数理解析研究所講究録
609巻 1987年 61-75

代数的Kの Galois descent の周辺

滋賀大教育　丹羽雅彦（Masahiko NIWA）

<u>はじめに</u>　　群Gに対して，環Aと群環A[G]のK群の関係やガロア群Gの環のガロア拡大A/B（又はschemeのガロア被覆A→B)に対応した$K_*(A)$と$K_*(B)$との関係などをどんな枠組で記述したらよいか？この問題から，G-categoryとそのlimit categoryの適切な概念が得られると考えられます．Grothendieckによるa category with a Galois descent datum of Galois group G（[8]参照）の概念があります．$\mathcal{L}$をB-linear category，$\mathcal{L}_A$をスカラー拡大でえられたA-linear categoryとすると，群$G=Gal(A/B)$は$\mathcal{L}_A$上にpseudo-functorとして作用し，その一種のlimit category $\Delta_G\mathcal{L}_A$（descended categoryと呼ぶ）が最初の$\mathcal{L}$に同値になります．これを抽象化しましょう．

$(\mathcal{C}, (\alpha_s)_{s\in G}, (\mu_{s,t})_{s,t\in G})$がa <u>category with a G-descent datum</u>（または<u>G-category</u>）であるとは，$\mathcal{C}$は任意のcategory，各$s\in G$に対しα_sは$\mathcal{C}$のendo-functorでcategory同値，各(s,t)

$\in G\times G$ に対し，$\mu_{s,t}:\alpha_{st}\to\alpha_s\circ\alpha_t$ は natural isomorphism で，$\alpha_e=Id_{\mathscr{C}}$，$\mu_{e,s}=id_{\alpha_s}=\mu_{s,e}$，（$e$ は G の恒等元）

$$(\alpha_s*\mu_{t,u})\circ\mu_{s,tu}=(\mu_{s,t}*\alpha_u)\circ\mu_{st,u}\quad(s,t,u\in G)$$

を満足するものと定義する．このとき，the descended category $\Delta_G\mathscr{C}$ は，対象が対 $(X,(\lambda_s)_{s\in G})$，X は $\mathscr{C}$ の対象，各 $s\in G$ に対し，$\lambda_s:X\to\alpha_sX$ は $\mathscr{C}$ の同型で，$\lambda_e=id_X$，

$$\alpha_s(\lambda_t)\circ\lambda_s=(\mu_{s,t})_X\circ\lambda_{st}\quad(s,t\in G)$$

を満たすものからなり，射 $(X,(\lambda_s))\longrightarrow(X',(\lambda'_s))$ は $\mathscr{C}$ の射 $v:X\to X'$ で，$\alpha_s(v)\circ\lambda_s=\lambda'_s\circ v$ を満たすものからなるとして定義されます．

特に，すべての $s\in G$ に対し，$\alpha_s=Id_{\mathscr{C}}$ となる場合（trivial G-category と呼ぶ）を考えると，$\Delta_G\mathscr{C}=Cat(G,\mathscr{C})$ となります。但し，G は群を category と考えたもの，$Cat(\ ,\ )$ は functor category を表す．もし，$\mathscr{C}$ が A-linear category ならば，$Cat(G,\mathscr{C})$ は対応する A[G]-linear category となり，ここで定義した“G-category”は最初の問題の後者ばかりでなく前者をも包含していることになります．

この報告では，まず equivariant algebraic K-theory という用語で現われた種々の G-category の概念を，structure (exact category，symmetric monoidal category ....) を考えない形で関係づけます．（§**1**）次に，exact category structure

(Quillen[7])を考えたときを述べます.(§2)最後に, Dress-Kuku[1]によってtrivial G-categoryに対し展開されたinduction theoryが任意のG-categoryに一般化されることを述べます.(§3)

ここで,群Gから生ずるいくつかのcategoriesの記号を定めておきましょう.同じ文字Gにより,対象が唯一つ・で射がGの元であるcategoryを表す.ただしsにtを合成したものはtsとします.合成をstとするcategoryはG^{op}と表す.群Gのtranslation category(comma category $G/\cdot$と同じ)はEGと書く.SがG-集合のとき,対象がSの元,xからx'への射($x,x'\in S$)が$gx=x'$となるGの元gなるcategoryを$\underline{\underline{S}}$で表す.部分群$H<G$に関する$\underline{\underline{G/H}}$をよく用いる.その特殊の場合として,$\underline{\underline{G/\{e\}}}=G/\cdot=EG$,$\underline{\underline{G/G}}=G$.

