数理解析研究所講究録
609巻 1987年 175-190

代数的K-理論におけるHodge-Chern classについて

京大 数理研　島田信夫 (Nobuo Shimada)

代数的K-群の不変量としてのHodge-型Chern類(Grothendieck, Gersten の意味での) について最も簡単な場合の expository な紹介が本稿の目的である.

単位元をもつ可換環Aに対して, $\Omega^1 = \Omega^1_A = \Omega^1_{A/\mathbb{Z}}$ を Kähler differentials の A-加群, $\Omega^i = \Omega^i_A = \Lambda^i(\Omega^1)$ をそのA上の外積巾, $\Omega^* = \Omega^*_A = \sum_{i\geq 0}\Omega^i_A$ を外積代数とする.

離散群Gの表現 $\rho: G \to GL_n A$ (一般線型群)に対する Ω^*_A-係数の(Hodge-型) Chern類 $c_i(\rho) \in H^i(G, \Omega^i_A)$ $(i \geq 1)$ は, 群Gのコホモロジー類 (ただし Ω^i_A に対するGの作用は自明なものとする)で, 次の性質をもつものとして特徴づけられる: ([Gr], [Ge])

0) $c_i(\rho) = 0$ for $i > n = \mathrm{rank}\,\rho$.

1) (函手性) 準同型 $f: H \to G$ に対して, $c_i(\rho\circ f) = f^* c_i(\rho)$.

2) $c_i(1_n) = 0$ $(i \geq 1)$, ただし $1_n: G \to GL_n A$ は trivial 表現.

3) (加法性又はCartan formula) 表現の直和 $\rho'\oplus\rho'': G \xrightarrow{\Delta} G\times G \xrightarrow{\rho'\times\rho''} GL_m A \times GL_n A \xrightarrow{\oplus} GL_{m+n} A$ に対して

$$c(\rho'\oplus\rho'') = c(\rho')\cdot c(\rho'') \quad (\text{cup 積}),$$

ただし $c(\rho) = 1 + c_1(\rho) + c_2(\rho) + \cdots$ は total Chern 類

4) (normalization) $\rho : G \to GL_n A$ に対して $c_1(\rho) \in H^1(G, \Omega_A^1)$ は，$c_1(\rho)(g) = d(\det \rho(g)) \cdot (\det \rho(g))^{-1}$ (cocycle として) で与えられる.

特に恒等表現 $id_n : GL_n A \to GL_n A$ の Chern 類 $c_i(id_n) \in H^i(GL_n A, \Omega_A^i)$ については，自然な包含写像 $GL_n A \overset{i_n}{\hookrightarrow} GL_{n+1} A$ に関して，$i_n^* c_i(id_{n+1}) = c_i(id_n)$ が成り立つから，ホモトピー可換図式

$$\begin{array}{ccc} BGL_n A & \xrightarrow{c_i(id_n)} & K(\Omega_A^i, i) \\ {\scriptstyle i_n}\downarrow & \simeq & \nearrow {\scriptstyle c_i(id_{n+1})} \\ BGL_{n+1} A & & \end{array}$$

(Eilenberg-MacLane 空間)

が得られ，それから写像 $c_i : BGL(A) = \varinjlim BGL_n A \to K(\Omega_A^i, i)$ がホモトピーを除いて一意に定まる．これは target $K(\Omega_A^i, i)$ が H-空間であるから $BGL(A)^+$ (Quillen's plus construction) を経由する：

$$\begin{array}{ccc} BGL(A) & \xrightarrow{c_i} & K(\Omega_A^i, i) \\ \downarrow & \nearrow {\scriptstyle c_i} & \\ BGL(A)^+ & & \end{array}$$

ホモトピー群の写像に移って

$$c_i : K_i(A) = \pi_i(BGL(A)^+) \to \Omega_A^i$$

が定義される．これが表題の Chern 類である ([Ge]).

具体的な計算のためには，$c_i(\rho)$ の explicit formula や，次の product formula

$$c_{m+n}(a \cdot b) = -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} c_m(a) \cdot c_n(b), \quad (a \in K_m(A),\ b \in K_n(A))$$

等が重要であるので，以下これらについて述べたい.

