数理解析研究所講究録
606巻 1987年 1-11

壁面を流れる流体膜に生ずる表面波の理論

東大・工 仲矢 長次 (Choji Nakaya)

1. はじめに

垂直な壁面を厚さ h_0 の粘性流体が流れおりるとき，定常流は壁面に平行で，自由表面に頂点をもつ放物線の形をもっている．この定常流を特長づけるために，レイノルズ数 R を

$$R = \frac{g h_0^3}{2\nu^2}$$

によって導入する．ここで g は重力，ν は動粘性係数である．ところがこの定常流はすべての R について観測されるのでなく，比較的小さな R に対して，流体表面上に波が生ずる．

このような波を特長づけるためには，他の2つのパラメタを導入するのが適当で，それらは浅水パラメタ μ とウェーバー数 W で

$$\mu = \frac{h_0}{l_0}, \quad W = \frac{S}{\rho g h_0^2}$$

と定義される．ここに ρ は密度，S は表面張力，l_0 は下方に

向っての波の代表的長さである．これまでの研究では主として線形理論，弱非線形の理論に限られて，表面波を統一的に取り扱い，任意の波長に対して波の理論をつくり，研究するという試みはなかったように思われる．ここではまず，表面波を記述する方程式が厳密解として孤立解をもつことを示しそれによって周期解を構成していくつかの議論をする．

2．表面波の方程式

直交座標系を壁面に平行にx軸，垂直にy軸をとる．二次元の非圧縮の粘性流体に対する運動の方程式はΨを流れの函数とすると

$$
\Psi_{xxt}+\Psi_{yyt}-\Psi_x(\Psi_{xxy}+\Psi_{yyy})+\Psi_y(\Psi_{xxx}+\Psi_{xyy})
$$
$$
=\nu(\Psi_{xxxx}+2\Psi_{xxyy}+\Psi_{yyyy})
$$

とかける．ここにtは時間，νは粘性係数である．この方程式の厳密解として

$$
\Psi=\frac{g}{2\nu}\left(h_0 y^2-\frac{1}{3}y^3\right),\quad p=p_0
$$

がある．ここにp_0は大気圧である．ところが流体中に運動が生じてきて，自由表面は変位をうけ

$y=h(x,t)$

とあらわされ，Ψも同様に時間の関数となる．これをψで表わ

す．ここで以下のような無次元の変数を＊印によって導入すると

$$x = l_0 x^*, \quad y = h_0 y^*, \quad t = l_0 u_0^{-1} t^*, \quad \bar{\Psi} = u_0 h_0 \bar{\Psi}^*$$

$$\psi = u_0 h_0 \psi^*, \quad p = \rho g h_0 p^*, \quad h = h_0 h^*$$

ここに u_0は自由表面上の定常流の速度である．これらの変数によって運動方程式と境界条件は次のようにかける

$$\psi_{yyyy} = \mu R\left[\psi_{yyt} + (\bar{\Psi}_y + \psi_y)\psi_{xyy} - (\bar{\Psi}_{yyy} + \psi_{yyy})\psi_x\right]$$
$$-2\mu^2 \psi_{xxyy} + \mu^3 R\left[\psi_{xxt} + (\bar{\Psi}_y + \psi_y)\psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxy}\right]$$
$$-\mu^4 \psi_{xxxx},$$

$$\psi_x = 0, \qquad y = 0,$$

$$\psi_y = 0, \qquad y = 0,$$

$$(\bar{\Psi}_{yy} + \psi_{yy} - \mu^2 \psi_{xx})(1 - \mu^2 \psi_{xx})(1 - \mu^2 h_x^2)$$
$$- 4\mu^2 \psi_{xy} h_x = 0, \quad y = h,$$

$$-\frac{W\mu^2 h_{xx}}{(1+\mu^2 h_x^2)^{3/2}} - p - \mu \psi_{xy} \frac{1-\mu^2 h_x^2}{1+\mu^2 h_x^2}$$
$$- \frac{4\mu^3 \psi_{xy} h_x^2}{1-\mu^4 h_x^4} = 0, \quad y = h,$$

$$h_t + \left[\bar{\Psi}(h) + \psi(h)\right]_x = 0, \qquad y = h.$$

ここに

$$p_x = \frac{1}{2\mu}\psi_{yyy} - \frac{1}{2}R\left[\psi_{yt} + (\bar{\Psi}_y + \psi_y)\psi_{xy} - (\bar{\Psi}_{yy} + \psi_{yy})\psi_x\right] + \frac{1}{2}\mu\psi_{xxy},$$