§1. <u>G-categoryの種々の概念</u>

category $\mathcal{E}$と2-category $\mathcal{C}$に対し,<u>lax functor</u> $\alpha:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$とは,対象を対象に射を1-射に移し,$\mathcal{E}$の任意の対象$a$と$\mathcal{E}$の任意の合成$a\xrightarrow{t}b\xrightarrow{s}c$に対しそれぞれ2-射

$$\iota_a:\alpha(id_a)\longrightarrow id_{\alpha(a)},\quad \mu_{s,t}:\alpha(s\circ t)\longrightarrow\alpha(s)\circ\alpha(t)$$

が対応し,あるcoherence条件を満たすものとします.さらに,$\iota_a=id$($\forall a\in ob\mathcal{E}$),$\mu_{s,t}$が同型($\mathcal{E}$の$\forall$合成$a\xrightarrow{t}b\xrightarrow{s}c$)となっているとき<u>pseudo functor</u>と呼ぶ.さらに,$\mu_{s,t}=id$

（$\mathcal{E}$の$\forall$合成）となるとき（strict）functor と呼ぶ．

G-category の概念は次のように分類される．以下で，$\mathcal{C}at$ は，対象が small categories 1-射が functors 2-射が natural transformations なる 2-category を表す．

lax G-category ⊃	G-category ⊃	split G-category
$\mathcal{C}at$ への lax functor に対応	$\mathcal{C}at$ への pseudo functor に対応	$\mathcal{C}at$ への strict functor に対応
Lax Fun $(G, \mathcal{C}at)$ Oplax Fun $(G^{op}, \mathcal{C}at)$	Des(G) $\parallel$ PseudoFun$(G, \mathcal{C}at)$ $\updownarrow$ Opfib(G)	usual G-$\mathcal{C}at$ $\parallel$ Fun $(G, \mathcal{C}at)$ $\parallel$ Split(G)
Lax Fun$(G^{op}, \mathcal{C}at)$ Oplax Fun $(G, \mathcal{C}at)$	PseudoFun$(G^{op}, \mathcal{C}at)$ $\updownarrow$ Fib(G)	Fun $(G^{op}, \mathcal{C}at)$ $\parallel$ Split(G^{op})

さらに，split G-category ⊃ trivial G-category

これらすべてに対し，関係を論ずることができますが，ここでは次のものにしぼって説明します．但し，$G > H$ 部分群

	G-category	G-functor	limit category
Des(G) $\parallel$ PseudoFun$(G, \mathcal{C}at)$ Grothendieck, Rivano	G-category $\parallel$ category $\mathcal{C}$ with a G-descent datum $(\alpha_s, \mu_{s,t})$ $\parallel$ pseudo functor $\alpha : G \to \mathcal{C}at$	G-functor $\parallel$ nat. isom. を除いて G-desc. data と可換 な functor $\parallel$ pseudo natural transformation	descended category $\Delta_H \mathcal{C}$

