数理解析研究所講究録
610巻 1987年 137-144



# 多重劣調和函数に付随したディリクレ空間について

岡田正已(Masami Okada)東北大理・数学教室

以下は、主として、福島氏との共同研究 [9] に基づくものです。ポテンシャル論と確率論との、かかわりに於いて、一方のどの部分が、他方のどの部分に対応しているのかを、比較検討するのは、一つの問題意識だと考えられます。以下では、上記 [9] の中で、マルチンゲールを用いた所が、もともとの Beurling-Deny [2] の考え方を、もとにして、どのように示されるか、を述べたいと思います。10月に、数理研での講演で、不明確であった点は、酒井氏に話をうかがった後、次のような形にしました。研究集会の際、各位に御世話になり感謝します。尚、勝手乍ら、以下では、骨組を述べるだけの部分が多く、詳細は文献 [9] および、その参考文献を御覧下さる様、お願いします。

§1. (1) 定義など; $\mathbb{C}^n$ の有界領域 $D$ 上で定義された、有界多重劣調和函数の集合を $\mathcal{P}_b(D)$ と書きます。滑らかな函数 $\varphi$ に対して、$d^c$ を $d^c\varphi = \sqrt{-1}(\bar{\partial}-\partial)\varphi$ として定義します。

従って $dd^c\varphi = 2\sqrt{-1}\sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ となります。その、$k$ケの外積を $(dd^c\varphi)^k$ と略記します。但し、$k=1, 2, \cdots n$ です。$\varphi$ が滑らかと限らない時は、各点ごとには定義できませんが、次の Bedford − Taylor らによって得られた事実を使うことにします。

<u>補題</u>　$\mathcal{P}_b(D)$ の単調列 $\{p_j\}$ が与えられたとし、D上殆んど至る所、$p_j \longrightarrow p \in \mathcal{P}_b(D)$ とします。このとき、$(dd^c p_j)^k \longrightarrow (dd^c p)^k$ が ＊弱収束の意味で成立する。

この補題により、任意の $p \in \mathcal{P}_b(D)$ に対して、ディリクレ積分が次で定義できます。

$$\mathcal{E}^{(p)}(\varphi, \psi) = \int_D d\varphi \wedge d^c\psi \wedge (dd^c p)^{n-1} \qquad \varphi, \psi \in C_0^2(D),$$

また、$\|\varphi\|^{(p)} = \sqrt{\mathcal{E}^{(p)}(\varphi, \varphi)}$ でノルム $\|\ \|^{(p)}$ を定義しておきます。

(注意)　$z = (z_1, \cdots, z_n) \in D$, $|z|^2 = \sum |z_j|^2$ として、$m^{(p)}(dz) = dd^c|z|^2 \wedge (dd^c p)^{n-1}$ とおけば、$m^{(p)}$ は D上の非負ラドン測度（係数の体積要素）になりますが、我々は、次を満たすような p を、以下で考えるものとします。

$$m^{(p)}(O) > 0 \qquad \text{for } \forall O \subset D \text{ 開集合.}$$

$C_0^2(D)$ の $\|\ \|^{(p)}$ に関する完備化空間を $\mathcal{F}^{(p)}$ と書きます。すると、ディリクレ空間 $(\mathcal{F}^{(p)}, m^{(p)})$ は $L^2(D, m^{(p)})$ の閉部分空間となることが、次の Poincaré 不等式より、でてきます。

$$\int_D \varphi^2\, m^{(p)}(dz) \leqq C\|p\|_\infty\, \mathcal{E}^{(p)}(\varphi,\varphi), \qquad \varphi\in C_0^2(D).$$

とくに $p(z)=|z|^2$ のときは、$\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^{2n}$ のラプラシアン、になるような $\Delta^{(p)}$ を、ラドン・ニコデューム微分 $\Delta^{(p)}\varphi = \dfrac{dd^c\varphi\wedge(dd^cp)^{n-1}}{m^{(p)}(dz)}$