である．

μが小さいとき

$$\psi = \psi^{(0)} + \mu\psi^{(1)} + \mu^2\psi^{(2)} + \cdots$$

$$p = p^{(0)} + \mu p^{(1)} + \mu^2 p^{(2)} + \cdots$$

の形で解を求めよう．簡単な計算によって

$$\psi^{(0)} = (h-1)y^2,$$

$$\psi^{(1)} = \left(\frac{2}{3}Rh^4h_x + \mu^2 W h h_{xxx}\right)y^2 - \frac{1}{3}\mu^2 W h_{xxx}y^3 - \frac{1}{6}Rh^2h_x y^4 + \frac{1}{30}Rhh_x y^5$$

となる．これらを変位$h(x,t)$を支配する方程式に代入すると，次の方程式が得られる

$$h_t = -2h^2h_x - \mu\left(\frac{8}{15}Rh^6h_{xx} + \frac{16}{5}Rh^5h_x^2 + \frac{2}{3}\mu^2 W h^3 h_{xxxx} + 2\mu^2 W h^2 h_x h_{xxx}\right),$$

これが変位$h(x,t)$を記述する方程式で，これを解くことによって，流体の運動を知ることができる．

3. 孤立波

上に記した方程式の解を

$$h = h(\xi), \qquad \xi = x - ct$$

の形で求めてみる。ここでcはきまった波の速度である。上の式を代入すると

$$-c\frac{dh}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\left[\frac{2}{3}h^3 + \mu\left(\frac{8}{15}Rh^6\frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3}\mu^2 W h^3 \frac{d^3h}{d\xi^3}\right)\right] = 0$$

が得られる。これを一回積分すると

$$-ch + \frac{2}{3}h^3 + \mu\left(\frac{8}{15}Rh^6\frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3}\mu^2 W h^3\frac{d^3h}{d\xi^3}\right) = A,$$

ここにAは積分定数である。上の式の解として

$$h \to k, \qquad \xi = \pm\infty$$

となるものを求めてみよう。上の条件から

$$A = -ck + \frac{2}{3}k^3$$

が得られる。ここにAを表わすkはある定まった流体膜の厚さである。上式をとくために新しい変数を

$$\eta = \varepsilon^{-1}\xi, \qquad \varepsilon = \mu W^{1/3},$$

によって導入しよう．変数ηを使うと上の方程式は

$$-ch+\frac{2}{3}h^3+\frac{8}{15}\frac{R}{W^{1/3}}h^6\frac{dh}{d\eta}+\frac{2}{3}h^3\frac{d^3h}{d\eta^3}$$

$$=-ck+\frac{2}{3}k^3,$$

$$h\to k,\qquad \eta\to\pm\infty$$

とかくことができる．

上の方程式と境界条件をみたす解をもとめるために$\eta\to\pm\infty$での振舞をしらべてみよう．

$$h=h'+k\qquad\qquad h'\ll k$$

とおいて代入すると

$$\left(-\frac{3c}{2k^3}+\frac{3}{k}\right)h'+\frac{4}{5}\frac{Rk^3}{W^{1/3}}\frac{dh'}{d\eta}+\frac{d^3h'}{d\eta^3}=0.$$

という線形の方程式がもとめられる．この解は明らかに

$$h=\exp(\sigma\eta)$$

とかくことができる．σは次の式

$$\sigma^3+3r\sigma+s=0.$$

ここに

$$r = \frac{4}{15}\frac{Rk^3}{W^{1/3}} \quad , \quad s = \frac{3}{k} - \frac{3}{2}\frac{c}{k^3}$$

