{a}') - x_\gamma(\mathbf{a}))\,d^3a'$$
$$= \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r^3}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta(\mathbf{a}')\,r_\gamma(\mathbf{a},\mathbf{a}')\,d^3a'$$
$$= \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r^3}\,[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}')\times\mathbf{r}]_\alpha\,d^3a' \qquad (2.8)$$

$$\frac{\delta H}{\delta x_\alpha(\mathbf{a})} = \frac{1}{4\pi}\iiint \Big(\frac{1}{r^3}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta(\mathbf{a})\,\omega_\gamma(\mathbf{a}')$$
$$- \frac{3}{r^5}\,r_\alpha(\mathbf{a},\mathbf{a}')\,\omega_\lambda(\mathbf{a})\,\epsilon_{\lambda\beta\gamma}\,\omega_\beta(\mathbf{a}')\,r_\gamma(\mathbf{a},\mathbf{a}')\Big)\,d^3a'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{1}{r^3} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}') - \frac{3}{r^5} \boldsymbol{r} \left(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}') \times \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}')) \right) \right] d^3 a' \qquad (2\cdot9)$$

をうる。(2·8), (2·9) を (2·1), (2·2) と比較することによって

$$\frac{D x_\alpha}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha} \qquad (2\cdot10)$$

$$\frac{D \omega_\alpha}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta x_\alpha} \qquad (2\cdot11)$$

をうる。これらの右辺のいずれかに負号がつけば通常の正準形式となる。そこでこの場合にはぎ正準形式 pseud-canonical formulation と呼ぶことにする。

ヘリシティー $Hl(t)$ を

$$Hl(t) = \iiint \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)\, d^3 x$$

$$= \iiint \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}, t)\, d^3 a$$

と定義すれば、(2·1) より

$$Hl(t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \iiint \frac{1}{r^3} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}, t) \cdot (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{a}', t) \times \boldsymbol{r})\, d^3 a\, d^3 a' \qquad (2\cdot12)$$

となり、(2·7) はヘリシティーの半分であることがわかる。

§3. ぎ正準形式からヴォートン近似の導出

今コンパクトな渦の場（$\boldsymbol{\omega} \neq 0$ の領域の閉包が有界、閉

集合）を考え、これを細胞に分割し，$l=1,\cdots,L$ と名前をつけ、各々を力学系の単位として近似する。特性関数

$$\Lambda^3(a,l) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & a \in l\text{-細胞} \\ 0, & a \notin l\text{-細胞} \end{array} \right\} \qquad (3.1)$$

を定義する。そこで

$$\iiint \Lambda^3(a,l)\, d^3a = V(l) \qquad (3.2)$$

は l 細胞の体積で、時間的に一定である。後に細胞の分裂を考えるから厳密には分裂（あるいは初期）から次の分裂の間体積は保存する。

細胞の運動を考える時、細胞の広がった位置ベクトル $x(a,t)$ $(a\,/\,\Lambda^3(a,l)=\ )$ を１つの位置ベクトル $X_\alpha(l,t)$ で表わし、渦度 $\omega(a,t)$ は $X_\alpha(l,t)$ に集中しているとして

$$x_\alpha(a,t) = \sum_l X_\alpha(l,t)\, \Lambda^3(a,l) \qquad (3.3)$$

$$\omega_\alpha(a,t) = \sum_l \Omega_\alpha(l,t)\, V(l)\, \delta^3(a - A(l)) \qquad (3.4)$$

$$X_\alpha(l,t) = x_\alpha(A(l),t) \qquad (3.5)$$

と近似する。(3.4) の $V(l)$ は Ω_α が渦度の次元をもつように入れたものである。このように渦場を細胞に分割し、単一の位置ベクトル $X(l,t)$ と渦度ベクトル $\Omega(l,t)$ で表わすことによって、無限連續自由度の力学系を可附番自由度の力学系で近似する方法をヴォートン・モデルとよぶことにする。

(2·7)のHのx, ωに(3·3), (3·4)の近似式を代入し、積分を実行すれば、Hは$X(l,t)$, $\Omega(l,t)$の関数とみなしうる。そこでX, Ωについて1次の変分をとれば

$$\delta H = \sum_l \left(\frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \delta X_\alpha(l) + \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \delta \Omega_\alpha(l) \right) \qquad (3\cdot6)$$

をうる。又、Hのx, ωについての1次の変分をとれば

$$\delta H = \iiint \left(\frac{\delta H}{\delta x_\alpha(a)} \delta x_\alpha(a) + \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta \omega_\alpha(a) \right) d^3 a \qquad (3\cdot7)$$

となる。更に$\delta x_\alpha(a)$, $\delta \omega_\alpha(a)$を(3·3), (3·4)をもちいて

$$\left.\begin{aligned} \delta x_\alpha &= \sum_l \delta X_\alpha(l,t)\, \Lambda^3(a,l) \\ \delta \omega_\alpha &= \sum_l \delta \Omega_\alpha(l,t)\, V(l)\, \delta^3(a - A(l)) \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot8)$$

と近似すれば、(3·7)は

$$\delta H = \sum_l \Big[\iiint \frac{\delta H}{\delta x_\alpha(a)} \Lambda^3(a,l)\, d^3 a\, \delta X_\alpha(l,t)$$
$$+ \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta^3(a - A(l))\, d^3 a\, V(l)\, \delta \Omega_\alpha(l,t) \Big] \qquad (3\cdot9)$$

となる。こゝまで(3·6)と(3·9)は2つの異ったルートをたどってHの変分の近似を行ったわけであるが、この両者が一致しなければならないという条件(両立条件)を課せば

$$\frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta x_\alpha(a)} \Lambda^3(a,l)\, d^3 a \qquad (3\cdot10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta^3(a - A(l))\, d^3a\, V(l) \qquad (3.11)$$

が成立つ。

逆に(2.10), (2.11) において x_α, ω_α に(3.3), (3.4) の近似をもちいた場合の対応する方程式を求める。(3.10), (3.11) の右辺の形から (2.10) に $\iiint d^3a\, \delta^3(a - A(l))\, V(l)$ の、(2.11) に $\iiint d^3a\, \Lambda^3(a, l)$ のオペレーションをほどこすと両者の右辺はたゞの偏微分で表わされる。すなわち

$$\iiint \frac{Dx_\alpha}{Dt} \delta^3(a - A(l))\, d^3a\, V(l) = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \qquad (3.12)$$

$$\iiint \frac{D\omega_\alpha}{Dt} \Lambda^3(a, l)\, d^3a = \frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \qquad (3.13)$$

