数理解析研究所講究録
608巻 1987年 105-126

Umbral Calculus and Special Functions.

佐賀大・教養　上野 一男　(Kazuo UENO)

0. INTRODUCTION

1. では Rota, Roman, Sweedler 等に依る整ベキ(特に多項式) Umbral Calculus の概略を述べる。2. では，私の研究の動機となった，古典的特殊関数のいくつかの性質についてひとこと注意する。3.–5. は私の仕事 [U2] のスケッチである。6. で多変数化について少し触れる。7. ではこのノートで直接引用する論文・本の他に，何らかの意味で関連すると思われるものも，参考のために加えておく。

§1. UMBRAL CALCULUS

以下Umbral Calculus をUCと略記する。

1変数多項式UCの最初のまとまった文献は[RKO]と思われる。それに改良・追加を施したのが[RR]で，[Ai]内の記述もそれに依っている。その後中心となって研究をしたのがRoman [R2–R6] である。その間 Sweedler に依る Co-algebra-comodule の立場からのUCの解説[NS]が出版された。

組合せ論の数え上げ問題，確率・統計におけるモーメント問題，解析学でよく利用される古典的直交多項式系，などを扱うとき，ある種の性質をもった[数列や]多項式列が現われてくる。その性質とは：(1) 母関数表示をもつ，(2) 漸化式や微分方程式をみたす，(3) 積分表示や Rodrigues type の公式をもつ，(4) 加法定理をもつ，など。もちろんすべての多項式列がこれらの性質をいつももつというわけではないが，比較的ひんぱんに観察されることである。少し例をあげると：

Lower Factorial Polynomials $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x)_k}{k!}t^k = (1+t)^x \left[= \exp(x\log(1+t))\right],$$

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k\, y_{n-k},$$

$$(x+1)_n - (x)_n = n(x)_{n-1}.$$

Hermite Polynomials $H_n(x)$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x)}{k!}t^k=\exp(xt-\frac{t^2}{2})$,

$$H_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k(y)H_{n-k}(x),$$

$$(D_x^2-xD_x+n)H_n(x)=0,\quad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}D_x^n(e^{-x^2/2}).$$

[その他多くの実例については特に[RR]と[R6]を参照.]
これらの多項式列についての取扱い方について，古くからいろいろと考えられて来ているが，特に代数的側面に注目したとき，それを統一的に扱う方法論はないか？というのがRotaたちがUGを最初に研究しはじめた時の，最大の動機だったと思われる。[[RKO]と[RR]のIntro.を見よ。] UGの特徴の1つとして，関数解析的な考え方とベキ級数による形式解析をうまく組合せて用いていることがあげられる。たとえば，1変数ベキ級数代数 $K[[t]]$ (K: 標数0の体) を1変数多項式全体 $K[x]$ 上の線形形式の全体と考え，更に $K[[t]]\cong K[x]^*$ は $K[x]$ 上のcoalgebra構造を $K[[t]]$ の代数構造に裏返すことに注目する。これはHopf代数のテキストなどで最も初歩的な例の1つとして扱われることだが，ここで $K[[t]]$ の自己同型群の作用と $K[[t]]^\times$ の掛算作用を併せ考える[redacted]と[redacted]，$K[x]$ の方ではそれに対応してSheffer sequenceが現われて来る。このメカニズムにのせると多くの古典的多項式列のも[redacted]つ代数的性質・関係式

が自動的に説明される。

2. Special Functions

1変数の古典的特殊関数を常微分方程式論の立場から扱っている本として [Ho], [Hu], [I] などがある。また群論的立場からそれらを統一的に説明しようとする試みもあり，たとえば [Ta], [M] などの成書もある。最近では，岡本和夫の研究 [O1], [O2] があるが，これは UG の考え方とやや似ている点のあることが注目される。

