数理解析研究所講究録
611巻 1987年 173-186

A fully stochastic version of the Anscombe condition

福岡大学　杉万 郁夫 (Ikuo Sugiman)

§1 序

確率変数列 $\{Y_n\}$ と同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された正整数値確率変数の列 $\{\tau_n\}$ が与えられているとき、

$$Y_{\tau_n}(\omega) = Y_{\tau_n(\omega)}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega)$$

で定義される確率変数の列 $\{Y_{\tau_n}\}$ は、確率添字を伴った確率変数列と呼ばれている。また、通常の極限定理、即ち、$\{Y_n\}$ とその極限分布 $F(x)$ が与えられ、$\{\tau_n\}$ が ∞ に確率収束するとき、$\{Y_{\tau_n}\}$ の分布が $\{Y_n\}$ と同じ $F(x)$ に収束することを、確率添字を伴った極限定理 (Random limit theorem) と呼び、この為の $\{Y_n\}$ や $\{\tau_n\}$ に関する条件が古くから研究されている。

この類の極限定理は、逐次推定法における停止規則の妥当性を与える為に用いられるだけでなく、適当な変形を通じて、停止時刻自体の満足する極限定理に変換され、停止時刻の有

界性に関する具体的評価（ $P(\tau_n \leqq M_n) \geqq 1-\varepsilon$ ）を与えることで、その実用性を裏付けるものである（[5],[6]）。また、理論的には、*stable limit theorem* や *mixing limit theorem* との関連で、極限分布 $F(x)$ の特徴付けの一つとして研究されている（[2],[10]）。

これ迄に行われてきた *random limit theorem* に関する研究は、大きく二つに分けることができる。一方は、$\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性が *random limit theorem* の十分条件であることに着目し、この独立の概念を弱めることでその適用範囲を広げようとするものである（[8]）。しかし、前に述べた停止規則への応用を考えるとき、$\{Y_n\}$ の観測が殆んど活かされていない停止規則の議論にどれ程の意義があるのか疑問である。他方、$\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性に関する仮定を全く設けず、$\{Y_n\}$ と $\{Y_{\tau_n}\}$ の差を直接評価する為に、$\{Y_n\}$ の収束の確率論的一様性を導入したのが *Anscombe* [3] である。

この $\{Y_n\}$ の収束に対する一様性の条件：

“任意の正数 ε に対して、

$$\limsup_{n\to\infty} P\left(\max_{i:|i-n|\leqq \delta n} |Y_i - Y_n| \geqq \varepsilon\right) \leqq \varepsilon$$

となる正数 δ が存在する。”

は *Anscombe* 条件と呼ばれ、τ_n/n が定数に確率収束する場

合に random limit theorem が成り立つ為の十分条件となる。この条件は、その後、様々な形に一般化され、幾つかの random CLT(中心極限定理)に適用されている([4],[11])。しかし、更に適用範囲を広げることが求められると共に、応用上の基本的仮定の一つである $\{\tau_n\}$ が停止規則の列であることを活かせる条件にすることは、今後の課題として残されている。

ここでは、これらの基本的設定の異なる十分条件を極限定理に確率添字を導入する手法と見做し、二つ或いは二回以上手法を組みあわせることで従来の結果を一つにまとめることを目的とする。また、その立場から必要なそれぞれの手法の一般化について述べる。

この報告では、次の節以降も、ここで述べたように、次のことを仮定する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$;確率空間

$\{Y_n\}$;$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数の列

$F(x)$;分布関数

〈仮定〉 $Y_n \xrightarrow{d} F(x)$ (法則収束)

$\{\tau_n\}$;$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の正整数値確率変数の列

〈仮定〉 $\tau_n \xrightarrow{P} \infty$ (確率収束)

§2　一様に漸近的 ε-独立な確率添字の列

この節では §1 で述べた手法のうち、$\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性について述べる。この条件は、$\{Y_{\tau_n}\}$ の定義から、二つの集合列 $\{Y_k \leqq x\}$, $\{\tau_n = k\}$ $(k=1,2,\cdots)$ の間の独立性が、$F(x)$ の全ての連続点 x と十分大きな n について成り立てばよい。このことと、他の手法との組みあわせを考えて、次のように独立性を一般化する。

2つの可測集合列 $\{A_k\}$, $\{B_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$ と任意の正数 ε に対して、

$$\liminf_{m\to\infty} \left| \sum_{k=m}^{\infty} \{ P(A_k \cap B_k) - P(A_k)P(B_k) \} \right| < \varepsilon$$

が成り立つとき、$\{B_k\}$ は $\{A_k\}$ と漸近的に ε-独立であるという。この定義は、$\{A_k\}$ と $\{B_k\}$ の独立性を弱めたものであるが、ここで適用する場合のように、Ω の分割 $\{B_k\}$ は、任意の可測集合列 $\{A_k\}$ と漸近的 ε-独立になる。更に、可測集合の二重列 $\{B_k^{(n)}\}$ $(k=1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots)$ が $\{A_k\}$ と一様に漸近的 ε-独立であるとは、

$$\liminf_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=m}^{\infty} \{ P(A_k \cap B_k^{(n)}) - P(A_k)P(B_k^{(n)}) \} \right| < \varepsilon$$