をうる。左辺の積分を実行すると結局

$$\frac{DX_\alpha(l,t)}{Dt} = \frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \qquad (3.14)$$

$$\frac{D\Omega_\alpha(l,t)}{Dt} = \frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \qquad (3.15)$$

をうる。(2.7) に (3.3), (3.4) を代入し、積分を実行すると

$$H = \frac{1}{8\pi} \sum_{l'} \sum_{l''} \frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}}{R(l', l'', t)^3} \Omega_\alpha(l', t)\Omega_\beta(l'', t) R_\gamma(l', l'', t)$$
$$V(l')V(l'') \qquad (3.16)$$

$$R_\alpha(l', l'') = X_\alpha(l', t) - X_\alpha(l'', t), \quad R(l', l'', t) = |R(l', l'', t)|$$

とする。こゝで $l' = l''$ の寄与は 0/0 となり、總和において

この項はのぞくものとする。(3·16)を(3·14), (3·15)に代入しベクトル形で書けば

$$\frac{D\mathbf{X}(l,t)}{Dt}=\frac{1}{4\pi}\sum_{l'}{}'\frac{v(l')}{R(l',l';t)^3}\boldsymbol{\Omega}(l',t)\times\mathbf{R}(l;l',t) \qquad (3\cdot17)$$

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}(l,t)}{Dt}=\frac{1}{4\pi}\sum_{l'}{}'v(l')\Big[\frac{1}{R(l,l';t)^3}\boldsymbol{\Omega}(l,t)\times\boldsymbol{\Omega}(l',t)$$

$$-\frac{3}{R(l,l';t)^5}\mathbf{R}(l,l';t)\{\boldsymbol{\Omega}(l,t)\cdot(\boldsymbol{\Omega}(l',t)\times$$

$$\mathbf{R}(l,l';t))\}\Big] \qquad (3\cdot18)$$

をうる。こゝで$\sum$につけた$'$は$l'=l$の項をのぞくことを意味する。これらがヴォートンの基礎方程式である。又、(2·10)(2·11)より適当な近似をもちいて、渦糸近似を表すことができる。

§4. 分裂するヴォートンと時間メッシュの短縮

以前に行った絡った2つの渦輪の数値実験[4]で、始めは割合にずんぐりしたヴォートンも、ヴォートン間の非線形相互作用が強くなると、渦糸のひきのばし効果のため、急速に細長いヴォートンに成長することがわかった。このような状況ではヴォートンを単一の位置ベクトルと渦度ベクトルで表わすのでは近似が悪く、ヴォートンの分裂を考える必要が生ずる。ヴォートンは、実際には時間の経過と共に複雑な変形をうけ

るであろう。しかし、その変形を簡単に長さと断面積の変化で表わしうると考える。すなわち、各ヴォートンに相当長さ、相当断面積という概念を導入し、ヴォートンの変形を大局的に考察する。今1つのヴォートンに着目し、その相当長さ（渦度と平行）を$\lambda(t)$と相当断面積を$\sigma(t)$とすれば、断面を円形と仮定した時の相当直径は $2\sqrt{\sigma(t)/\pi}$ となる。そこで（相当）太さ比 $Th(t)$ を

$$Th(t)=\frac{2\sqrt{\sigma(t)/\pi}}{\lambda(t)} \tag{4.1}$$

で定義する。

ヴォートンを渦糸の1部と考えれば、その断面積と渦度の積すなわち循環および断面積と長さの積すなわち体積は時間的に不変と考えられる。そこで

$$\omega(t)\,\sigma(t)=\Gamma=\text{不変} \tag{4.2}$$

$$\lambda(t)\,\sigma(t)=V=\text{不変} \tag{4.3}$$

という条件を課すことにする。初期に Γ, V は与えられるから時々刻々の $\omega(t)$ を計算すれば、(4.2),(4.3)によって各時刻の$\sigma(t)$と$\lambda(t)$が、したがって$Th(t)$も(4.1)によって計算することができる。

実際の計算にあたっては$Th(t)$に下限Th_bをもうけ、$Th(t)$がTh_bに達したならば、ヴォートンは分裂すると考える。

縦方向に2つの等しいヴォートンに分裂するとすれば、そのヴォートンは消滅して、新たに x から Ω の正負の側に相当長さの 1/4 の位置に、渦度が（分裂前と）同じ、相当長さが半分、相当断面積が同じ、2つのヴォートンが発生すると考える。各ヴォートンについてこのような評価を行って、計算を進めるわけである。

ヴォートンの分裂を考えることは、流れの場の特徴的長さが減少することを意味する。このような状況では、特徴的時間も減少すると考えられる。この力学系の変数で時間を表わすものをさがすと $|\omega(\alpha,t)|^{-1}$ がある。そこで

$$\omega_{max}(t) = \operatorname{Max}_{\alpha} |\omega(\alpha,t)| \qquad (4.4)$$

を定義し、初期の $\omega_{max}(t)$ が2倍になったら、初期の時間メッシュ $\Delta t(0)$ の半分を新たに時間メッシュとして、以下同様に積分を実行するものとする。各時刻の時間メッシュは

$$\Delta t(t) = \Delta t(0) / 2^{Int(\log_2(\omega_{max}(t)/\omega_{max}(0)))} \qquad (4.5)$$

である。Int は小数部分をのぞき整数化することを意味する。

§5. 絡った2つの渦輪

半径 a, 断面半径 b, 循環 Γ の、同形、同じ強さの2つの渦輪が、各渦輪を含む面が直交し、互いの中心を貫くような初期配位から、それらの発展をヴォートン・モデルで計算

する。規格化は

$$x/a,\quad t/(a^2/\Gamma),\quad v/(\Gamma/a),\quad \omega/(\Gamma/a^2) \qquad (5.1)$$

等である。初期パラメターは

$$b/a = 0.1, \qquad \Delta t(0) = 0.01 \qquad (5.2)$$

初期には 20×2＝40個のヴォートンがあるものとする。
したがって

$$Th(0) = 0.6366.. \qquad (5.3)$$

である。太さbの下限は $Th_b = 0.5$ ととる。数値積分は変形Euler法すなわち、(3.17), (3.18)の右辺で時間微分を計算するとき、その時刻とその1ステップ先のそれ（近似値）の平均値をとる方法で行った。