私は古典的特殊関数の代数的側面を，従来行なわれているやり方とは違い，もっと素朴なやり方で説明できないだろうかと考えた。そういう期待をもったのは，1変数多項式 UG で Hermite 多項式や Laguerre 多項式が扱われていたからである。これらの多項式は退化した特殊関数と考えられるから UG の方法を一般化すれば Hermite-Weber 関数，合流型超幾何関数，etc... を同じ公式を用いて説明できるかもしれない。

常微分方程式論的にいうと，古典的特殊関数は超幾何型と合流超幾何型の2種類に分類される。それは UG 的にいうと，$(1+X)^{-b}$ と $\exp X$ の2つのベキ級数に対応しているだろう。

特殊関数は大ていパラメータを含んでいる。いくつか含んでいる場合には1つのみに注目することにする。普通、それは1乗又は2乗の形で、その関数のみたす常微分方程式(2階)に現われる。パラメータとはつまり固有値のことではないか?また、たとえばBesselやLegendreの場合のように2乗の形で含まれている場合には、方程式が、2つの1次独立解に対応するように、因数分解されるのではないか?

そして仕事に着手した。

3. General Power Umbral Calculus

一般ベキUCでは、Kを標数ゼロの体、aをKの元とするとき、$(t^a K((t)), x^a K((x^{-1})))$ 又は $(u^a K((u^{-1})), y^a K((y)))$ という位相K線形空間の組を、その双対性と共に、考える。$a=0$ の場合を整ベキUCと呼び、特に $(K[[t]], K[x])$ を考察する場合、多項式UCと呼ぶ。1.で述べたように、RotaとRomanは、多項式UCを追究し、その方法により、数理物理学、組合せ論等に現われる古典的多項式列を、統一的に扱えることを示した([R6], [RR], [R2])。彼らは、[RR]と[R4]では、ファクター列をも考察した。3.と5.で、一般ベキUCが、多項式UCが古典的多項式列の研究に関して果すのと同様の役

割を，古典的特殊関数に関して果すことを略述する。([U2:PartI])

M_t を $K[\![t]\!]$ の極大イデアル，$1+M_t := \{1+h(t) \mid h(t) \in M_t\}$ とおく。アンブラル・グループ $UG_K = \{(f(t), g(t)) \mid f(t) \in t(1+M_t),\ g(t) \in 1+M_t\}$ は $K[\![t]\!]$ 上に位相 K 線形同形として忠実に作用する：$t \mapsto f(t)^i g(t)$ $(i \in \mathbb{N})$．UG_K は，そのリー代数 UL_K の，指数写像による全単射像である。

係数写像 $cf_a : a+\mathbb{Z} \to K\setminus\{0\}$，$a+i \mapsto cf_{a+i}$，を固定する。$\{s_{a+i}(x) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ を $(f(t), g(t)) \in UG_K$ に対するシェファー列とする：

$$(1)\quad \sum_{i\in\mathbb{Z}} s_{a+i}(x)\frac{1}{cf_{a+i}}T^{a+i} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} x^{a+i}\frac{1}{cf_{a+i}}\bar{f}(T)^{a+i}g(\bar{f}(T))^{-1}.$$

ここで $\bar{f}(T)$ は $f(T)$ の代入に関する逆元である。(1) は $\{s_{a+i}(x) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ の母函数で，$G_s{}^a(f(t), g(t))$ と表され，$x^a K((x^{-1}))$ の位相 K 線形同形：$x^{a+i} \mapsto s_{a+i}(x)$ $(i \in \mathbb{Z})$，を与える。この概念は，古典的な母函数の考えの拡張である。

(1) から次の2つの公式が導かれる：

(2) $Op(f(t), g(t))(s_{a+i}(x)) = (a+i)s_{a+i}(x) \quad (i \in \mathbb{Z})$,

ここで $Op(f(t), g(t)) := (xD_x - (tg'(t)/g(t)))\times$
$\times f(t)/tf'(t) \in E_K^a$,

(3) $s_{a+i}(x) = g(t)^{-1} f'(t) (f(t)/t)^{-a-i-1} (x^{a+i})$ $(i\in\mathbb{Z})$.