続き	G-category	G-functor	limit category
LaxFun$(G, \mathscr{C}at)$ Thomason	lax functor $\alpha: G \to \mathscr{C}at$	lax natural transformation	lax limit $Nat_H(EH^{op}, \alpha \| H)$
Opfib(G) Fröhlich-Wall	opfibered category $\mathscr{D} \to G$ over G $\mathscr{C} = \mathrm{Ker}\,\mathscr{D} =$ uniquefiber	cartesian functor over G	representation cat. $\mathrm{Rep}(H, \mathscr{D}) =$ $\mathrm{Cart.Sec}(H \underset{G}{\times} \mathscr{D} \to H)$
Split(G) $\parallel$ Fun$(G, \mathscr{C}at)$	(strict) functor $\alpha_G: G \to \mathscr{C}at$	natural transf.	$\Delta_H \mathscr{C}_G$ $\mathscr{C}_G = \alpha_G(\cdot)$
usual G-$\mathscr{C}at$ May, Fiedorowicz Hauschild, Waner...	usual G-category $\mathscr{C}$ $\parallel$ 対象と射の集合が G-集合で str. maps が G-maps なる cat.	usual G-functor $\parallel$ 対象と射の集合の 間の maps が G-maps なる functor	$\mathscr{C}^H$ $\parallel$ H-不変な対象と 射からなる sub- category

lax から strict への移行は，Street の第一構成（e.g.［5］参照）を用いて可能で，limit category の関係もえられるがこの報告は G-category = cat. with a G-descent datum を中心とした話で，lax に関しては lax limit が descended category に category 同値になることのみ示しましょう．

このため，G-categories 間の G-functor

$(F, (\eta_s)_{s \in G}) : (\mathscr{C}, \alpha_s, \mu_{s,t}) \longrightarrow (\mathscr{C}', \alpha_s', \mu_{s,t}')$

の定義を与える．$F: \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ は functor で，各 $s \in G$ に対して $\eta_s: F \circ \alpha_s \to \alpha_s' \circ F$ は natural isom. で，$\eta_e = id_F$,

$(\alpha'_s * \eta_t)\circ(\eta_s * \alpha_t)\circ(F * \mu_{s,t}) = (\mu'_{s,t} * F)\circ \eta_{st} \quad (s,t\in G)$

を満足するものとする．<u>G-natural transformation</u> $t:(F,\eta_s)\to(F',\eta'_s)$ は n.t. $t: F\to F'$ で $(\alpha'_s * t)\circ\eta_s = \eta'_s\circ(t*\alpha_s)$ $(s\in G)$ を満たすものとする．

<u>定理 1.1</u>　$(\mathcal{C},\alpha_s,\mu_{s,t})$ が G-category，$\alpha: G\to \mathcal{C}at$ 対応する pseudo functor (i.e. $\alpha(\cdot)=\mathcal{C}$, $\alpha(s)=\alpha_s$) とするとき，

$$\operatorname{lax\,lim}_G \alpha = Nat_G(EG^{op},\alpha) \approx \Delta_G\mathcal{C}$$

$H\,(<G)$ に制限して，$Nat_H(EH^{op},\alpha|H) \approx \Delta_H\mathcal{C}$

但し，EH^{op} は functor $\varepsilon: G\to\mathcal{C}at$, $\varepsilon(\cdot)=EH^{op}$

$$\varepsilon(s): EH^{op}\to EH^{op},\ (h\xrightarrow{k}h')\mapsto(sh\xrightarrow{k}sh')\quad(s\in G,\ hk=h')$$

α の lax limit である category $Nat_G(EG^{op},\alpha)$ は explicit に対象が G-functors $(EG^{op},\varepsilon(s),id)\to(\mathcal{C},\alpha_s,\mu_{s,t})$，射がそれらの間の G-nat. transf. からなるものになる．G-functor (F,η_s) に対して，$X=F(e)$, $\lambda_s=(\eta_s)_e\circ F(s)$ とおいて $\Delta_G\mathcal{C}$ の対象 (X,λ_s) を得る．他方 (X,λ_s) が与えられたとき，$F: EG^{op}\to\mathcal{C}$ を，

$$\begin{pmatrix} s \\ \downarrow t \\ s' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F(s)=\alpha_s X \\ \quad\downarrow F(t) = (\mu_{s,t})_X^{-1}\circ\alpha_s(\lambda_t) \\ F(s')=\alpha_{s'}X \end{pmatrix} \qquad (st=s')$$

と定義して，求める category 同値がえられる．

次に G-category と opfibered category over G との関係を論ずる．これは pseudo functor と opfibered category の古典的関係 (SGA [10]) です．G-category $(\mathcal{C},\alpha_s,\mu_{s,t})$ に対し，