第1図は渦輪の発展を3面図で示してある。図中のNVは渦輪にふくまれるヴォートンの数，DTはその時刻における時間メッシュを示す。以下、エンストロフィー（第2図，Es），ヘリシティー（第2図，Hl），運動エネルギー（第3図，E(1)），全運動エネルギー（第3図、TE），渦輪の運動量（第4図、P(1)），全運動量（第4図，TP），角運動量（第5図、AP(1)），全角運動量（第5図、TAP），全渦度（第6図、TO），渦度の初期値で規格化されたL₂ノルム $(Es(t)/Es(0))^{0.5}$ およびマクシマム・ノルム $(\omega_{max}(t)/\omega_{max}(0))$ の逆数（第7図）の時間発展が示されている。各々 $t=0\sim5$ および $t=5\sim5.055$

が別の図になっている。第6図の右にはヴォートンの最小長さ（横軸）と渦輪全体の長さ（縦軸）の各時刻における値の軌跡が両対数グラフで示してある。

なお、上の積分量は、

$$E_s(t) = \frac{1}{2}\iiint \omega(a,t)^2\, d^3a \tag{5.4}$$

$$Hl(t) = \iiint w(a,t)\cdot\omega(a,t)\, d^3a \tag{5.5}$$

$$E(t) = \frac{1}{8\pi}\iiint\iiint \frac{1}{2}\,\omega(a,t)\cdot\omega(a,t)\, d^3a\, d^3a' \tag{5.6}$$

$$P_\alpha(t) = \frac{1}{2}\iiint \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, x_\beta(a,t)\,\omega_\gamma(a,t)\, d^3a \tag{5.7}$$

$$AP_\alpha(t) = \frac{1}{2}\iiint \left(x_\alpha(a,t)^2 - x(a,t)^2\right)\omega_\alpha(a,t)\, d^3a \tag{5.8}$$

$$TO_\alpha(t) = \iiint \omega_\alpha(a,t)\, d^3a \tag{5.9}$$

を総和の形になおして計算した。(5.6)では適当な近似で、自己エネルギー（$a \fallingdotseq a'$）も考慮した。(5.8)の右辺では和の記号はつかわれていない。

§6. むすび

この論文では、3次元渦運動において、渦の位置ベクトルと渦度の対応する成分を正準共役変数にえらべば、ギ正準形式で書け、この力学系を完全に閉じた形で論じうることを示した。渦場の細胞分割を行い、位置ベクトルと渦度に適当な近似を行って、細胞を1つの位置ベクトルと渦度ベクトルで表わすとヴォートン近似がえられることを示した。

渦の引きのばし効果によって、始めずんぐりしたヴォートンも時間の経過と共に急速に細長いヴォートンになることがわかっている。そこで細長いヴォートンを1つの位置ベクトルと渦度で表わすのでは近似がわるいので、ヴォートンの分裂を考慮した。各ヴォートンに相当太さ比を定義し、太さ比に下限をもうけ、それに達すると縦に分裂するという条件を課した。ヴォートンの分裂は流れの特徴的長さの減少を意味し、それにともなって特徴的時間も減少するから、時間積分にあたって、時間メッシュも減少させる必要がある。流れの変数の中で $\omega(a,t)^{-1}$ が時間の次元をもつ。そこで流れの中の渦度の最大値の逆数が半分になると時間メッシュを半分にするような時間積分の方法をとった。

以上の方法を2つの渦輪の運動の解析に $t=0$ ～ 5.055 の間でもちいた。ヴォートンの分裂、時間メッシュの減少の経過は次のようであった。$t=0.56$ で最初の分裂(1次)が起り、$t=1.86$ で2次、$t=2.545$ で3次、$t=3.4825$ で4次、$t=4.7900$ で5次、$t=4.98875$ で6次、$t=5.0025$ で7次、$t=5.003375$ で8次の分裂が各々最初に起った。したがって $t=5.055$ の時刻に最初のヴォートンの64分の1のヴォートンが存在していることになる。時間メッシュは $t=0$ で $\Delta t=0.01$, $t=1.92$ で $\Delta t=0.005$ に、$t=3.070$ で $\Delta t=0.0025$

に、$t=4.9600$ で $\Delta t=0.00125$ に、$t=4.9975$ で $\Delta t=0.000625$ に、$t=5.0375$ で $\Delta t=0.0003125$ に減少した。$t=4$ 附近からヴォートンの数が急速にふえ、$t=5$ 少し前から時間メッシュの減少が急速になった。したがって $t=5\sim5.055$ の計算の方が $t=0\sim5$ の計算時間より長くかかるという結果になった。

第1図の $t\geq5$ の図を見ても、2つの渦輪のつなぎかえは起っていない。2つの渦輪が接近した附近では非常に複雑な変形が起っている。しかし、他方の渦輪の効果よりも、自分自身の相互作用によってより多く変形しているように見える。