E_K^a は $x^aK((x^{-1}))$ の自己位相K線形写像全体のなすK代数で，$K((t))$ を随伴加群作用として含む。(2)は固有級数表示，(3)は移転公式である。(1), (2), (3)を組合わせて用いることにより，特殊関数に関するいろいろな式が得られる。$a=0$ の場合の(2)と(3)は[R4]において与えられている。

以上は，$(t^aK((t)), x^aK((x^{-1})))$ に関する理論と例だが，$(u^aK((u^{-1})), y^aK((y)))$ についても平行した結果が得られる(変数の逆転)。[その際の記号や式には Iv を右肩につける。] 例えば $K[[t]]$ の代数自己同形のかわりに $K[[u^{-1}]]$ $(\simeq K[[t]],\ u^{-1}\leftrightarrow t)$ の代数自己同形を考える。この考えを導入することにより Bessel 級数を扱うことができるようになる。

諸例は5. に譲ることとし，ここでは2つの著名な級数をUG的に示しておく。

超幾何級数。 $s_{a+i} := (a+i)!(-b-a-i)!/(-b)!$
$(a, b,\ a+b \in K\setminus\mathbb{Z}$, $(a+i)!$ 等は一般階乗),
$(f(t), g(t)) := (t/(1+t), (1+t)^{-c}) \in UG_K$ (c

$\in K$) とおくと，

(4) $s_{a+i}(x) = x^{a+i}F(-a-i, -a-i-c+1; -a-i-b+1; x^{-1})$,

(5) $Op(f(t), g(t)) = xD_x - (xD_x + b)^{-1}(xD_x + c)D_x$.

ここで，F は超幾何級数。(2)と(5)から

$$[x(1-x)D_x^2 + (c-(-a-i+b+1)x)D_x + (a+i)b]\times$$
$$\times(s_{a+i}(x)) = 0,$$

すなわちパラメータ $(-a-i, b, c)$ に対する超幾何方程式が得られる。実際，$K = \mathbb{C}$ かつ $(a+i)! = \Gamma(a+i)$ の場合には，(4) は $x = \infty$ におけるクンマーの基本解の1つである。

Bessel級数。 $cf_{a+i} := (a+i)!$, $(f(u), 1) := (u(1+(1+4u^{-2})^{1/2})/2, 1) \in UG_K^{\text{上ひ}}$ ($a \in K\setminus\mathbb{Z}$) とおくと，J を通常のBessel級数として，

$$G_s^{\text{上ひ},a}(f(u), 1) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} y^{a+i}\frac{1}{cf_{a+i}}(U-U^{-1})^{a+i}$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} J_{a+i}(2y)U^{a+i}.$$

これは整べきBessel関数の母関数，

$$\exp(y(U-U^{-1})) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} J_i(2y)U^i,$$

の一般化である。

$$Op^{IV}(f(u), 1) = yD_y \cdot (1+4D_y^{-2})^{1/2}$$

だから,

$$[Op^{IV}(f(u), 1)]^2 - (a+i)^2$$
$$= y^2D_y^2 + yD_y + 4y^2 - (a+i)^2,$$

すなわち, $2y$ を y でおきかえると, パラメタ $a+i$ に対するBessel作用素。

4. Coalgebra-comodule Formulation

ここでは, M. Sweedler に依る, 多項式UGの余代数—余加群による定式化([NS]) を一般化し, 一般ベキUGの枠組を考察する。特に特殊関数の加法定理と, ファクター列及び多項式列の概念を自然な形で導出する([U2; Part II, III])。

<u>Ordinary Case</u> ($(t^aK((t)), x^aK((x^{-1})))$ の場合。).