Grothendieck構成によって opfibered category $\mathcal{D}=\alpha\int\mathcal{C}$, unique fiberが$\mathcal{C}$, base-change functorsが$\alpha_s$, がえられる。逆に，opfibered category $\mathcal{D}\xrightarrow{\pi}G$を与えたとき，normalized cleavageが$\mathcal{C}=\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}$上にG-descent datumを定義する。$\mathcal{D}$の射fは$\pi(f)=s$となるとき，grade sの射と呼ばれる。そのとき$\mathcal{C}$は$\mathcal{D}$のgrade eの射からなるsubcategoryになる。

$s\in G$と$\mathcal{C}$の($\mathcal{D}$の)対象Xに対して，morphism of transport for X over sと呼ばれるgrade sの$\mathcal{D}$の射 $\xi_{s,X}: X\to\alpha_s X$ で，

$$\xi_{e,X}=id_X \quad (X:\mathcal{D}\text{の対象})$$

$$\xi_{s,X'}\circ v=\alpha_s(v)\circ\xi_{s,X} \quad (s\in G,\ v:X\to X'\ \mathcal{C}\text{の射})$$

$$\xi_{s,\alpha_t X}\circ\xi_{t,X}=(\mu_{s,t})_X\circ\xi_{st,X} \quad (s,t\in G,\ X:\mathcal{D}\text{の対象})$$

を満足するものが定まる。これらの射がG-categoryとopfibered category over Gを結ぶ役割を果します。 $\mathcal{D}_1$がcategory over G，$\mathcal{D}_2$がopfibered category over Gのとき，$\mathcal{D}_1$から$\mathcal{D}_2$へのcartesian functorsを対象とするcategoryを$\mathrm{Cart}_G(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$と表す。$\mathcal{D}_1$がgroupoidならば，単にfunctors over Gですが，同じ記号を用いる。

opfibered category $\pi:\mathcal{D}\to G$に対し，そのrepresentation categoryを

$$\mathrm{Rep}\,\mathcal{D}:=\mathrm{Cart.Sec}(\mathcal{D}\to G)=\mathrm{Cart}_G(G,\mathcal{D})$$

と定義する。さらに，部分群$H<G$に対して，

$$\mathrm{Rep}(H,\mathcal{D}) := \mathrm{Cart.Sec}(H \times_G \mathcal{D} \to H) = \mathrm{Cart}_G(H,\mathcal{D})$$

と定義する．$F: \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ が cartesian functor of opfibered categories over G ならば，自然に

$$\mathrm{Ker}\,F : \mathrm{Ker}\,\mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathcal{D}_2$$

$$\mathrm{Rep}(H,F) : \mathrm{Rep}(H,\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathrm{Rep}(H,\mathcal{D}_2)$$

が誘導されることに注意する．limit categories に関しては，

<u>定理 1.2</u> $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ G-category，$\mathcal{D} \to G$ を対応する opfibered category とするとき，∃ category 同値

$$\Delta_G \mathcal{C} \approx \mathrm{Rep}\,\mathcal{D}.$$

$H\,(<G)$ に制限して，$\Delta_H \mathcal{C} \approx \mathrm{Rep}(H,\mathcal{D})$．

representation category $\mathrm{Rep}(H,\mathcal{D})$ の対象は，対 (X,φ) X は $\mathcal{D}$ の ($\mathcal{C}$ の) 対象，φ は群準同型 $H \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(X)$ で，$\varphi(s)$ は grade s の射となるもの，として表せる．(λ_s) と φ を $\lambda_s \circ \varphi(s) = \xi_{s,X}$ によって対応させると，

$$\alpha_s(\lambda_t) \circ \lambda_s = (\mu_{s,t})_X \circ \lambda_{st} \iff \varphi(st) = \varphi(s) \circ \varphi(t)$$

となり，category 同値が導かれる．

Opfib(G) と Split(G) の関係は，∃ adjoint

$$\mathrm{Split}(G) \underset{\text{Giraud 構成}}{\overset{\text{Grothendieck 構成}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathrm{Opfib}(G)$$