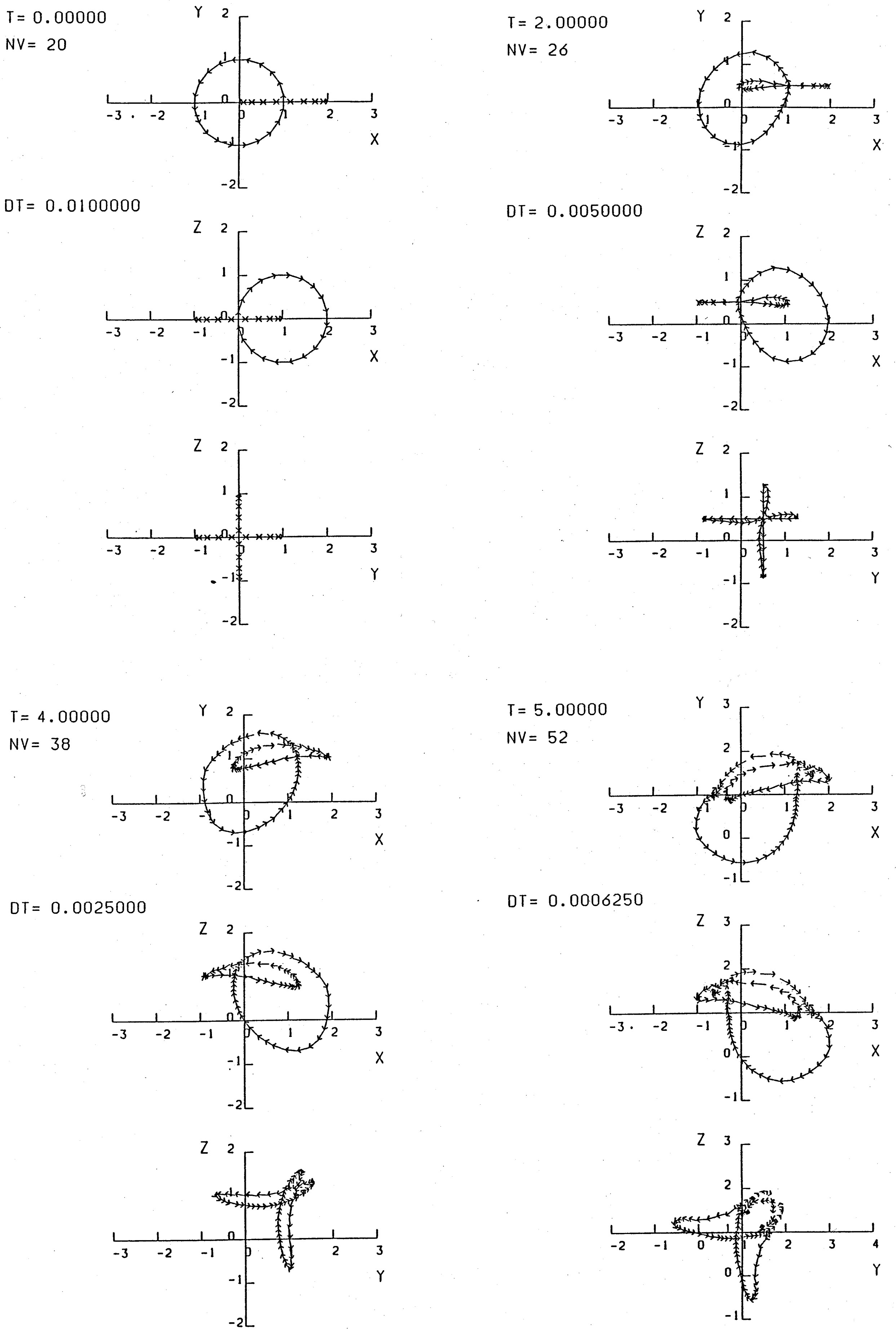
この力学系の保存量、全エネルギー（第3図）、全運動量（第4図）、全角運動量（第5図）、全渦度（第6図）の保存は大体満足しうるものであるが、ヘリシティーは $t=2$ 近くまでは一定で、それ以後は振動する。その原因はまだわからない。第6図にはヴォートンの最小長さと渦輪全体の長さの時間的軌跡を両対数グラフで示してある。渦輪の渦線が理想的フラクタル曲線とすれば、その傾斜が $1-D$ を与え、フラクタル次元 D がわかるはずである。上の図からこれをおめると大体 $D=1.05$ となる。

渦度のノルムとして L_2 ノルム $\left[\iiint \omega(a,t)^2 d^3a\right]^{1/2}$ は a...

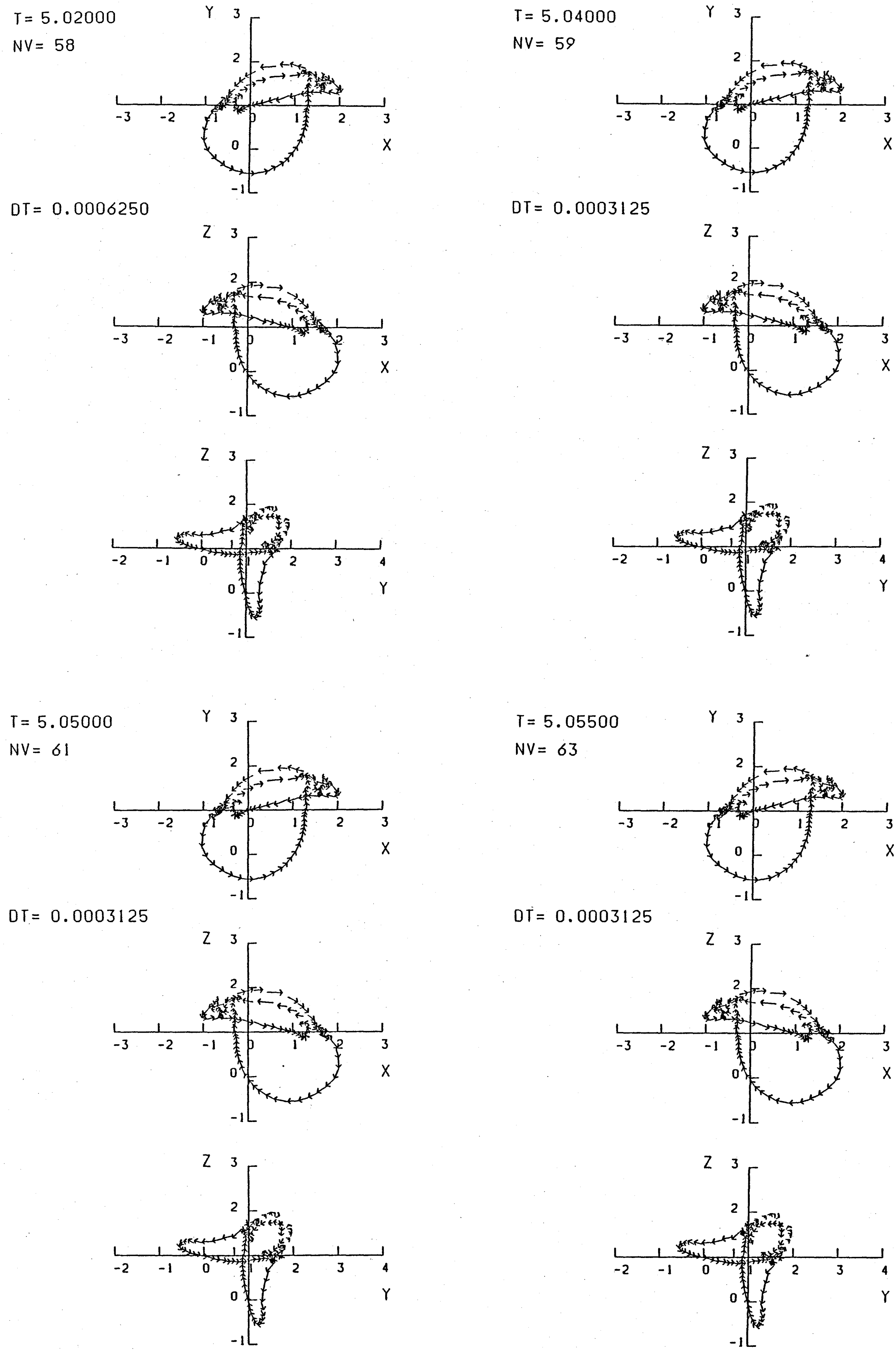
L_∞ノルム $\omega_{max}(t) = \mathrm{Max}_{a} |\omega(a,t)|$ を考える。これらを最期値で規格化し、逆数をとったものの時間的発展が第7図に示してある。これから $t=5$ の少し先で、これらの量が0になるように思われる。すなわち渦度のノルムが発散する傾向がよみとれる。これはEuler方程の爆発の徴候と考えられよう。