で定義すると次を得ます。

<u>系</u>　グリーン作用素 $G^{(p)}=(\Delta^{(p)})^{-1}$ は $L^2(D, m^{(p)})$ から $\mathfrak{F}^{(p)}$ への有界作用素となる。

(2) Beurling - Deny 理論からの準備;

$K\subset D$ をコンパクトな部分集合、$f$ を $\mathbb{C}^n$ の多項式の $K$ への制限、とするとき、$\mathcal{H}^{(p)}_{K,f}$ を $\mathcal{H}^{(p)}_{K,f}=\{u\in\mathfrak{F}^{(p)} \mid u=f \text{ on } \partial K\}$ で定義します。このとき $\mathcal{H}^{(p)}_{K,f}\neq\phi$ です。そこで、$(\mathfrak{F}^{(p)}, m^{(p)})$ は Hilbert space ですから、周知の如く、$\mathcal{H}^{(p)}_{K,f}$ の中で $\|\ \|^{(p)}$ －ノルムを最小にする元 $U_{K,f}\in\mathfrak{F}^{(p)}$ が一意的に定まります。一般の $\Delta^{(p)}$ と $K$ に対して、なので、$\partial K$ 上至る所 $U_{K,f}=f$ というわけではないでしょうが、ともかく、小さな除外集合の外では（$\mathfrak{F}^{(p)}$－capacity q.e.）等式が成立します。さて、次が、わかります。

<u>命題</u> (i) $\Delta^{(p)}U_{K,f}=0 \quad \text{in } \mathring{K}\cup(D\setminus K)$

(ii) $U_{K,f+g}=U_{K,f}+U_{K,g}$　但し、$f, g$ は $\mathbb{C}^n$ の多項式を $\partial K$ に制限したもの。

(i) は、変分を用いた、標準的な議論よりOK. (ii) は (i) と、次のスペクトル合成の定理より、すぐに出てきます。

<u>定理</u> ( Deny [7], see also [8])

$u \in \mathfrak{F}^{(p)}(D)$, $\Delta^{(p)} u = 0$ in $D \setminus K$, $u = 0$ $\mathfrak{F}^{(p)}$-q.e on $K$

$\Longrightarrow$ $u = 0$ in $\mathfrak{F}^{(p)}(D)$ i.e. $u = 0$ q.e. in $D$.

(注意) $U_{K,-1} = u_K^{(p)}$ 但し、右辺は次で定義される $v_K^{(p)}$ の upper regularization です。(即ち $-\overline{H}_K^{(p)}(-1)$ とでも書くべき所 )

$$v_K^{(p)}(z) = \sup\left\{ u(z) \;\middle|\; \begin{array}{l} u : \Delta^{(p)}\text{-subharmonic}, \quad u \le 0 \text{ in } D \\ u \leqq -1 \text{ on } K \end{array} \right\}$$

<u>系</u> $z \in D \setminus K$ q.e. に対して、$\partial K$ 上の測度(調和測度) $d\mu^{(p)}_{K,z}$ が存在して、$U_{K,f}(z) = \int_{\partial K} f(w)\, d\mu_{K,z}(w)$ .

これは、まず、$\partial K$ 上、多項式(の制限)に対しては、$U_K(f)(z) = U_{K,f}(z)$ が $z \in D \setminus K$ q.e. に定義されていること、つぎに、$U_K(f+g)(z) = U_K(f)(z) + U_K(g)(z)$ と云うこと、さらに、多項式全体は $C(\partial K)$ 上 dense である、ということから導かれます。

(3) 今まで $p \in \mathcal{P}_b(D)$ に対して、ディリクレ空間 $(\mathfrak{F}^{(p)}, m^{(p)})$ を考えてきましたが、以下、$p = q + \delta |z|^2$ (但し $q \in \mathcal{P}_b(D)$, $\delta > 0$)、の形をした $p$ のみを考えます。このとき $m^{(p)}$ を、ルベーグ体積要素 $dV$ でおきかえても $(\mathfrak{F}^{(p)}, V)$ は、ディリクレ