§1. 表現 の Chern 類

Gを離散群，$\rho : G \to GL_nA = Aut_A(A^n)$ を表現とする．

Chern 類の函手性により $c_i(\rho) = \rho^* c_i(id_n)$ であるから，先づ $c_i(id_n) \in H^i(GL_nA, \Omega^i)$ を定義する．

そのため，Gersten (unpublished) に従って，群 GL_nA の $M_n(\Omega^1_A) = \Omega^1 \otimes_A M_n(A)$ -係数 の 1-cochain γ_n を以下の様に定義する．ここで $M_n(A)$ は，A上の n 次正方行列全体で，GL_nA の作用は，$m^g = g \cdot m \cdot g^{-1}$ (行列の積) で与えられる．

$\gamma = \gamma_n : GL_nA \to \Omega^1 \otimes M_n(A)$ を，$g \mapsto dg \cdot g^{-1} = (dg_{ij}) \cdot (g_{ij})^{-1}$ (行列の積) で定義すると，コバウンダリー の計算は

$$\delta\gamma(g_1, g_2) = \gamma(g_2)^{g_1} - \gamma(g_1 g_2) + \gamma(g_1) = g_1 dg_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} - (dg_1 \cdot g_2 + g_1 \cdot dg_2) \cdot g_2^{-1} g_1^{-1}$$
$$+ dg_1 \cdot g_1^{-1} = 0$$

となり，γ は 1-cocycle，従って $H^1(GL_nA, \Omega^1 \otimes M_n(A))$ の元を定める．係数の reduction $1 \otimes tr : \Omega^1 \otimes M_n(A) \to \Omega^1$ (ただし trは trace の意．) によって，$c_1(id_n) = (1 \otimes tr)\gamma \in H^1(GL_nA, \Omega^1)$ が得られる．次の補題によりこれは normalization の条件を満足する．

<u>補題1</u>. $c_1(id_n)(g) = d(\det g) \cdot (\det g)^{-1}$，$g \in GL_nA$．

証) $(1 \otimes tr)\gamma(g) = (1 \otimes tr)(dg \cdot g^{-1})$ を計算する．$g = (g_{ij})$，$g^{-1} = (\overline{g_{ij}})$ とおく．また e_{ij} で，(ij)-成分が1，他は0 なる行列を表わす．

$$dg \cdot g^{-1} = \sum_{i,j} dg_{ij} \otimes (e_{ij} \cdot g^{-1}) = \sum dg_{ij} \otimes \begin{pmatrix} & 0 & \\ \overline{g_{j1}} & \cdots\ \overline{g_{ji}}\ \cdots & \overline{g_{jn}} \\ & 0 & \end{pmatrix} i \quad ,$$

$$(1 \otimes tr)(dg \cdot g^{-1}) = \sum_{i,j} dg_{ij} \cdot \overline{g_{ji}} = d(\det g) \cdot (\det g)^{-1} \quad .」$$

$c_i(id_n)$ $(i>1)$ の定義のため, γ の cup 巾を考える必要がある. まず γ の係数 A-加群 $\Omega^1\otimes M_n(A)$ (既出, A上の tensor 積であるが簡単のため略記) のそれ自身との積

$$\left(\Omega^1\otimes M_n(A)\right)\times\left(\Omega^1\otimes M_n(A)\right) \xrightarrow{\ \cdot\ } \Omega^2\otimes\left(M_n(A)\otimes M_n(A)\right)$$

$$(\omega\otimes m\ ,\ \omega'\otimes m') \longmapsto (\omega\wedge\omega')\otimes(m\otimes m')$$

さらに巾 $(\Omega^1\otimes M_n(A))^r = \Omega^r\otimes\left(M_n(A)^{\otimes r}\right)$ を考える.

1-cocycle $\gamma=\gamma_n \in C^1(GL_nA,\ \Omega^1\otimes M_n(A))$ の cup 巾

$$\gamma^i=\gamma\cup\cdots\cup\gamma : (GL_nA)^i \longrightarrow \Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i},$$

$$\gamma^i(g_1,\cdots,g_i) = \gamma(g_1)\cdot\gamma(g_2)^{g_1}\cdot\gamma(g_3)^{g_1g_2}\cdots\gamma(g_i)^{g_1\cdots g_{i-1}}$$

は,また cocycle となり $H^i(GL_nA,\ \Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i})$ の元を定める.

係数群の reduction $1\otimes\widetilde{tr} : \Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i} \longrightarrow \Omega^i\otimes A=\Omega^i$ として,

$$\Omega^i\otimes M_n(A)^{\otimes i} \xrightarrow{1\otimes\varphi} \Omega^i\otimes \operatorname{End}\Lambda^i(A^n) \xrightarrow{1\otimes \mathrm{trace}} \Omega^i\otimes A=\Omega^i$$