(Giraud [3] 参照)．opfibered category $\mathcal{D} \to G$ with the unique fiber $\mathcal{C}$ に対し，Giraud 構成により functor

$\alpha_G : G \to \mathcal{C}at$, $\cdot \mapsto \mathcal{C}_G := \mathrm{Cart}_G(G/\cdot, \mathcal{D})$

が対応し，さらに α_G に対応する opfibered category を $\mathcal{D}_G \to G$ と書くと，自然な functor $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_G$ は G 上の fiber 同値になる．特に，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}_G$（fiber ゆえ），$\Delta_G \mathcal{C}$ と $\Delta_G \mathcal{C}_G$（cartesian sections に同値ゆえ）は category 同値になる．

一般に，

<u>命題 1.3</u>　$(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ G-category，$\mathcal{D} \to G$ 対応する opfibred category，$\mathcal{C}_G = \mathrm{Cart}_G(G/\cdot, \mathcal{D})$ とおくと，$H\ (<G)$ に対し

$$\Delta_H \mathcal{C} \approx \Delta_H \mathcal{C}_G .$$

最後に，$\mathcal{C}_G$ を usual G-category と考えて，H-fixed subcategory $(\mathcal{C}_G)^H$ に関する結果を述べる．

<u>命題 1.4</u>　$H < G$ のとき，自然な functor（§3 参照）

$\mathrm{Cart}_G(\underline{\underline{G/H}}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Cart}_G(\underline{\underline{G/\{e\}}}, \mathcal{D}) = \mathrm{Cart}(G/\cdot, \mathcal{D})$

は $(\mathcal{C}_G)^H$ の上への category 同型になる．

<u>命題 1.5</u>　∃ adjoint pair of functors

$$\mathrm{Cart}_G(\underline{\underline{G/H}}, \mathcal{D}) \underset{\longleftarrow}{\overset{\perp}{\longrightarrow}} \mathrm{Cart}_G(H, \mathcal{D}) .$$

1.4，1.5 は両辺の categories を explicit に書いて対応を与えればよい．(詳細略)　1.5 において $H = G$ or $\{e\}$ のときは category 同値になることに注意する．1.2～1.5 を結べば，

<u>定理 1.6</u>　∃ homotopy 同値

$$\Delta_H \mathcal{C} \simeq (\mathcal{C}_G)^H .$$

§ 2. Exact G-categories

structureをもったG-categoryの定義は，pseudo functor $G \to \mathcal{C}at$ の $\mathcal{C}at$ の部分をstructureをもったsmall categoriesの2-categoryに取り換えることにより定義される．特に，

定義 2.1　G-category $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ が additive (resp. abelian resp. exact) G-category であるとは，$\mathcal{C}$ がadditive (resp. abelian resp. exact) categoryで，各 $s \in G$ について α_s がadditive (resp. exact resp. exact) functorとなるときいう．

この場合，$\mathcal{C}at$ で考えたlimit categoryがstructureをもったときのlimit categoryにもなる．

命題 2.2　$(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ を additive (resp. abelian resp. exact) G-category，$\mathcal{D} \to G$ を対応するopfibered category，$\mathcal{E} \to G$ を任意のgroupoid over G とするとき，$\mathrm{Cart}_G(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ は自然にadditive (resp. abelian resp. exact) categoryになる．

coproduct, kernel, cokernel, exact sequenceなどは $\mathcal{E}$ の各対象上そうなるものとして定義する．証明は公理を順々に確かめていけばよい．この命題は，Gを任意のcategoryに，$\mathcal{E}$ をすべての射がcartesian射である任意のover categoryにおきかえても成立することに注意する．

系 2.3　命題と同じ仮定の下，$H\ (< G)$ に対して，

$\Delta_H\mathcal{C}$, $\mathrm{Rep}(H,\mathcal{D})$, $\Delta_H\mathcal{C}_G$, $(\mathcal{C}_G)^H$ はすべて自然に additive (resp. abelian resp. exact) category になる.

さて, exact G-category に対し, Quillen の Q構成との関係を述べよう.