である．三次方程式の根のうち1根は正で，他の二根は実部が負で共役であることを考えると上流側で

$$h_u = k + C_1 \exp(\alpha\eta) \quad , \quad \eta < \eta_1 ,$$

下流側で

$$h_d = k + C_2 \exp(\beta\eta)\cos(\gamma\eta + \delta) \quad \eta \geqq \eta_2$$

とかける．区間 $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ で数値積分した結果と上の式とを接続させることによって，恐らくは無限個ある孤立解のモードが得られる．

4．S－解

上に求められた孤立波は，各々が十分にはなれているかぎり独立に運動する．したがってこれらの孤立波が定常流の上に存在する流れは一般には周期性はない．ところが同じ孤立解を同じ間かくで並べるとき周期解となる．この間かくを

$$\Lambda = 2\pi l_0$$

とおくと，

hに対して

$$h(\xi) = h(\xi + 2\pi)$$

が成りたつ．さらに，$\lambda = \Lambda / h_0$ を導入すると

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \mu$$

が成りたつ．上の式は浅水パラメタが，波数の意味をもつことがわかる．周期 $[0, 2\pi]$ に一つの孤立解が存在するようにとると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\xi)\, d\xi = 0.$$

上式を変形すると

$$\mu = \frac{2\pi(1-k)}{W^{1/3}\int_{-\infty}^{\infty}[h(\eta) - k]\, d\eta}$$

が得られる．この式によって，Rを与えるとμが計算される．

5．f－解．

上記 s－解は孤立波のひろがり

$$\Delta\xi \sim \mu W^{1/3}$$

が次の関係式

$$\mu W^{1/3} \ll 2\pi$$

をみたすかぎり正しい．ところが μ が大きくなると上の条件を周期解としての一解が満足しなくなり，もとの方程式にもどって解を求めることが必要になる．

そのためには h を

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(in\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \exp(-in\xi) + 1$$

とフーリエ級数に展開してその係数 a_n を求めればよい．表面の変位を表わす式に入れると

$$in\left[2 - c + in\mu\left(\frac{8}{15}K - \frac{2}{3}n^2\mu^2 W\right)\right]a_n = M_n.$$

ここに $M_n(a_1, \cdots, a_n)$ は非線形項である．$n = N$ で近似をうち切ると，未知数は μ, c, $a_1, \cdots, a_N$ の $2N+1$ 個で関係式はみなで $2N$ あるから，μ を決めると，あとの変数 $c, \cdots a_1 \cdots a_N$ は一意的に決定される．

6．流量

これまで扱かってきた流体層の厚さ h_0 は，周期解のばあいには平均厚さと一致する．実験によると流量を測定してその

値から厚さ h_0^* をもとめることが行われている．流量 q は

$$q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_i \, d\xi ,$$

$$q_i = \frac{2}{3}h^3 + \frac{8}{15}\frac{R}{W^{1/3}} h^6 h_\eta + \frac{2}{3}h^3 h_{\eta\eta\eta}$$

で与えられ，簡単な計算から

$$q = \frac{2}{3}k^3 + q_s ,$$

$$q_s = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi/\varepsilon} \left[\frac{2}{3}(h^3 - k^3) + 2h h_\eta^3\right] d\eta$$

とかける．方程式を利用して

$$q_s = (1 - k)c$$

が得られる．この流量を用いると厚さの比

$$r = \frac{h_0^*}{h_0}$$

は

$$r = \left(\frac{3}{2} q\right)^{1/3}$$

で与えられる．r によってもとめられる，h_0^* から対応する理論と実験との比較が可能になる

7、まとめ

a．表面の変化を記述する方程式の厳密解として，孤立解が存在する．

b．これらの孤立解を等しい間かくで並べると，周期解が得られ，その各々が線形・弱非線形の波とつながる解の族を構成する

c．実験から観測される波動は，これらの解の族のいずれかに属する．