$K[x]_{cf}$ で係数写像 $cf: \mathbb{N} \to K \setminus \{0\}$, $i \mapsto cf_i$ に対する $K[x]$ 上の余代数構造, Δ_{cf} でその構造射, を表す。K線形双対 $K[[t]] \cong K[x]_{cf}^*$ は, $K[x]_{cf}$ の余代数構造を $K[[t]]$ の代数構造に移す。cf と cf_a に対して, $x^aK((x^{-1}))$ 上に位相 $K[x]_{cf}$ 余加群構造が定義される。それを $x^aK((x^{-1}))_{cf}$ で, その構造射を $\Delta_{cf,a}$ で, 表す。位相K線形双対 $t^aK((t)) \cong x^aK((x^{-1}))_{cf}^*$ は, x^a.

$K((x^{-1}))_{cf}$ の余加群構造を，$t^a K((t))$ の $K[\![t]\!]$ 加群(掛算)構造にうつす。整ベキ UG（$a=0$）の場合，ファクター列と多項式列の概念及び母級数等の公式は，それぞれ，$K((x^{-1}))_{cf}$ の部分位相 $K[x]_{cf}$ 余加群 $x^{-1}K[\![x^{-1}]\!]_{cf}$ と商 $K[x]_{cf}$ 余加群 $K[\check{x}]_{cf}$ を設定することにより，$K((x^{-1}))_{cf}$ におけるシェファー列の定義等から自然に導かれる。

$E_K^{\ell o}$ を $K[x]_{cf}$ の自己K線形写像全体とする。$K[x]_{cf}$ の多項式代数構造と Δ_{cf} による余代数構造とから，$E_K^{\ell o}$ は，たたみこみ代数になる（[Ab]，[NS]，[S]）。L_K^a を $x^aK((x^{-1}))$ から $x^aK((x^{-1}))\hat{\otimes}K[x]$ への位相K線形写像全体とする。$x^aK((x^{-1}))_{cf}$ の $K[x]$ 加群構造(掛算)と $\Delta_{cf,a}$ による位相 $K[x]_{cf}$ 余加群構造とから，L_K^a は $E_K^{\ell o}$ 上の，たたみこみ加群になる。$(f(t), g(t)) \in UG_K$ に対するシェファー列に関する一般シェファー恒等式は，$\Delta_{cf,a}\circ G_s{}^a(f(t), g(t))$ を，たたみこみ $E_K^{\ell o}$ 加群 L_K^a 内で計算することにより，得られる。特に $cf_i := i!$ $(i \in \mathbb{N})$，$cf_{a+i} := (a+i)!$ $(a \in K \setminus \mathbb{Z},\ i \in \mathbb{Z})$ の場合，一般シェファー恒等式は一般加法公式を与える。ファクター列，多項式列に関する公式は，部分及び商余加群を考えることにより得られる。Hermite-Weber級数，Laguerre-Sonine級数，Hermite多項式，Laguerre多項式等の加法公式が例と

してみちびかれる。

<u>Reversed Case</u>（ $(u^aK((u^{-1})),\ y^aK((y)))$ の場合。）

Ordinary case と類似の方法により，位相余代数 $K[\![y]\!]_{cf}$ と位相 $K[\![y]\!]_{cf}$ 余加群 $y^aK((y))_{cf}$ が得られ，それらの双対性に関する考察が行われる。整ベキ $(a=0)$ の場合，商及び部分余加群を設定することにより，整ベキ級数列と逆転多項式列が定義される。更に拡張整ベキ級数列を導入する。一般逆転シェファー恒等式と拡張整ベキ級数シェファー恒等式が，たたみ込みの方法により得られる。これらは，係数写像が随乗の場合，加法公式を与える。

Reversed case の formulation は，大体 ordinary case のそれに平行するが，現われて来る余代数・余加群に導入される位相がやや異なる。

ここで Reversed case の例として 3. で示した Bessel 級数［及びそれに付随する多項式］をつづけよう。

<u>Bessel 級数の加法公式。</u> Neumann－Schläfli の加法定理として知られる

$$J_{a+i}(y+y_1)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}J_{a+i-j}(y)J_j(y_1)\qquad(i\in\mathbb{Z})$$