空間になることがわかります。上のような族を $\mathcal{P}_+(D)$ とおきます。

§2 (1) Siciak, Zaharjuta 各氏らの extremal plurisubharmonic function $u_E^*$ を次で定義します。$E \subset D$ に対して、まず $u_E$ を $u_E(z) = \sup\{v(z) \mid v \in \mathcal{P}_b(D),\ v \leqq -1 \text{ on } E,\ v \leqq 0 \text{ in } D\}$ と定義し、$u_E^*$ は、$u_E$ の upper regularization とします。さらに、Cegrell, Sadullaev 各氏らによって調べられた、キャパシティ函数 $C_\#(E)$ を $C_\#(E) = -\int_D u_E^*(z)\,dV(z)$ で定義します。これは、次の性質を持っていることが知られています。

命題 (i) 劣加法性 (ii) 外側正則性 (iii) 単調増大性.

系 (Cegrell・Sadullaev) $C_\#$ は Choquet capacity.

(2) いよいよ次が示せます。

定理 $-u_E^* = \sup\limits_{p \in \mathcal{P}_+} (-u_E^{(p)})$ a.e.

(証明) $\geqq$ は、定義より、明らかです。$\leqq$ の方を示します。まず $E = K$ コンパクト集合のとき $-u_K^* = \lim\limits_{\ell \to \infty} -u_E^{(p_\ell)}$ 但し、$p_\ell(z) = u_K^*(z) + \frac{|z|^2}{\ell}$ を目標にします。それには、まず、次を示します。

補題 $u_K^* - \frac{n-1}{\ell}|z|^2$ は $\Delta^{(p_\ell)}$-superharmonic in $D \setminus K$

$$\left( \begin{array}{l} \because\ \Delta^{(p_\ell)}\left(u_K^* - \frac{n-1}{\ell}|z|^2\right) dV = dd^c\left(u_K^* - \frac{n-1}{\ell}|z|^2\right) \wedge (dd^c p_\ell)^{n-1} \\ \qquad\qquad \leqq (dd^c u_K^*)^n \\ \text{ここで } D \setminus K \text{ 上 } (dd^c u_K^*)^n = 0 \text{ by Bedford-Taylor.} \end{array} \right)$$

次に、§1で定まった調和測度 $d\mu_{K,z}^{(p_\ell)}$ を用いて、

$$\int_{\partial K}\left(u_K^*(w)-\frac{n-1}{\ell}|w|^2\right)d\mu_{K,z}^{(p_\ell)}(w) \leqq u_K^*(z)-\frac{n-1}{\ell}|z|^2 \quad q.e.$$

よって、
$$-u_K^*(z) \leqq \int_{\partial K} d\mu_{K,z}^{(p_\ell)}(w) + \frac{c\ \mathrm{diam}(D)^2}{\ell}$$
$$= -u_K^{(p_\ell)}(z) + c\,\frac{\mathrm{diam}(D)^2}{\ell}.$$

両辺の積分をとって

$$-\int_D u_K^*(z)\,dV(z) \leqq -\int_D u_K^{(p_\ell)}(z)\,dV(z) + C'\,\frac{\mathrm{diam}(D)^{2+2n}}{\ell}.$$

ここで $C_\#$ が、キャパシティだったので

$$(*)\qquad C_\#(E)=\sup_{\substack{K\subset E\\ \text{compact}}} C_\#(K) \leqq -\int_D u_E^{(p_\ell)}(z)\,dV(z) + \frac{C''}{\ell}$$

以上で $C_\#(E) \leqq \varliminf_{\ell\to\infty} -\int_D u_E^{(p_\ell)}(z)\,dV(z)$ が示せました。

積分したものに対して不等式が示せたことと、逆の不等式は、常に成立していたことから、定理が示せました。 q.e.d.