を定義する. ここで A-写像 $\varphi : M_n(A)^{\otimes i}\longrightarrow \operatorname{End}\Lambda^i(A^n)$ は $\Lambda^i(A^n)$ の基のとり方に一応 depend して, 次の様に定める: 自由 A-加群 A^n の基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ をとり, $\Lambda^i(A^n)$ の基を $\{e_{k_1}\wedge e_{k_2}\wedge\ \wedge e_{k_i}\ ;\ 1\leq k_1<k_2<\cdots<k_i\leq n\}$ としたとき,

$$\varphi(f_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_i)(e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_i}) = f_1(e_{k_1})\wedge\cdots\wedge f_i(e_{k_i}),$$

$$f_1,\cdots,f_i \in M_n(A)=\operatorname{End}A^n.$$

このとき $\mathrm{trace}\,\varphi(f_1\otimes\cdots\otimes f_i)$ は基のとり方に依らず一意的に定まる. それを $\widetilde{tr}(f_1\otimes\cdots\otimes f_i)$ とかく.

そこで, $c_i(id_n) = (1\otimes\widetilde{tr})\gamma^i \in H^i(GL_nA,\ \Omega^i)$ $(i>1)$

が定義され，従って表現 $\rho: G \to GL_n A$ に対する $c_i(\rho) = \rho^* c_i(id_n) \in H^i(G, \Omega^i)$ $(i \geqq 1)$ が定義されたことになる．

表現の Hodge 型 Chern 類の性質のうち，0)，1)，2) および 4) は既に明らかであろう（0) は $\Lambda^i(A^n) = 0$ $(i > n)$ から）．

性質 3) (Cartan formula) を験すため，次の補題を準備する．

<u>補題2.</u> $f_i = \begin{pmatrix} f_i' & 0 \\ 0 & f_i'' \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} M_m(A) & 0 \\ 0 & M_n(A) \end{pmatrix} \subset M_{m+n}(A)$, $i = 1, \cdots, r$,

のとき，

$$\widetilde{tr}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) = \sum_{i=0}^{r} \widetilde{tr}(f_1' \otimes \cdots \otimes f_i') \cdot \widetilde{tr}(f_{i+1}'' \otimes \cdots \otimes f_r'').$$

証) $A^{m+n} = A^m \oplus A^n$ の基 $\{e_1', \cdots, e_m', e_{m+1}'', \cdots, e_{m+n}''\}$ により，$\Lambda^r(A^m \oplus A^n)$ の基として $\{e_{k_1}' \wedge \cdots \wedge e_{k_i}' \wedge e_{k_{i+1}}'' \wedge \cdots \wedge e_{k_r}'' \,;\, 1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq m,\ m+1 \leq k_{i+1} < \cdots < k_r \leq m+n\}$ をとれば明らか．」

さて 1-cocycle $\gamma = \gamma_n \in C^1(GL_n A, \Omega^1 \otimes M_n(A))$ の表わし方として，$\Omega^1 = \Omega_A^1$ の生成系 $\{\omega_i\}_{i \in I}$ を一つ固定しておけば，

$$\gamma(g) = \sum \omega_i \otimes m_i(g) \in \Omega^1 \otimes M_n(A)$$

とかける．従って

$$c_r(id_n) = (1 \otimes \widetilde{tr})\gamma^r$$

については，

$$c_r(id_n)(g_1, \cdots, g_r) = (1 \otimes \widetilde{tr})\gamma(g_1) \cdot \gamma(g_2)^{g_1} \cdots \gamma(g_r)^{g_1 \cdots g_{r-1}}$$

$$= \sum \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r} \cdot \widetilde{tr}\left(m_{i_1}(g_1) \otimes m_{i_2}(g_2)^{g_1} \otimes \cdots \otimes m_{i_r}(g_r)^{g_1 \cdots g_{r-1}}\right)$$

とかき表わすことができる．

表現の直和のモデルとして，$GL_m A \times GL_n A \xrightarrow{\pi_1 \oplus \pi_2} GL_{m+n} A$ を考えよう．これは $(g', g'') \longmapsto g' \oplus g'' = \begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & g'' \end{pmatrix}$ で定義される．

$\gamma_m(g') = \sum w_i \otimes m_i'(g')$ ， $\gamma_n(g'') = \sum w_i \otimes m_i''(g'')$

とおけば，

$$\gamma_{m+n}(g' \oplus g'') = \sum w_i \otimes \left(m_i'(g') \oplus m_i''(g'')\right)$$

と考えてよい．

そこで $g_i = g_i' \oplus g_i''$ $(i = 1, \cdots, r)$ のとき

$$(1 \otimes \tilde{tr})\gamma_{m+n}^r(g_1, \cdots, g_r)$$

$$= \sum w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_r} \cdot \tilde{tr}\left\{\left(m_{i_1}'(g_1') \oplus m_{i_1}''(g_1'')\right) \otimes \left(m_{i_2}'(g_2')^{g_1'} \oplus m_{i_2}''(g_2'')^{g_1''}\right) \otimes \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \otimes \left(m_{i_r}'(g_r')^{g_1' \cdots g_{r-1}'} \oplus m_{i_r}''(g_r'')^{g_1'' \cdots g_{r-1}''}\right)\right\}$$