は，$a\in K\setminus\mathbb{Z}$ の場合は一般逆転シェファー恒等式から，$a\in\mathbb{Z}$ の場合は拡張整ベキ級数恒等式から，それぞれ自動的に得られる。

<u>Schläfli及びNeumann多項式。</u> Bessel級数を生成する $(f(u), 1) \in UG_K^{IV}$ に対して、逆転多項式列 $\{s^-_{-1-i}(y) \mid i \in \mathbb{N}\}$ を考えると、$(-1-i)! := (-1)^i/i!$ とおけるから、

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} y^{-1-i}(-1)^i i!\,(U-U^{-1})^{-1-i}$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} s^-_{-1-i}(y)(-1)^i i!\,U^{-1-i}.$$

実際に計算すると、

$$s^-_{-1-i}(y) = S_{i+1}(2y)/i! \quad (S_{i+1}\text{はSchläfli多項式}),$$

がわかる。同じ $f(u)$ に対し、$(f(u),\ f(u)^2/(f(u)^2+1)) \in UG_K^{IV}$ とおき、それに対する逆転多項式列の母級数を計算すると、

$$G_0^{IV,-}(f(u),\ f(u)^2/(f(u)^2+1))$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} y^{-1-i}(-1)^i i!\,(U-U^{-1})^{-1-i}\,(1+U^2)$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} s^-_{-1-i}(y)(-1)^i i!\,U^{-1-i},$$

$$s^-_{-1-i}(y) = 4O_i(2y)/i! \quad (i \geqq 1),$$

$$s^-_{-1}(y) = y^{-1} = O_0(y) \quad (O_i\text{ は Neumann多項式}),$$

となる。

この4.では、余代数―余加群の概念拡張を通じて、UGを一般ベキで考察するのは自然であることを提示した。正確

な定義等については [U2: Part II, Part III] を参照して下さい。

5. Examples from Classical Special Functions

すでに3.と4.で若干の例を示したが，ここでは，3.と4.の一般論が，19世紀的特殊関数を現代の立場から整理検討する1つの方法を与えることを，(更に)数例を通して見ることにしよう。([U1], [U2])

Hermite-Weber Series. $\quad (t, \exp(bt^2/2)) \in UG_K$, $cf_{a+i} := (a+i)!$ とする。移転公式(transfer formula)により($t = D_x$ に注意)

$$H^{(b)}_{a+i}(x) := \exp(-bt^2/2)(x^{a+i})$$
$$= x^{a+i}\sum_{j\in\mathbb{N}}\left[(-b)^j (a+i)_{(2j)}/j!\,2^j\right]x^{-2j} \quad (i\in\mathbb{Z}),$$

ここで $(a+i)_{(2j)} := (a+i)!/(a+i-2j)!$。これを $a+i$ 次の Hermite-Weber series (パラメタ b) と呼ぼう。$K=\mathbb{C}$ のとき，$H_{a+i}(x) := H^{(1)}_{a+i}(x)$ は $\exp(x^2/4)D_{a+i}(x)$ の $x=\infty$ における漸近展開に[redacted]現われる ($D_{a+i}(x)$ は Weber 関数)。
固有級数表示は

$$\left(bD_x^2 - xD_x + (a+i)\right)H^{(b)}_{a+i}(x) = 0$$

となり，$K=\mathbb{C}$ かつ $b=1$ のときには Hermite 微分作用素になる。母級数表示は

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} H^{(b)}_{a+i}(x)\frac{1}{(a+i)!}T^{a+i} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} x^{a+i}\frac{1}{(a+i)!}T^{a+i}\exp(-bT^2/2).$$

$b, c \in K$ とする。次の加法定理がシェファー恒等式として証明される:

$$H^{(b+c)}_{a+i}(x+x_1)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\binom{a+i}{j}H^{(b)}_{a+i-j}(x)H^{(c)}_{j}(x_1)$$

