数理解析研究所講究録
608巻 1987年 87-92

On strongly exact sequences of cocommutative Hopf algebras

兵庫教育大学　柳原弘志(Hiroshi Yanagihara)

$$k \longrightarrow G \xrightarrow{j} H \xrightarrow{p} J \longrightarrow k \qquad (1)$$

を体k上の余可換ホップ代数の完全列とし、Cをk上の余可換余代数とすると

$$\{e\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{coal}(C,G) \xrightarrow{j'} \mathrm{Hom}_{coal}(C,H) \xrightarrow{p'} \mathrm{Hom}_{coal}(C,J) \qquad (2)$$

は群の完全列をなすことはよく知られているが、p'は必ずしも全射ではない。そこで、与えられた完全列(1)に対し、任意のk上の分裂余可換余代数Cに対し、(2)のp'が全射になるとき、完全列(1)を強完全列と呼ぶことにする。この講演の目的は与えられた分裂余可換ホップ代数の完全列(1)が強完全列になる条件を与えることである。

Cを体k上の分裂余可換余代数、EをCの部分余代数とする。このとき、もしCからEへの余代数準同型ηで、そのEへの制限がEの恒等写像になるものがあれば、EはCで余代数引き込み(coalgabra retraction)をもつという。またρを体k上の余可換余代数CからDへの余代数準同型とするとき、DからCへの余代

数準同型τで、$\rho\tau$がDの恒等写像となるものが存在するとき、ρは余代数分解(coalgebra splitting)τをもつという。

さて、分裂余可換ホップ代数の完全列(1)が与えられたとき、k上の超代数の完全列

$$k \longrightarrow G_1 \xrightarrow{j_1} H_1 \xrightarrow{p_1} J_1 \longrightarrow k \qquad (3)$$

が得られる。ここで、G_1, H_1, J_1それぞれG, H, Jの群的元1_G, 1_H, 1_Jを含む連結成分である。このとき、我々の主結果は次の定理である。

定　理. (1)を分裂余可換ホップ代数の完全列とし、(3)は(1)から得られる群的元の単位元を含む連結成分からなる超代数の完全列とする。このとき次は互いに同値である。

(i)　(1)は強完全列である。

(ii)　(3)は強完全列である。

(iii)　pは余代数分解をもつ。

(iv)　p_1は余代数分解をもつ。

(v)　GはHで余代数引き込みをもつ。

(vi)　G_1はH_1で余代数引き込みをもつ。

この定理の(ii),(iv),(vi)の間の同値は既に論文[1]において首藤武史によって与えられている。また、(i)と(iii)の間の同値も容易に示される。従って、我々は(iii)と(iv)の間の同値および(v)と(vi)の間の同値を示すことによりこの定理の証明を与える。

そのためには、次の結果が必要である。

命　題1．Cを体k上の分裂余可換余代数とし、EがCの部分余代数とする。また

$$G(C)=\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},\ G(E)=\{g_\mu \mid \mu \in M\}$$

をそれぞれC，Eの群的元のなす集合とする。ここで、$M \subset \Lambda$としておく。さらにC_λ, E_μをそれぞれg_λ, g_μを含むC，Eの連結成分とする。このとき、次は同値である。

(i)　EはCで余代数引き込みをもつ。

(ii)　各$\mu \in M$に対し、E_μはC_μで余代数引き込みをもつ。

次の命題を述べる前に更に定義が必要である。$f: M \to N$を集合MからNへの写像とするとき、写像$g: N \to M$で合成写像$f \circ g$がNの恒等写像となるものが存在すればgはfの分解であるという。

命　題2．C，Dを体k上の分裂余可換余代数とし、

$$G(C)=\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},\quad G(D)=\{h_\mu \mid \mu \in M\}$$

をそれぞれC，Dの群的元のなす集合とする。更にC_λ, D_μをそれぞれg_λ, h_μを含むC，Dの連結成分とする。このとき、$\rho: C \to D$が余代数準同型なら、写像$\rho': \Lambda \to M$で$\rho(g_\lambda) = h_{\rho'(\lambda)}$となるものが唯一つ存在する。更に$\rho$が余代数分解をもつための必要十分条件は次の2条件が成り立つことである。