（補題2により）

$$= \sum w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_r} \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_1}'(g_1') \otimes m_{i_2}'(g_2')^{g_1'} \otimes \cdots \otimes m_{i_j}'(g_j')^{g_1' \cdots g_{j-1}'}\right) \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_{j+1}}''(g_{j+1}'')^{g_1'' \cdots g_j''} \otimes \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \otimes m_{i_r}''(g_r'')^{g_1'' \cdots g_{r-1}''}\right)$$

$$= \sum\left(w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_j} \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_1}'(g_1') \otimes \cdots \otimes m_{i_j}'(g_j')^{g_1' \cdots g_{j-1}'}\right)\right) \wedge \left(w_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge w_{i_r} \cdot \tilde{tr}\left(m_{i_{j+1}}''(g_{j+1}'') \otimes \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdots \otimes m_{i_r}''(g_r'')^{g_{j+1}'' \cdots g_{r-1}''}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (1 \otimes \tilde{tr})\gamma_m^j(g_1', \cdots, g_j') \wedge (1 \otimes \tilde{tr})\gamma_n^{r-j}(g_{j+1}'', \cdots, g_r'')$$

すなわち

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)^* c_r(id_{m+n}) = \sum_{j=0}^{r} c_j(\pi_1) \cup c_{r-j}(\pi_2) \in H^r(GL_m A \times GL_n A, \Omega^r)$$

が得られた。ただし $GL_m \times GL_n \overset{\xrightarrow{\pi_1} GL_m}{\xrightarrow[\pi_2]{} GL_n}$ は projection.

可換図

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend right, "\rho'"'] \arrow[rrr, bend right=40, "\rho''"'] & G\times G \arrow[r, "\rho'\times\rho''"] & GL_mA \times GL_nA \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
& & GL_mA & GL_nA
\end{tikzcd}$$

から $\quad c_r(\rho'\oplus\rho'') = \sum_{j=0}^{r} c_j(\rho')\cdot c_{r-j}(\rho'')$ を得る.

次に表現の tensor 積に関しては, モデル $GL_m\times GL_n \xrightarrow{\pi_1\otimes\pi_2} GL_{mn}$ に対して

$$(\pi_1\otimes\pi_2)^*\gamma_{m+n}(a\times b) = \gamma_{m+n}(a\otimes b) = d(a\otimes b)\cdot(a\otimes b)^{-1} = da\cdot a^{-1}\otimes 1_n + 1_m\otimes db\cdot b^{-1}$$

従って $1\otimes tr$ をほどこして

$$(\pi_1\otimes\pi_2)^* c_1(id_{mn}) = n\cdot c_1(\pi_1) + m\, c_1(\pi_2) \qquad \text{(上図参照)}$$

或いは,

$$c_1(\rho'\otimes\rho'') = (\mathrm{rank}\,\rho'')\cdot c_1(\rho') + (\mathrm{rank}\,\rho')\cdot c_1(\rho'').$$

一般に表現の tensor 積の Chern 類についての公式

5) $c(\rho'\otimes\rho'') = c(\rho') * c(\rho'')$ （$*$の意味は後で述べる）

を示すためには, いわゆる splitting priciple が必要であるので, 先づその概略から述べる.

簡単のため, $H^*(GL_nA,\Omega^*) = \sum_{i\geq 0} H^i(GL_nA,\Omega^i)$ とおく. ただし $H^0(GL_nA,\Omega^0)=A$. $\Delta_n = \Delta_nA = \left\{\begin{pmatrix} g_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn}\end{pmatrix}\right\}$ で GL_nA の対角線型の部分群を表わす. $\eta=\eta_n : \Delta_n \to GL_n$ を自然な包含写像とする. このとき次の様な可換図式が得られる:

$$
\begin{tikzcd}
H^*(GL_nA,\Omega^*) \arrow[d, "\eta^*"] & A[c_1,\dots,c_n] \arrow[l, hook'] \arrow[dr, "\eta^*"', "\cong"] & \\
H^*(\Delta_n,\Omega^*) & A[\alpha_1,\dots,\alpha_n] \arrow[l, hook'] & A[\alpha_1,\dots,\alpha_n]^{\Sigma_n} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
$$

: ($c_i = c_i(id_n)$ で生成された subalgebra を意味 以下同様)

ここで, $\alpha_i \in H^1(\Delta_n,\Omega^1)$ は $\alpha_i\begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn}\end{pmatrix} = g_{ii}^{-1}\cdot dg_{ii}$ で定義される 1-cocycle (または 1-cohomology class) を意味し, Σ_n は n 次対称群で $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の置換群と考える. $H^*(GL_nA,\Omega^*)$ 等は cup 積によって可換環となる(普通は $f\cup g \sim (-1)^{\deg f\cdot\deg g} g\cup f$ の様に, 積の順序により符号がつくが, この場合, 係数が外積代数であるため符号が消し合う).