($a\notin\mathbb{Z}$, $i\in\mathbb{Z}$), ここで $H_j^{(c)}$ は Hermite多項式:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}H_i^{(b)}(x)\frac{1}{i!}T^i=\exp\left(xT-(bT^2/2)\right).$$

この表示は $H^{(b)}_{a+i}$ の母級数表示の退化したものとも考えられるし、逆に後者が前者の一般化ともいえる。

<u>Laguerre-Sonine Series.</u> $(t/(1+t), (1+t)^{-c})\in UG_K$, $cf_{a+i}=(a+i)!$ とする。移転公式により、

$$\begin{aligned}s_{a+i}(x)&=(1+t)^{c+a+i-1}(x^{a+i})\\&=x^{a+i}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left[(-a-i)^{(j)}(1-c-a-i)^{(j)}/j!\right]x^{-j}\end{aligned}$$

($a\in K\setminus\mathbb{Z}$, $i\in\mathbb{Z}$), ここで $(-a-i)^{(j)}:=(-a-i+j-1)!/(-a-i-1)!$. 固有級数表示は

$$\left(xD_x^2+(c+x)D_x-(a+i)\right)s_{a+i}(x)=0$$

となり, x を $-x$ でおきかえると, パラメタ $(-a-i, c)$ に対する合流型超幾何方程式になる。$K=\mathbb{C}$ のとき, $(-1)^{-a-i}s_{a+i}(-x)$ は $F(-a-i, c; x)$ (Laguerre-Sonine関数) の $x=\infty$ における漸近展開の一部として現われる。

合流型超幾何作用素も超幾何作用素も同じ UG_K の元:

$(t/(1+t),\ (1+t)^{-c})$ から得られるが，その際係数写像はそれぞれ $(a+i)!$，$(a+i)!(-b-a-i)!/(-b)!$ となっている。これはちょうど 2. で触れた特殊関数の分類に対応している。私はこれらを，係数写像の形により，Gamma-type, Beta-type と名づけた。Adjoint module action は，それぞれ $t=D_x$，$t=-(xD_x+b)^{-1}D_x$ である。後者において，x を $-x/b$ でおきかえ，$b=\infty$ とおくと D_x になるが，これは合流原理に対応している。

Beta-type に分類される例としてもうひとつあげておこう。

Hyperspherical Series. $(f(t),\ g(t)) :=$ $((1-(1-4t^2)^{1/2})/2t,\ [(1-(1-4t^2)^{1/2}/2t^2]^b)$ $\in UG_K$，cf は Beta-type とする。$(a\in K\setminus\mathbb{Z},\ b\in K,$ $a+b\notin\mathbb{Z},\ i\in\mathbb{N})$.

$$(\bar{f}(t),\ g(\bar{f}(t))^{-1}) = (t/(1+t^2),\ (1+t^2)^{-b})$$

を用いると母級数表示は，

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} s^{(b)}_{a+i}(x)\binom{-b}{a+i}\tau^{a+i} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} x^{a+i}\binom{-b}{a+i}\tau^{a+i}(1+\tau^{-2})^{-a-i-b}$$

$\left(\binom{-b}{a+i} := (-b)!/(a+i)!(-b-a-i)!\right)$，

$$s^{(b)}_{a+i}(x) = x^{a+i}F\left(\frac{-a-i}{2},\ \frac{-a-i+1}{2};\ -b-a-i+1;\ 4/x^2\right)$$

となる。これを $a+i$ 次の超球級数（パラメタ b）と呼ぼう。

$K=\mathbb{C}$ のとき，$\Lambda_{a+i}^{(b)}(x)$ は $(4-x^2)^{-b+(1/2)}Q_{-b-a-i-(1/2)}^{b-(1/2)}(x/2)$