参考文献

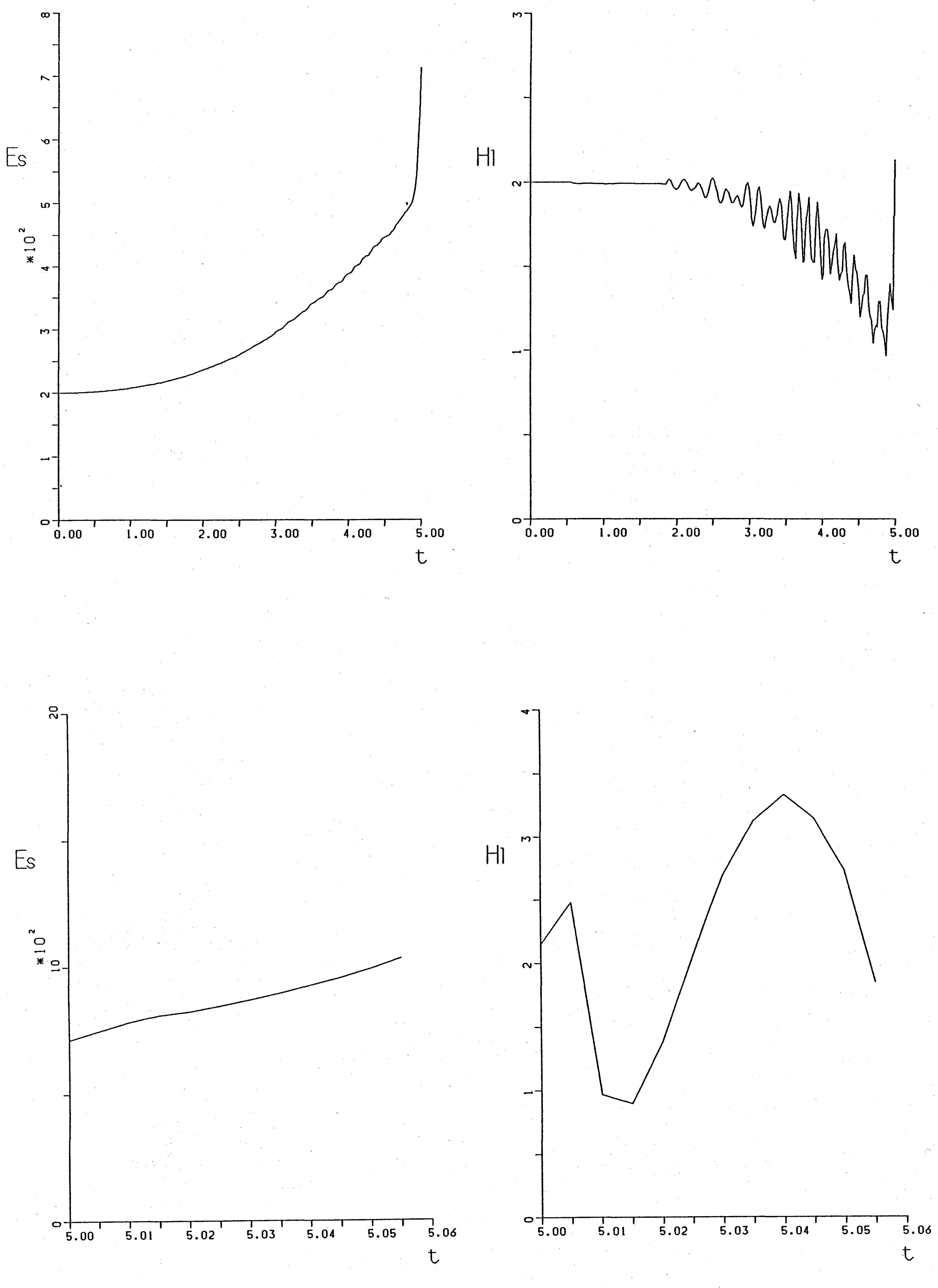
1) J. T. Beale and A. Majda: Math. Computation 39(1983)1.
2) J. T. Beale and A. Majda: Math. Computation 39(1983)29.
3) S. Kuwabara: Proc. of the Symp. on Mech. for Space Flight (1984)15.
4) S. Kuwabara: Proc. of the Sump. on Mech. for Space Flight (1985)31.
5) S. Kuwabara: J. Phys. Soc. Japan 54(1985) 4881.
6) A. Leonard: in Turbulent Shear Flows 2 (ed. by L. J. S. Bradbury et al., Springer, 1980).
7) B. Mandelbrot: in Turbulence and NS Equation (ed. by R. Teman, Springer, 1976)121.
8) E. A. Novikov: Sov. Phys., JETP 57(1983)566.
9) P. G. Saffman: in Transion and Turbulence (Academic Press, 1981)149.