<u>補題 3</u>. $\eta^* c_i = \sigma_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = \sum\limits_{k_1<\cdots<k_i} \alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_i}$ (i 次 elem. symm. fc.)

証)

$$
\begin{aligned}
\eta^* c_r(g^{(1)},\cdots,g^{(r)}) &= (1\otimes \tilde{t_r})\gamma^r(g^{(1)},\cdots,g^{(r)}) \\
&= \sum \alpha_{i_1}(g^{(1)})\wedge\cdots\wedge\alpha_{i_r}(g^{(r)})\cdot\tilde{t_r}(e_{i_1i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_ri_r}) \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_r} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r}(g^{(1)},\cdots,g^{(r)})
\end{aligned}
$$

ここで $g^{(k)} = \begin{pmatrix} g^{(k)}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g^{(k)}_{nn}\end{pmatrix} \in \Delta_n$, $e_{ii} = \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\end{array}$ ┘

さらに次の様な可換図式が必要である:

$$
\begin{tikzcd}
H^*(GL_m\times GL_n,\Omega^*) \arrow[d] & A[c'_1,\dots,c'_m]\otimes A[c''_1,\dots,c''_n] \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\cong"', "(\eta_m\times\eta_n)^*"] & A[c_1,\dots,c_{mn}] \arrow[l, hook', "(\pi_1\otimes\pi_2)^*"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & H^*(GL_{mn},\Omega^*) \arrow[d] \\
H^*(\Delta_m\times\Delta_n,\Omega^*) & A[\alpha'_1,\dots,\alpha'_m]^{\Sigma_m}\otimes A[\alpha''_1,\dots,\alpha''_n]^{\Sigma_n} \arrow[l, hook'] & A[\alpha_1,\dots,\alpha_{mn}]^{\Sigma_{mn}} \arrow[l, "(\pi_1\otimes\pi_2)^*"] \arrow[r, hook] & H^*(\Delta_{mn},\Omega^*)
\end{tikzcd}
$$

ここで, $\pi_1\otimes\pi_2 : \Delta_m\times\Delta_n \longrightarrow \Delta_{mn}$ を $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(b) & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm}(b)\end{pmatrix}$

としたとき, 次の補題を得る:

補題4. $(\pi_1 \otimes \pi_2)^* \alpha_{(i-1)n+j} = \alpha_i' + \alpha_j''$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$.
$(\alpha_i' = \pi_1^* \alpha_i,\ \alpha_i \in H^1(\Delta_m, \Omega^1)\ ;\ \alpha_j'' = \pi_2^* \alpha_j,\ \alpha_j \in H^1(\Delta_n, \Omega^1))$.

上の可換図において，$(\pi_1 \otimes \pi_2)^* c_r$ が c_i', c_j'' 等の多項式で表わされることは，直接計算により験すことが出来るが，面倒なので省略させて頂く．また $A[c_1, \cdots, c_n]$ 等と恰も多項式環の様に書いたが，実はこれは $c_1, \cdots, c_n$ で生成された subalgebra の意味である．

以上のことから，$(\pi_1 \otimes \pi_2)^* \prod_{i=1}^{mn} (1+\alpha_i) = \prod_{\substack{1\leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (1+\alpha_i' + \alpha_j'')$.

$c = c(id_{mn}) \in H^*(GL_{mn}, \Omega^*)$ を total Chern class とするとき，

$\eta_{mn}^* c = \prod (1+\alpha_i)$，$\eta_{mn} \circ (\pi_1 \otimes \pi_2) = (\pi_1 \otimes \pi_2) \circ (\eta_m \times \eta_n)$ より，

$$(\eta_m \times \eta_n)^* c(\pi_1 \otimes \pi_2) = (\eta_m \times \eta_n)^* (\pi_1 \otimes \pi_2)^* c = (\pi_1 \otimes \pi_2)^* \eta_{mn}^* c = \prod_{i,j} (1+\alpha_i' + \alpha_j'')$$