（Q はルジャンドル陪関数）の定数倍である。

$$Op(f(t),g(t)) = (xD_x+b)(1-4t^2)^{1/2} - b,$$

$$((xD_x+b)(1-4t^2)^{1/2}-b-a-i)\Lambda_{a+i}^{(b)}(x)=0$$

がわかる。更に $xD_xF(t)=F(t)xD_x-tF'(t)$ （$F(t)\in K((t))$ ），$t^2=(xD_x+b)^{-1}(xD_x+b+1)^{-1}D_x^2$ が E_K^a でなりたつので，それらを用いると，

$$(Op(f(t),g(t))+2b+a+i)(Op(f(t),g(t))-a-i)$$
$$=(x^2-4)D_x^2+(2b+1)xD_x-(2b+a+i)(a+i)$$

となる。$K=\mathbb{C}$ のとき，$2x$ を x でおきかえると，これは超球作用素である。左辺の2つの因子は互いに可換であり，この因数分解は，右辺の作用素が1次独立解として $\Lambda_{a+i}^{(b)}(2x)$ と $\Lambda_{-2b-a-i}^{(b)}$ [redacted] $(2x)$ をもつことに対応している。これは3.の末尾に例示したBessel作用素の因数分解に類似している。

最後に，$\Lambda_{a+i}^{(b)}(x)$ の母級数表示は，Gegenbauer多項式 $C_i^b(z)$ の母関数表示：

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} C_i^b(z)T^i = (1-2zT+T^2)^{-b}$$

の一般化になっていることを注意しておく。

6. Several Variables.

UGを多変数化する試みはすでに[P]でおこなわれ，更に[R1]で拡張も行なわれた。それに関連して，Lagrange inversion の多変数化 [Jn] は面白い話題である。その後 [B]，[BBN]，[Wa 1]，[Wa 2] などがUGの多変数化を行なっている。私も1つの試みとして[U3]を書いたが，2変数以上の場合，実例による動機づけがやや弱いため，1変数の場合より印象がうすい。また，$K((t))$ は $K[[t]]$ の分数体だが，2変数以上のときには $K[[t_1, \ldots, t_n]]$ の分数体はベキ級数の枠をはみだしてしまうので，それ以外の対象を設定する必要がある。[R1]，[B]，[BBN]，[U3] などでいろいろな定義が与えられている。

7. Papers and Books Related

[Ab] ABE, E., "Hopf Algebras," Cambridge Univ. Press, 1980. (original edition in Japanese: Iwanami, Tokyo, 1977.)

[Ai] AIGNER, M., "Combinatorial Theory," Springer, 1979.

[An] ANDREWS, G. E., On the Foundations of Combinatorial Theory V, Eulerian Differential Operators, Stud. in Appl. Math. (1971).

[B] BRINI, A., Higher Dimensional Recursive Matrices and Diagonal Delta Sets of Series, J. Combin. Th. Ser.

A 36 (1984) 315-331.

[BBN] BARNABEI, M., BRINI, A. and NICOLETTI, A GENERAL Umbral Calculus in Infinitely Many Variables, Adv. in Math. 50 (1983) 49-93.

[C] CHIHARA, T. S., "An Introduction to Orthogonal Polynomials," Gordon and Breach, New York, 1978.

[D] DÜR, A., "Möbius Functions, Incidence Algebras and Power Series Representations," Springer Lect. Notes. 1202 (1986).

[DO] DÜR, A. and OBERST, U., Incidence Algebras, Exponential Formulas and Unipotent Groups, in "Combinatorial Theory," Spr. Lect. N. 969 (1982).

[Ha] HAZEWINKEL, M. "Formal Groups and Applications," Academic Press, 1978.

[Ho] HOCHSTADT, H., "The Functions of Mathematical Physics," Wiley, 1971. (日本語版：培風館, 1974.)

[Hu] 福原満洲雄, "常微分方程式 第2版," 岩波, 1980.

[I] 犬井鉄郎, "特殊函数," 岩波, 1962.

[Jn] JONI, S.A., Lagrange Inversion in Higher Dimensions and Umbral Operators, Lin. and Multilin. Alg. 6 (1978) 111-121.