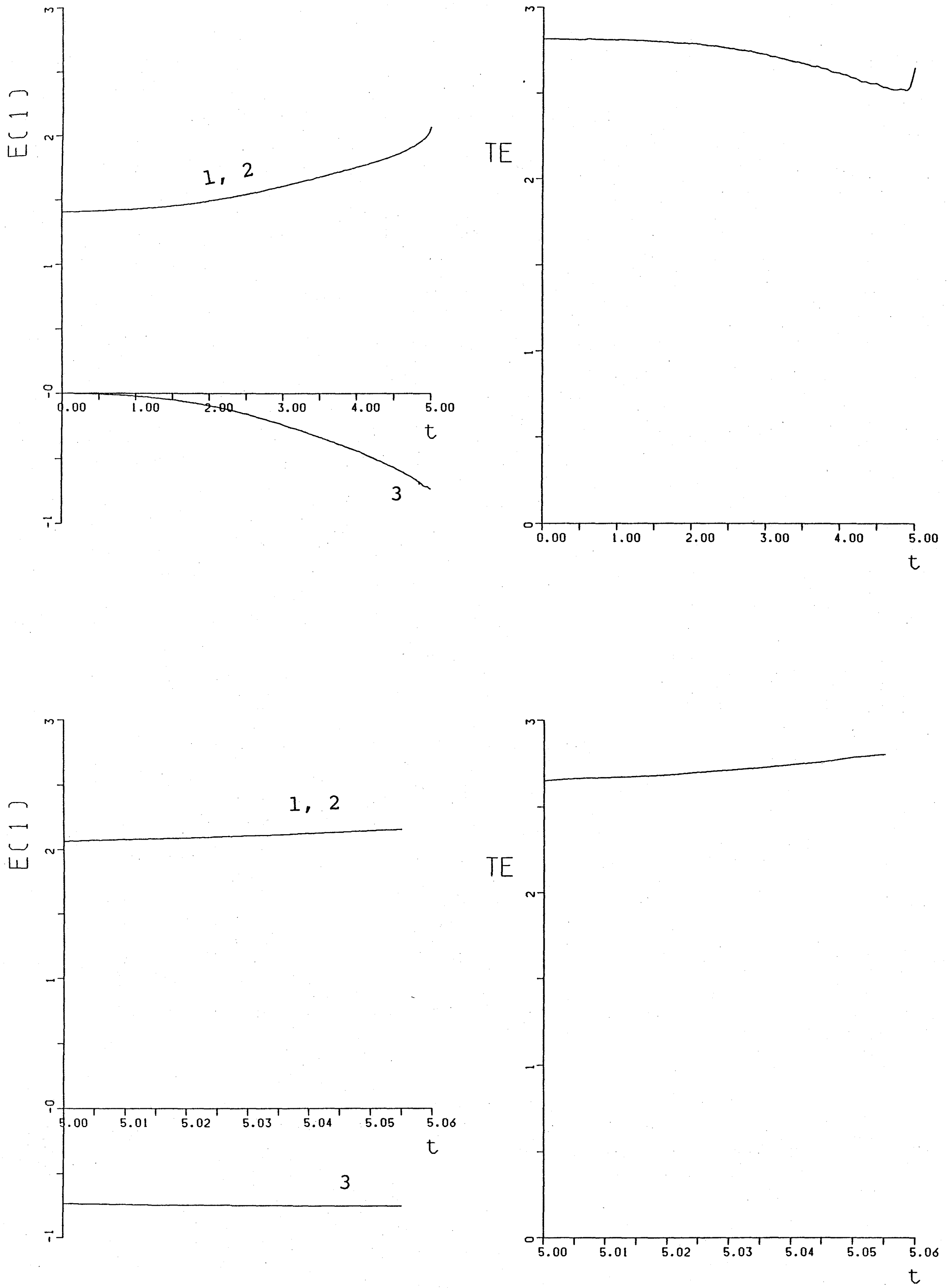
第１図.　絡まった２つ渦輪の時間的発展１（３面図）



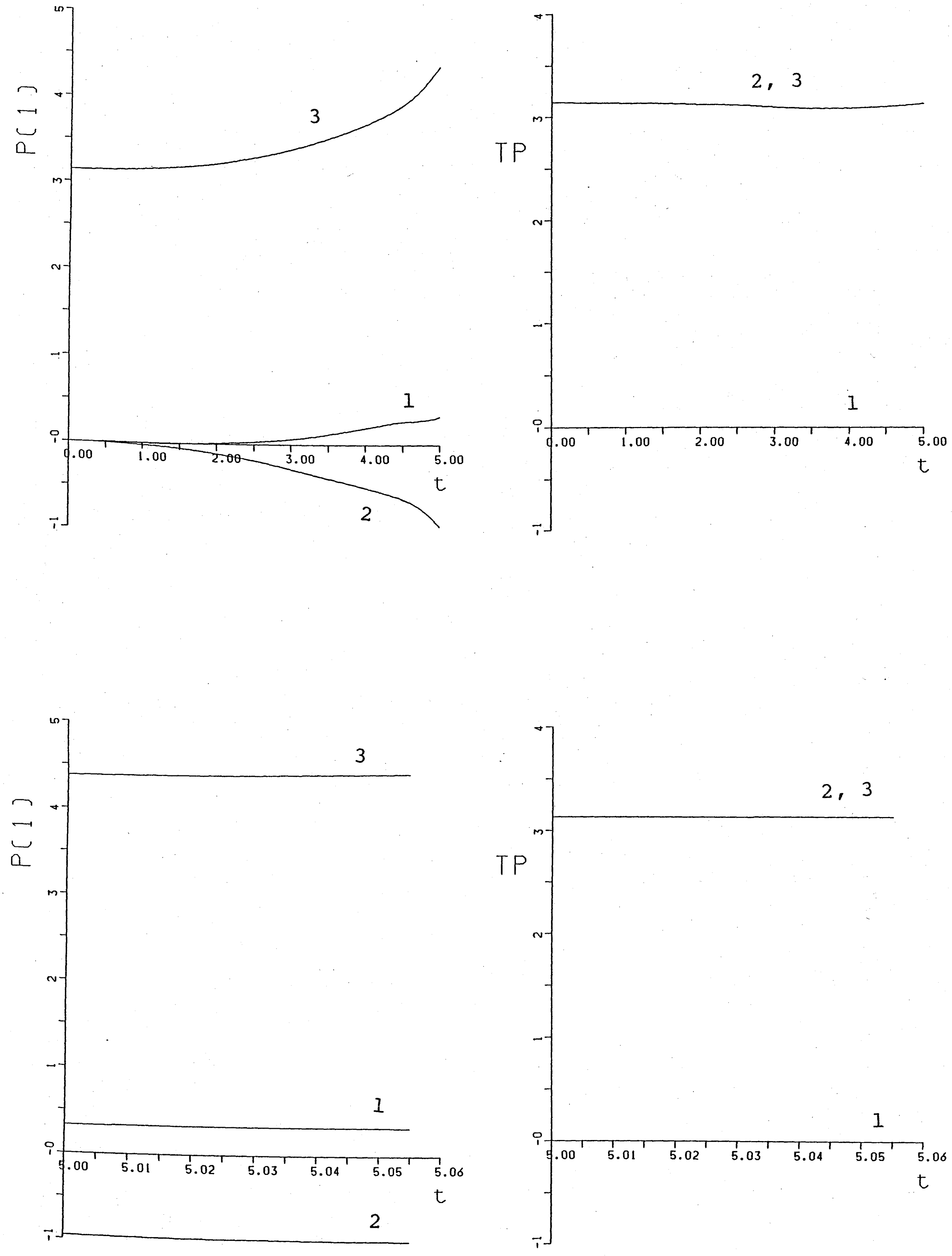
第１図．　絡まった２つ渦輪の時間的発展２（３面図）