これが α_i', α_j'' のそれぞれにつき対称式であることから，$c_r(\pi_1 \otimes \pi_2)$ を $c_k' = c_k(\pi_1)$，$c_\ell'' = c_\ell(\pi_2)$ の多項式として表わす具体的な表現 5) が得られる．

§2. 代数的K-群，積 ([L1],[Q])

単位元をもつ(可換)環Aの高次代数的K-群 $K_i(A)$ $(i \geq 1)$ は Quillen により，一般線型群 $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$ の分類空間 $BGL(A)$ から，いわゆる plus construction により作られた空間 $BGL(A)^+$ のホモトピー群として定義された．$K_i(A) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \pi_i(BGL(A)^+)$ $(i \geq 1)$．この空間 $BGL(A)^+$ は，$BGL(A)$ に2次元，および3次元の cell を適当に attach することによって得られ，次の性質で

特徴づけられる：

0) $BGL(A)^+$ は連結 CW 複体

1) 包含写像 $i : BGL(A) \hookrightarrow BGL(A)^+$ は，

$$i_* : H_*(BGL(A), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(BGL(A)^+, \mathbb{Z}) \quad (\text{同型})$$

および $i_* : \pi_1(BGL(A)) = GL(A) \to \pi_1(BGL(A)^+) \cong GL(A)/E(A)$ （自然な商写像）を induce する．ここで $E(A)$ は初等行列 $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} + \lambda e_{ij}$ $(i \neq j)$, $\lambda \in A$, で生成された部分群で，交換子部分群 $[GL(A), GL(A)]$ と一致する．

2) $\pi_1(Y)$ が abelian gr. なる空間 Y （例えば H-空間）への $BGL(A)$ からの任意の連続写像 f は，ホモトピーの意味で i を経由する：

$$\begin{tikzcd}
BGL(A) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & BGL(A)^+ \arrow[d, dashed, "\exists f^+"] \arrow[dl, phantom, "\simeq"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

しかも，この f^+ はホモトピーを除いて unique である．

かくして $BGL(A)^+$ のホモトピー型は一意に定まる．

この plus 構成は，もっと一般に，連結 CW 複体 X と，その基本群 $\pi_1(X)$ の perfect normal subgroup N （perfectの意味は $N = [N, N]$）の対 (X, N) に対して定義され，X_N^+, $i : X \hookrightarrow X^+$ $(= X_N^+)$, $\pi_1(X^+) \cong \pi_1(X)/N$ 等が上記の場合と同様の性質をもつように作られる．例えば，$X = BGL_n(A)$ に対して，$N = E_n(A)$ （初等行列で生成された部分群）は，$n \geq 3$ の場合 perfect

となり，$BGL_n(A)^+$ が構成される．

上記の様な対 (X, N) と (Y, N') から積 $(X\times Y, N\times N')$ が生じ，

$(X\times Y)^+ \xrightarrow{\simeq} X^+\times Y^+$ はホモトピー同値写像となる．

以下の応用に必要ないくつかの写像を定義する．

群の準同型 $\oplus : GL(A)\times GL(A) \to GL(A)$ が，

$$(\alpha\oplus\beta)_{ij} = \begin{cases} \alpha_{kl} & \text{if } i=2k-1,\ j=2l-1 \\ \beta_{kl} & \text{if } i=2k,\ j=2l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義され，直和写像とよばれる．これから分類空間の写像 $BGL(A)\times BGL(A)\cong B(GL(A)\times GL(A)) \xrightarrow{B\oplus} BGL(A)$，さらに

$\mu_\oplus : BGL(A)^+\times BGL(A)^+ \simeq (BGL(A)\times BGL(A))^+ \longrightarrow BGL(A)^+$

が導かれて，$BGL(A)^+$ は H-空間となる．この写像は $BGL(A)^+$ における"加法"である．

次に，(以下 A は可換環) $BGL(A)^+$ における"乗法"に相当する別な積を定義しよう．まず行列の tensor 積によって群の準同型 $: GL_m(A)\times GL_n(A) \longrightarrow GL_{mn}(A)$ が定義され，

それから $f_{m,n} : BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+ \longrightarrow BGL_{mn}(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$

が定義される．$(m,n\geqq 3)$ そこで $BGL(A)^+$ における加法を用いて

$$\gamma_{m,n} : BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$$

を，$\gamma_{m,n} = f_{m,n} + \iota\circ f_{m,n}\circ(id\times *) + \iota\circ f_{m,n}\circ(*\times id)$

で定義する，ここで $\iota : BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$ は H-空間におけるホモトピー逆元 ($id + \iota$ がホモトピー的に可縮) で，その存在は