<u>定理 2.4</u> $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ を G-category, $\mathcal{D}\to G$ を対応する opfibered category, $\mathcal{E}\to G$ を任意の G上の groupoid とするとき, $Q\mathcal{C}$ は G-category の構造をもち, 対応する opfibered category を $Q_f\mathcal{D}$ と書くと, ∃ category 同値

$$Q\,\mathrm{Cart}_G(\mathcal{E},\mathcal{D}) \approx \mathrm{Cart}_G(\mathcal{E}, Q_f\mathcal{D}).$$

$\mathcal{E}$ が groupoid を考慮して, $Q\mathcal{C}$ における同型は $\mathcal{C}$ の同型に等しい事に注意すれば容易に証明できる.

<u>系 2.5</u> 定理と同じ仮定の下, $H(<G)$ に対して,

$$\Delta_H Q\mathcal{C} \approx Q\Delta_H\mathcal{C}, \quad Q\,\mathrm{Rep}(H,\mathcal{D}) \approx \mathrm{Rep}(H, Q_f\mathcal{D}),$$
$$(Q\mathcal{C}_G)^H \approx Q(\mathcal{C}_G)^H.$$

前2者は定理において $\mathcal{E}=H$ と取る. 後者は,

$$\begin{aligned}(Q\mathcal{C}_G)^H &= (Q\,\mathrm{Cart}_G(G/\cdot,\mathcal{D}))^H \approx (\mathrm{Cart}_G(G/\cdot, Q_f\mathcal{D}))^H \\ &\approx \mathrm{Cart}_G(\underline{\underline{G/H}}, Q_f\mathcal{D}) \approx Q\,\mathrm{Cart}_G(\underline{\underline{G/H}},\mathcal{D}) \\ &\approx Q(\mathrm{Cart}_G(G/\cdot,\mathcal{D}))^H = Q(\mathcal{C}_G)^H.\end{aligned}$$

§3 <u>Induction theory</u>

この§では, 群 G は有限群又は profinite 群とし, finite G-sets と G-maps の category $\mathcal{S}_G^f$ を考える.

$\mathcal{S}_G^f$ の射 $\varphi: S \to T$ に対し，functor

$$\underline{\underline{\varphi}}: \underline{\underline{S}} \to \underline{\underline{T}} \qquad (x \xrightarrow{g} x') \longmapsto (\varphi(x) \xrightarrow{g} \varphi(x')) \quad (gx = x')$$

が対応する．$(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ を exact G-category，$\mathcal{D} \to G$ を対応する opfibered category とすると，命題2.2 より

$$\mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}) := \mathrm{Cart}_G(\underline{\underline{S}}, \mathcal{D}) = \mathrm{Cart.Sec}(\underline{\underline{S}} \underset{\underline{G/G}}{\times} \mathcal{D} \to \underline{\underline{S}})$$

は exact category になる．$\mathcal{S}_G^f$ の射 $\varphi: S \to T$ に $\mathrm{Rep}(S,\mathcal{D})$ と $\mathrm{Rep}(T,\mathcal{D})$ の間の2つの exact functors が対応する．

$$\mathrm{Rep}(T, \mathcal{D}) \underset{\varphi^*}{\overset{\varphi_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D})$$

$$\varphi_*(\underline{\underline{T}} \xrightarrow{\xi} \mathcal{D}) = (\underline{\underline{S}} \xrightarrow{\xi \circ \underline{\underline{\varphi}}} \mathcal{D})$$

$$\varphi^*(\underline{\underline{S}} \xrightarrow{\xi} \mathcal{D})(x) = \bigoplus_{z \in \varphi^{-1}(x)} \xi(z), \quad \varphi^*(\xi)(x \xrightarrow{g} x') = \bigoplus_{z \in \varphi^{-1}(x)} \xi(z \xrightarrow{g} gz)$$

φ_* が restriction，φ^* が induction である．res, ind の構成は，G の有限指数の部分群 $H \supset K$ に対して

$$\mathrm{Rep}(H, \mathcal{D}) \underset{\mathrm{ind}}{\overset{\mathrm{res}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}(K, \mathcal{D})$$