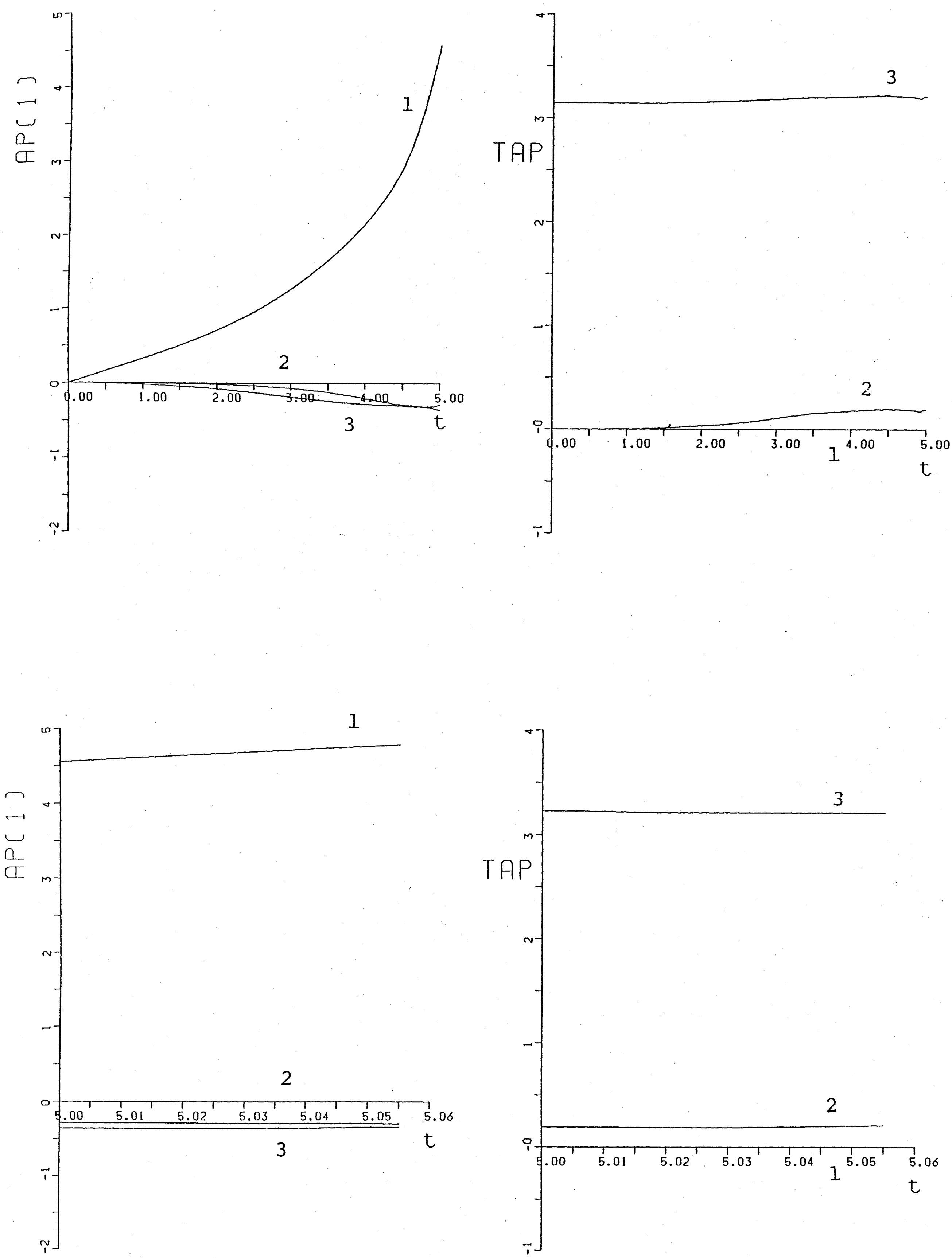
第２図．　エンストロフィーとヘリシティーの時間的発展



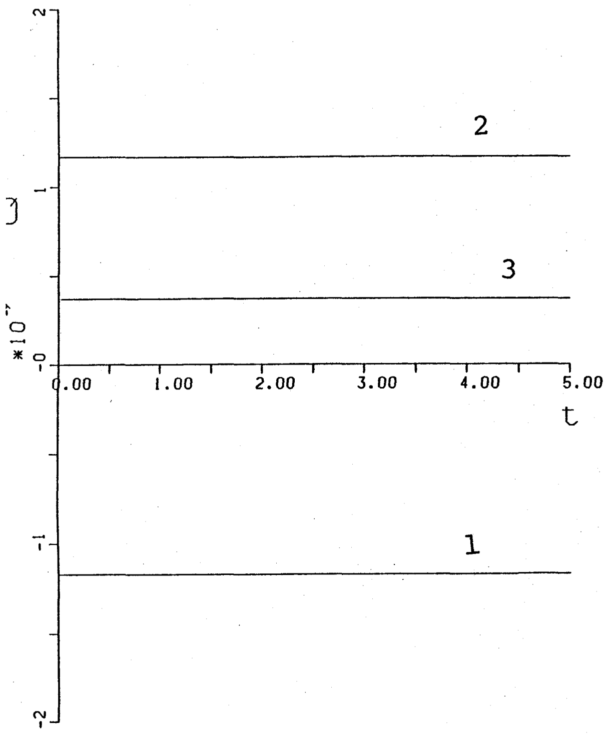
第3図．　運動エネルギーの時間的発展．
1：渦輪1，　2：渦輪2，　3：相互エネルギー，
TE：全エネルギー　20