連結H-空間において保証されている．＊は1点（例えば基点）につぶす写像，id は恒等写像．別な表現では，

$$\gamma_{m,n}(x,y)=f_{m,n}(x,y)-f_{m,n}(x,y_0)-f_{m,n}(x_0,y),$$

ここに x_0 は $BGL_m(A)^+$ の基点，y_0 は $BGL_n(A)^+$ の基点．

写像 $f_{m,n}$ を $\gamma_{m,n}$ にとり直した理由は，次の図式のホモトピー可換性にある：

$$\begin{tikzcd} BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+ \arrow[rr] \arrow[dr, "\gamma_{m,n}"'] & \simeq & BGL_{m+1}(A)^+\times BGL_{n+1}(A)^+ \arrow[dl, "\gamma_{m+1,n+1}"] \\ & BGL(A)^+ & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+ \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\gamma_{m,n}"'] & \simeq & BGL_m(A)^+\wedge BGL_n(A)^+ \arrow[dl, dashed, "\hat{\gamma}_{m,n}"] \\ & BGL(A)^+ & \end{tikzcd}$$

これによって（必要ならば telescope 構成を用いて），写像 $\gamma_{m,n}$ の極限移行 $m\to\infty$，$n\to\infty$ が可能で，ホモトピー可換図

$$\begin{tikzcd} BGL_m(A)^+\times BGL_n(A)^+ \arrow[rr] \arrow[dr, "\gamma_{m,n}"'] & \simeq & BGL(A)^+\times BGL(A)^+ \arrow[dl, "\gamma"] \\ & BGL(A)^+ & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} BGL(A)^+\times BGL(A)^+ \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\gamma"'] & \simeq & BGL(A)^+\wedge BGL(A)^+ \arrow[dl, "\hat{\gamma}"] \\ & BGL(A)^+ & \end{tikzcd}$$

が定まる．ここで $X\wedge Y=X\times Y/X\vee Y$ はスマッシュ積，$X\vee Y=X\times y_0\cup x_0\times Y$ は wedge 和．

代数的K-群の積 $K_i(A) \times K_j(A) \longrightarrow K_{i+j}(A)$ は，可換図

$$\begin{tikzcd}
S^i \times S^j \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "a \times b"'] & S^i \wedge S^j = S^{i+j} \arrow[d, "a \wedge b"] \arrow[dd, bend left=60, "a \cdot b"] \\
& BGL(A)^+ \wedge BGL(A)^+ \arrow[d, "\hat{\gamma}"] \\
BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \arrow[ur, two heads] \arrow[r, "\gamma"] & BGL(A)^+
\end{tikzcd}$$

により定義される．

§3. 代数的K-群におけるChern類，product formula

表現のChern類 $c_i(id_n) \in H^i(GL_nA, \Omega^i_A)$ （§1参照）は，$H^i(GL_nA, \Omega^i_A) \cong H^i(BGL_n(A), \Omega^i_A)$ の元として，写像

$$c_i : BGL_n(A) \longrightarrow K(\Omega^i_A, i) \quad (\text{Eilenberg-MacLane空間})$$

を定める（正確には，ホモトピー類）．序説に述べた様に，これは写像 $c_i : BGL(A) \to K(\Omega^i_A, i)$ さらに $c_i : BGL(A)^+ \longrightarrow K(\Omega^i_A, i)$ を定め，ホモトピー群の写像

$$c_i : K_i(A) \longrightarrow \Omega^i_A \quad (i \geq 1)$$

を定める．これがK-群におけるHodge-Chern類の定義である（[Ge]）．

A が可換環のとき，tensor積 $GL_m(A) \times GL_n(A) \to GL_{mn}(A)$ から

$$f_{m,n} : BGL_m(A)^+ \times BGL_n(A)^+ \simeq B(GL_m(A) \times GL_n(A))^+ \to BGL_{mn}(A)^+ \to BGL(A)^+$$

が導びかれ，それをmodifyして

$$\gamma_{m,n} = f_{m,n} + \iota \circ f_{m,n}(id \times *) + \iota \circ f_{m,n}(* \times id) \left(+ f_{m,n}(* \times *) \right)$$

が定義された（§2）が，これは表現の言葉で言えば，

$$\gamma_{m,n} \sim (\overline{id}_m - \overline{1}_m) \otimes (\overline{id}_n - \overline{1}_n)$$

と解釈することができる．この式の右辺も m, n に関して極限移行が可能であり，従って積写像

$$\gamma \;:\; BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$$

は $\varinjlim\,(\overline{id}_m - \overline{1}_m)\otimes(\overline{id}_n - \overline{1}_n)$ から導びかれたものと考えてよい．