を表現達の res, ind の如く定義することによっても得られる．この定義が上の定義と natural isomorphism を除いて同値であることも示せる．

いくつかの性質を証明なしで述べる．

<u>命題3.1</u>　1) $\mathcal{S}_G^f$ の射の合成 $S \xrightarrow{\varphi} T \xrightarrow{\psi} U$ について

$$(\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*, \quad (\psi \circ \varphi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$$

2) $\mathrm{Rep}(S \amalg T, \mathcal{D}) \approx \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}) \times \mathrm{Rep}(T, \mathcal{D})$

3) (pull-back formula)

pull-back diagram
$$\begin{tikzcd} S_1 \times_T S_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_1"'] & S_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ S_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & T \end{tikzcd}$$
に対して,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}(S_1 \times_T S_2, \mathcal{D}) \arrow[r, "\psi_2^*"] & \mathrm{Rep}(S_2, \mathcal{D}) \\ \mathrm{Rep}(S_1, \mathcal{D}) \arrow[r, "\varphi_1^*"] \arrow[u, "\psi_{1*}"] & \mathrm{Rep}(T, \mathcal{D}) \arrow[u, "\varphi_{2*}"'] \end{tikzcd}$$

は nat. isom. を除いて可換.

1)〜3) は, $\mathrm{Rep}(-, \mathcal{D}) : \mathcal{S}_G^f \to$ (exact categories) の Mackey 性を表す.

$\mathcal{C}_i$ を exact G-categories, $\mathcal{D}_i \to G$ を対応する opfibered categories $(i = 1, 2, 3)$. exact pairing $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ は pairing $\mathcal{D}_1 \times_G \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathcal{D}_3$ over G を定義し, $\mathcal{S}_G^f$ の任意の対象 S に対して, exact pairing

$$\mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}_1) \times \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}_2) \longrightarrow \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}_3)$$

を誘導する.

<u>命題 3.2</u> (<u>projection formula</u>) $\mathcal{S}_G^f$ の射 $\varphi : S \to T$ に対し,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}(T, \mathcal{D}_1) \times \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}_2) \arrow[r, "\varphi_* \times 1"] \arrow[dd, "1 \times \varphi^*"] & \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}_1) \times \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}_2) \arrow[d, "\text{pairing}"] \\ & \mathrm{Rep}(S, \mathcal{D}_3) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ \mathrm{Rep}(T, \mathcal{D}_1) \times \mathrm{Rep}(T, \mathcal{D}_2) \arrow[r, "\text{pairing}"] & \mathrm{Rep}(T, \mathcal{D}_3) \end{tikzcd}$$

は nat. isom. を除いて可換.

参考文献

[1] W.N. Dress - A.O. Kuku, A convenient setting for equivariant higher algebraic K-theory, Springer L.N. 966 (1982) 59-68

[2] Z. Fiedorowicz - H. Hauschild - J.P. May, Equivariant algebraic K-theory, Springer L.N. 967 (1982) 23-80

[3] J. Giraud, Méthode de la descente, Bull. Soc. Math. France, Mém. n°2 (1964)

[4] J.W. Gray, Fibered and cofibered categories, Proc. Conf. Categorical Algebra, Springer (1966) 21-83

[5] J.P. May, Pairings of categories and spectra, J. Pure Appl. Algebra 19 (1980) 259-282

[6] M. Niwa, Relations between various notions of G-categories, Mem. Fac. Educ. Shiga Univ. 35 (1985) 13-18

[7] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, Springer L.N. 341 (1973) 85-147

[8] N.S. Rivano, Catégories Tannakiennes, Springer L.N. 265 (1972)

[9] K. Shimakawa, A note on equivariant algebraic K-theory

[10] S.G.A. 1, Springer L.N. 224 (1971) Exposé VI

[11] R. Thomason, The homotopy limit problem, Contemporary Math. 19 (1983) 407-419

[12] R. Thomason, Algebraic K-theory and etale cohomology, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 18 (1985) 437-552