(3) キャパシティsの比較： $C^{(p)}$ と $C_{BT}$ を、次で定義します。

$$C^{(p)}(K) = \inf_{\varphi\geqq 1 \text{ on } K,\ \varphi\in C_0^2} \mathcal{E}^{(p)}(\varphi,\varphi)$$

$$C_{BT}(K) = \sup_{\substack{0<q<1\\ q\in \mathcal{P}_b(D)}} \int_K (dd^c q)^n .$$

まず、$\sup_{p\in\mathcal{P}_b(D)} C^{(p)}(K) \simeq C_{BT}(K)$ が、わかっています。

次に $(*)$ において $\frac{c''}{\ell} = \frac{C_{\#}(K)}{2}$ となるように $\ell = L$ を固定すれば、

$$C_{\#}(K) \leqq 2\int_D -u_K^{(P_L)}(z)\,dV(z),$$

さらに、右辺は、$G^{(P_L)}$ の定義により $\int_D -u_K^{(P_L)}dV = (1, -u_K^{(P_L)})_{L^2} =$ $\mathcal{E}^{(P_L)}(G^{(P_L)}1, -u_K^{(P_L)})$ で、これにシュワルツの不等式を使って、結局

$$\begin{aligned} C_{\#}(K) &\leq 2\,\mathcal{E}^{(P_L)}(G^{(P_L)}1, -u_K^{(P_L)}) \\ &\leqq 2\sqrt{\mathcal{E}^{(P_L)}(G^{(P_L)}1, G^{(P_L)}1)}\sqrt{\mathcal{E}^{(P_L)}(u_K^{(P_L)}, u_K^{(P_L)})} \\ &\leqq c''' L^{-\frac{n-1}{2}}\sqrt{C^{(P_L)}(K)} \\ &\leqq c^{(4)}\, C_{\#}(K)^{-\frac{n-1}{2}}\sqrt{C_{BT}(K)} \end{aligned}$$

これから $C_{\#}^{n+1}(K) \leqq c^{(5)}\ C_{BT}(K)$ を得ます。

$C_{BT}(K) \leqq \mathrm{const}\,(\mathrm{dist}(K, \partial D))^{-n-1}\, C_{\#}(K)$ は、よく知られたテクニックから、すぐに出ます [5]。

(注意) (2)の等式は、a.e. より強く、q.e. 成立するだろうと思いますが、証明はしていません。

References


[1] H.Bauer, Harmonic spaces and associated Markov Processes, Potential theory, CIME (1969) 23-67.

[2] A.Beurling- J.Deny, Espaces de Dirichlet. Le cas élémentaire, Acta Math., t.99(1958) 203-224.

[3] E.Bedford- B.A.Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math., 149 (1982) 1-44.

[4] U.Cegrell, Capacities and extremal plurisubharmonic functions on subsets

of $\mathbb{C}^n$ , Arkiv Mat., 18 (1980) 199-206.

[5] S.S.Chern- H.I.Levine- L.Nirenberg, Intrinsic norms on complex manifold, Global Analysis, Univ. of Tokyo Press, Tokyo (1969) 119-139.

[6] R.Courant, Dirichlet's Principle .... ., Intersience Publishers,Inc., New York, 1950.

[7] J.Deny, Méthodes Hilbertiennes en Théorie du Potentiel, Potential theory, CIME (1969) 121-201.

[8] M.Fukushima, Dirichlet Forms and Markov Processes, Kodansha and North-Holland, 1980.

[9] ---- -M.Okada, On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions, to appear in Acta Math.

[10] B.Gaveau- J.Ławrynowicz, Intégrale de Dirichlet sur une variété complexe I. Vol. 919, Springer Lec. Notes, 1982.

[11] M.Okada, Potentiels kähleriens et espaces de Dirichlet, C.R.Acad. Sc. Paris, t. 292 (1981) 159-161.

[12] A.Sadullaev, Plrisubharmonic measures and capacities on complex manifolds, Russian Math. Surveys, 36(1981), 61-119.

[13] J. Siciak, Plurisubharmonic functions and capacities in $\mathbb{C}^n$ , Lect. Notes No. 14, Sophia Univ., Tokyo, 1982.