そこで，次の図式

$$\begin{tikzcd}
S^m \times S^n \arrow[rr] \arrow[d, "a \times b"'] & & S^m \wedge S^n = S^{m+n} \arrow[d, "a \cdot b"] \\
BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "c_m \times c_n"'] & & BGL(A)^+ \arrow[d, "c_{m+n}"] \\
K(\Omega^m, m) \times K(\Omega^n, n) \arrow[rr, dashed, "\Phi_\#"] \arrow[dr] & & K(\Omega^{m+n}, m+n) \\
& K \wedge K \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

を考えよう．上の四角形は（ホモトピー）可換である（§2）．下の四角形は，$\Phi : \Omega^m_A \otimes \Omega^n_A \longrightarrow \Omega^{m+n}_A$ を，

$$\Phi(\xi \otimes \eta) = -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!}\,\xi \wedge \eta$$

と置けば，可換となることを示そう．

先づ，上図における γ は，十分大なる r, s をとって

$$\gamma_{r,s} : BGL_r(A)^+ \times BGL_s(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$$

で置き換えてよい．上述の注意により

$$c_{m+n}\left((\overline{id}_r - \overline{1}_r)\otimes(\overline{id}_s - \overline{1}_s)\right)$$

の計算を行う．そのため splitting principle を用いて，ℓ, ℓ' を

共に1次元表現として，total Chern 類を計算する：

$$c((\ell-1_1)\otimes(\ell'-1_1)) = c(\ell\otimes\ell')\cdot c(\ell)^{-1}\cdot c(\ell')^{-1}$$

$$= (1+c_1(\ell)+c_1(\ell'))\cdot(1+c_1(\ell))^{-1}\cdot(1+c_1(\ell'))^{-1}$$

形式的に $id_r = \ell_1 + \cdots + \ell_r$，$id_s = \ell'_1+\cdots+\ell'_s$ （直和）とおけば，

$$(id_r - 1_r)\otimes(id_s - 1_s) = \sum(\ell_i - 1_1)\otimes(\ell'_j - 1_1)$$

従って，$c((id_r-1_r)\otimes(id_s-1_s)) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\left[(1+c_1(\ell_i)+c_1(\ell'_j))\cdot(1+c_1(\ell_i))^{-1}\cdot(1+c_1(\ell'_j))^{-1}\right]$

$$= \prod_{i,j}(1+\alpha_i+\beta_j)(1+\alpha_i)^{-1}(1+\beta_j)^{-1}$$

（ただし $c(id_r)=\prod_i(1+\alpha_i)$，$c(id_s)=\prod_j(1+\beta_j)$）。これは α_i, β_j に関する対称多項式であるから，α_i の基本対称式 $c_k(id_r)$，β_j の基本対称式 $c_{k'}(id_s)$ 等の多項式として表わされる：

$$1+\sum_{k\geq 1} Q_k(c_1(id_r),\cdots,c_k(id_r);\ c_1(id_s),\cdots,c_k(id_s)).$$

$$Q_{m+n} \equiv -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!}c_m(id_r)\cdot c_n(id_s) \quad \left(\bmod\ \begin{matrix} c_1(id_r),\cdots,c_{m-1}(id_r), \\ c_1(id_s),\cdots,c_{n-1}(id_s)\end{matrix}\right)$$

が成り立つことが知られている．従って前頁の図式は可換となる．

<u>定理</u>（積公式）[Bloch，その他]

$$c_{m+n}(a\cdot b) = -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!}c_m(a)\wedge c_n(b) \quad (a\in K_m(A),\ b\in K_n(A)).$$

これの応用等については省略（[L2]，[S] 参照）.

参考文献

[B] S. Bloch, Algebraic K-theory and the christalline cohomology, Publ. I.H.E.S. 47 (1977), 187-268.

[Ge] S. Gersten, "Higher K-theory of rings" in Algebraic K-theory I, Lect. Notes in Math. 341, Springer (1973), 211-243.

[Gr] A. Grothendieck, Classes de Chern et représentations linéares des groupes discrets, in Dix exposés sur le cohomologie des schémas, North Holland, 1968

[L_1] J.-L. Loday, K-théorie algébrique et représentations de groupes, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 9 (1976), 309-377.

[L_2] J.-L. Loday, Symbols en K-théorie algébric supérieure, C. R. Acad. Sc. Paris, 292 (1981), 863-866.

[Q] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, Lect. Notes in Math. 341, Springer (1973), 85-147

[S] N. Shimada, Symbols in K_n, Contemporary Math. 19 (1983), 369-378.