[Jy] JOYAL, A., Une Théorie Combinatoire des Séries Formelles, Adv. in Math. 42 (1981), 1-82.

[JR] JONI, S.A. and ROTA, G.-C., Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics, Stud. in Appl. Math. 61 (1979), 93-139.

[K] KIMURA, T., "Hypergeometric Functions of Two Variables," Univ. of Tokyo, 1973.

[L] LABELLE, G., Sur l'Inversion et l'Itération Continue des Séries Formelles, Europ. J. Combin. 1 (1980) 113-138.

[M] MILLER, W., "Symmetry and Separation of Variables," Encyclopedia of Math. vol. 4, Addison-Wesley, 1977.

[MUH] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信; "数学公式 III," 岩波, 1960.

[NS] NICHOLS, W. and SWEEDLER, M., Hopf Algebras and Combinatorics, in Contemp. Math. vol. 6, Amer. Math. Soc. 1982.

[NW] NICHOLS, W. and WEISFEILER, B., Differential Formal Groups of J.F. Ritt, Amer. J. Math. 104 (1982), 943-1003.

[O1] OKAMOTO, K., Sur les échelles associées aux fonctions spéciales et l'équations de Toda, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[O2] OKAMOTO, K., Echelles et l'Equation de Toda, preprint.

[OD] OBERST, U. (with DÜR, A.), Actions of Formal Groups on Formal Schemes.—Applications to Control Theory and Combinatorics., in "Séminaire d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin," Spr. Lect N. 1146, 1985.

[P] Parrish, C., Multivariate Umbral Calculus, Lin. and Multilin. Alg. 6 (1978), 93–109.

[R1] ROMAN, S., The Algebra of Formal Series III (Several Variables), J. Approx. Th. 26 (1979), 340–381.

[R2] ROMAN, S., The Theory of the Umbral Calculus I, J. Math. Anal. Appl. 87 (1982), 58–115.

[R3] ROMAN, S., —— II, J. Math. Anal. Appl. 89 (1982), 290–314.

[R4] ROMAN, S., —— III, J. Math. Anal. Appl. 95 (1983), 528–563.

[R5] ROMAN, S., More on the Umbral Calculus, with Emphasis on the q-Umbral Calculus, J. Math. Anal.

Appl. 107 (1985), 222–254.

[R6] ROMAN, S., "The Umbral Calculus," Academic Press, 1984.

[RKO] ROTA, G.-C., KAHANER, D. and ODLYZKO, A., On the Foundations of Combinatorial Theory. VIII: Finite Operator Calculus, J. Math. Anal. Appl. 42 (1973), 684–760.

[RR] ROMAN, S. and ROTA, G.-C., The Umbral Calculus, Adv. in Math. 27 (1978) 95–188.

[S] SWEEDLER, M.E., Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ta] 竹内 勝, 現代の球関数, 岩波, 1975.

[Ti] TAKEUCHI, M., Topological Coalgebras, J. Algebra 97 (1985), 505–539.

[U1] UENO, K., Generating Series of Classical Special Functions, to appear in the Proceedings of "La théorie des équations différentielles dans le champ complexe," Strasbourg, October, 1985.

[U2] UENO, K., Umbral Calculus and Special Functions, to appear in Adv. in Math.

[U3] UENO, K., General Power Umbral Calculus in Several Variables, submitted.

[Wa1] WATANABE, T., On a Dual Relation for Addition Formulas of Additive Groups, I., Nagoya Math. J. 94 (1984) 171–191.

[Wa2] WATANABE, T., —— II, Nagoya Math. 97 (1985) 95–135.

[We] WATERHOUSE, W.C., "Introduction to Affine Group Schemes," Springer, 1979.

[Ws] WATSON, G.N., "Theory of Bessel Functions," Cambridge Univ. Press, 1922 (2nd ed. 1944).

[Y] Yosida, K., "Operational Calculus (A Theory of Hyperfunctions," Springer 1984 (original ed. in Japanese, Univ. of Tokyo Publ. 1982).

以上.