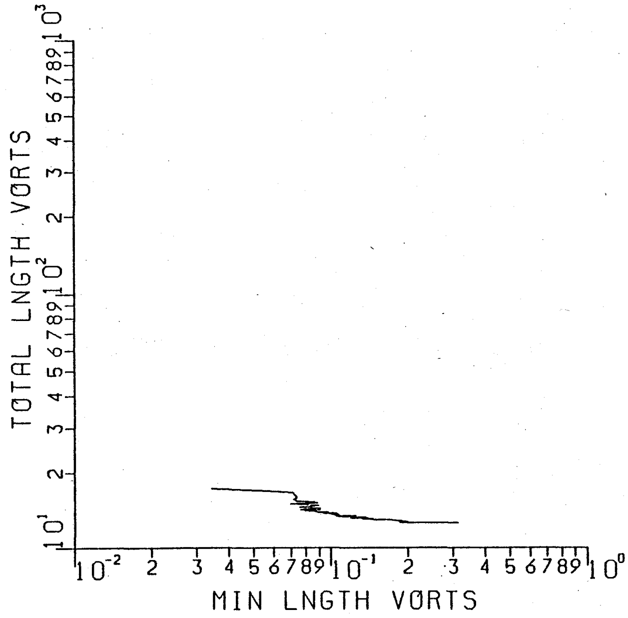


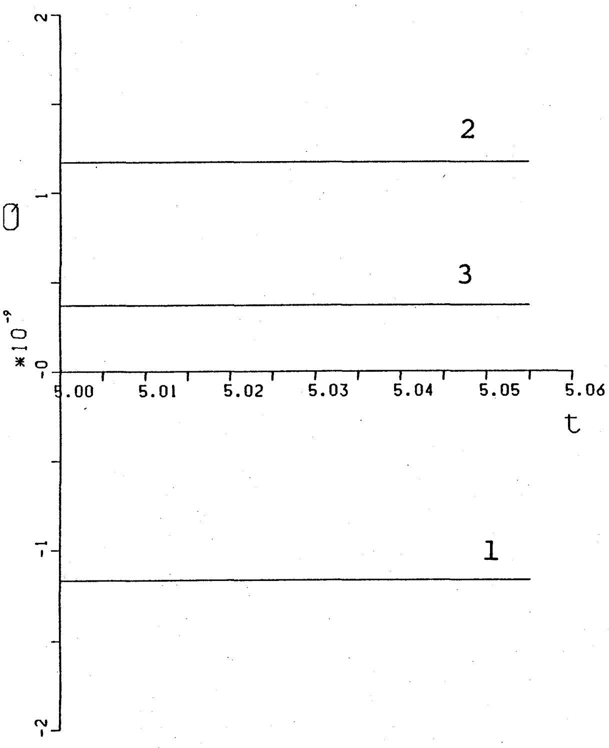
第４図．　運動量成分の時間的発展．
（１，２，３）：成分，　Ｐ（１）：渦輪１，ＴＰ：全運動量

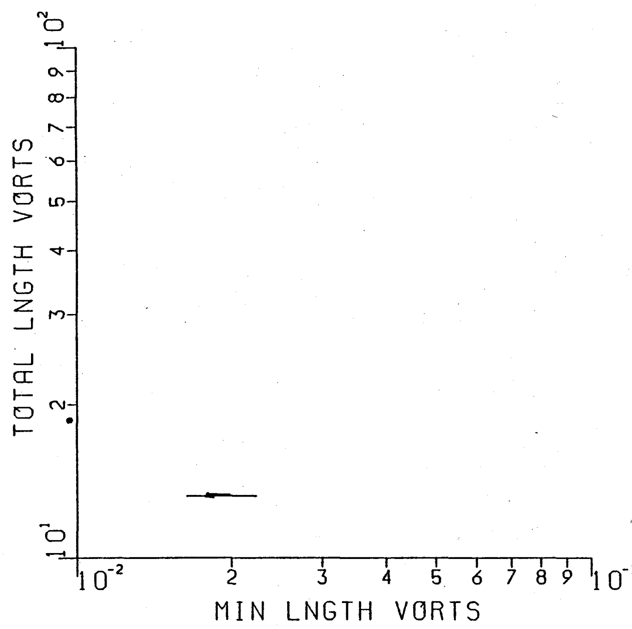


第5図.　角運動量成分の時間的発展.
ＡＰ（1）：渦輪1，　ＴＡＰ：全角運動量

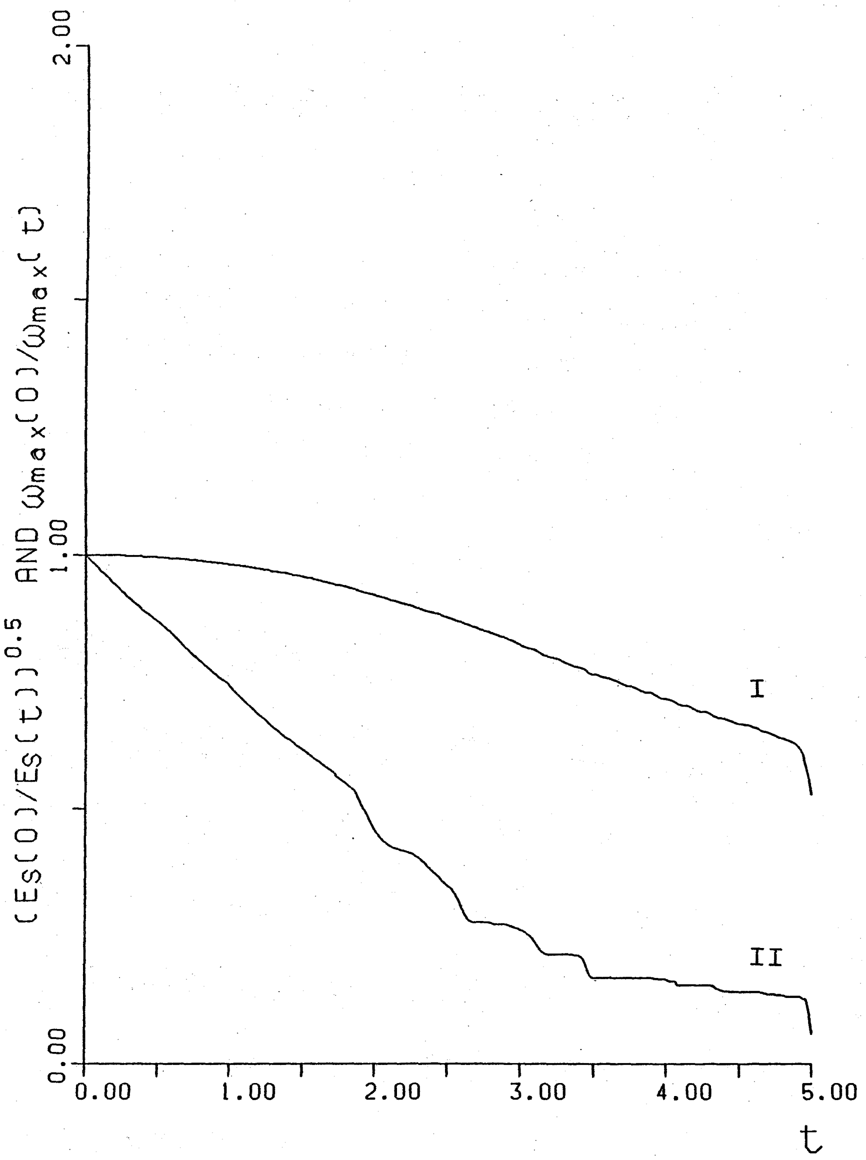








第６図．　全渦度の時間的発展およびヴォートンの最小長さと渦輪の長さの時間的軌跡



第7図．　渦度ノルムの逆数の時間的発展．

I : $(Es(0)/Es(t))^{0.5}$,　II : $\omega_{max}(0)/\omega_{max}(t)$