(i)　ρ'は分解$\tau': M \to \Lambda$をもつ。

(ii)　Mの任意の元μに対し、ρの制限$\rho_\mu : C_{\tau'(\mu)} \to D_\mu$は余代数分解をもつ。

命　題3．分裂余可換ホップ代数の列(1)が与えられたとき、超代数の列(3)と群的元のなす群の列

$$1_k \longrightarrow G(G) \xrightarrow{j'} G(H) \xrightarrow{p'} G(J) \longrightarrow 1_k \qquad (4)$$

が自然に得られる。このとき、(1)が完全列であるための必要十分条件は(3)及び(4)が完全列になることである。

命　題4．H，H′を体k上の分裂余可換ホップ代数とし、f：$H \to H'$はホップ代数準同型とする。gをG(H)の元とし、$g' = f(g) \in G(H')$とする。このとき、

$$h_g : H \to H \ (x \mapsto gx) \quad 及び$$
$$h_{g'} : H' \to H' \ (x' \mapsto g'x')$$

は共に余代数自己同型である。更に

$$h_g|_{H_1} : H_1 \to H_g \quad 及び$$
$$h_{g'}|_{H'_1} : H'_1 \to H'_{g'}$$

は余代数同型である。ここでH_1, H'_1はそれぞれH，H′の1_H，$1_{H'}$を含む連結成分である。また次の図式は可換図式である。

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_g"'] & H'_1 \arrow[d, "h_{g'}"] \\ H_g \arrow[r, "f"] & H'_{g'} \end{tikzcd}$$

定理の（iii）と（v）の間の同値は命題3、命題4及び命題2から得られる。同様に（iv）と（vi）の間の同値は命題3、命題4及び命題1から得られるが、証明の詳細は省く。最後に定理から直ちに得られる結果を述べておく。

命　題5．体k上の分裂余可換ホップ代数の可換図式

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, dashed] & G \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & J \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & k \\ k \arrow[r] & \overline{G} \arrow[r, "\overline{j}"] & \overline{H} \arrow[r] & \overline{J} \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

において、第1行、第2行は共に完全列とする。このとき、次が成り立つ。

（i） 第1行が強完全列で、γが余代数分解をもてば、第2行も強完全列である。

（ii） 第2行が強完全列で、αに対し余代数準同型$\alpha' : \overline{G} \to G$で、$\alpha' \circ \alpha$がGの恒等写像となるものが存在すれば、第1行も強完全列である。

系1．Nは体k上の分裂余可換ホップ代数Hの正規部分ホップ代数で、GはHの部分ホップ代数でNとの合併J（N，G）がHに等しいものとする。このとき、NとGの交わりI（N，G）がGで余代数引き込みをもてば、NもHで余代数引き込みをもつ。

系２．Ｈ，Ｎは系１と同じとし、ＧはＮを含むＨの部分ホップ代数とする。もし自然写像ρ：Ｈ→Ｈ/Ｎが余代数分解をもてば、自然写像$\overline{\rho}$：Ｇ→Ｇ/Ｎも余代数分解をもつ。

系３．Ｈ，Ｎは系１と同じとし、$\overline{\mathrm{N}}$はＮに含まれるＨの正規部分ホップ代数とする。このとき、ＮがＨで余代数引き込みをもてば、Ｎ/$\overline{\mathrm{N}}$もＨ/$\overline{\mathrm{N}}$で余代数引き込みをもつ。

この講演の詳しい内容については論文[２]を参照されたい。

参考文献

[1] T.Shudo, On the relatively smooth subhyperalgebras of hyperalgebras,Hiroshima Math.J. 13(1983), 627 - 646.

[2] H.Yanagihara, On homomorphisms of cocommutative coalgebras and Hopf algebras, to appear in Hiroshima Math.J.