が成り立つこととする。

定義 2.1

確率添字の列 $\{\tau_n\}$ が、$x \in \mathbb{R}$ で $\{Y_n\}$ と一様に漸近的 ε-独立であるとは、$\{B_k^{(n)} = \{\tau_n = k\}\}$ が $\{A_k = \{Y_k \leqq x\}\}$ と一様に漸近的 ε-独立となることである。又、$\{\tau_n\}$ が $F(x)$ の任意の連続点において $\{Y_n\}$ と一様に漸近的 ε-独立であるとき、単に、$\{\tau_n\}$ は $\{Y_n\}$ と一様に漸近的 ε-独立であるという。

補題 2.2

$\{Y_n\}$, $\{\tau_n\}$ は §1 で述べられた確率変数の列とする。このとき、$\{\tau_n\}$ が $\{Y_n\}$ と一様に漸近的 ε-独立ならば、任意の $F(x)$ の連続点 x に対して、

$$\limsup_{n\to\infty} | P(Y_{\tau_n} \leqq x) - F(x) | < 2\varepsilon$$

が成り立つ。

この補題から、明らかに、次の定理が示せる。

定理 2.3

$\{Y_n\}$, $\{\tau_n\}$ は §1 で述べられた確率変数の列とする。このとき、任意の正数 ε に対し $\{\tau_n\}$ が $\{Y_n\}$ と一様に漸近的 ε-独立ならば、$Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$ が成り立つ。

（補題 2.2 の証明）

任意の $F(x)$ の連続点 x に対して、$Y_n \xrightarrow{d} F(x)$ より、

$$|P(Y_k \leqq x) - F(x)| < \varepsilon/3 \qquad (k \geqq K)$$

となる正整数 K が存在する。$\{\tau_n\}$ は $\{Y_n\}$ と一様に漸近的 ε-独立であるから、$n \geqq N_1$ なる任意の n について

$$\left|\sum_{k=M}^{\infty}\{P(Y_k \leqq x,\ \tau_n = k) - P(Y_k \leqq x)P(\tau_n = k)\}\right| < \varepsilon$$

となる正整数 $M(\geqq K)$ と N_1 が存在する。又、$\tau_n \xrightarrow{P} \infty$ より

$$P(\tau_n < M) < \varepsilon/3 \qquad (n \geqq N_2)$$

となる正整数 N_2 が存在する。従って、$n \geqq N = N_1 \vee N_2$ のとき、

$$\begin{aligned}
&|P(Y_{\tau_n} \leqq x) - F(x)| \\
&\leqq P(Y_{\tau_n} \leqq x,\ \tau_n < M) + F(x)P(\tau_n < M) \\
&+ \left|\sum_{k=M}^{\infty}\{P(Y_{\tau_n} \leqq x,\ \tau_n = k) - P(Y_k \leqq x)P(\tau_n = k)\}\right| \\
&+ \sum_{k=M}^{\infty}|P(Y_k \leqq x) - F(x)|\cdot P(\tau_n = k) \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon + \varepsilon/3 = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

□

§3　Anscombe 条件の一般化

次に、もう一つの手法である Anscombe 条件の拡張を二つの方向に試みる。§1 でも述べたように、Anscombe 条件とそれによって導かれる random limit theorem は、多くの研究者によって拡張されているが、その多くは対応する $\{\tau_n\}$ につい

ての条件に着目したものである。Anscombe [3] によって議論された'$\tau_n / n \xrightarrow{P} c\ (>0,$ 定数$)$'を初めとして、最も議論された'$\tau_n / a_n \xrightarrow{P} 1$'、更に、norming factor $\{k_n\}$ を用いた'$k_{\tau_n} / k_{a_n} \xrightarrow{P} 1$'([7])や、収束の速さを導入した'$P(|(k_{\tau_n}/k_{a_n}) - 1| > \delta_{a_n}) \to 0$'([11])等である。又、理論的には、$\{\tau_n\}$ を無限大に発散する正整数列 $\{a_n\}$ で確率的に近似するという見地から、'$\sqrt{\tau_n} - \sqrt{a_n} \xrightarrow{P} 0$'や、最も直接的な表現として、'$P(|\tau_n - a_n| > \delta_n) \to 0$'も考えられる。そこで、$\{f(n)\}$ を無限大に発散する非減少列とし、'$P(|f(\tau_n) - f(a_n)| > \delta_n) \to 0$'という形に拡張し、統一する。つまり、前述の例では、$f(n) = \log n,\ \log k_n,\ \sqrt{n}$ 等とればよい。よって、対応するAnscombe条件は、

$$\max_{i:|f(i)-f(a_n)| \leqq \delta_n} |Y_i - Y_{a_n}| \xrightarrow{P} 0$$

となる。

ここで、上式は、$Y_{\tau_n} - Y_{a_n}$ が退化することを用いて、random limit theorem を導く手法といえるが、$\{Y_n\}$ と $\{Y_{\tau_n}\}$ の間に $\{Y_{a_n}\}$ を挟んで評価することにより、その適用範囲を広げている。又、$\{Y_{a_n}\}$ は §2 の立場から見ると、$\{Y_n\}$ と独立な確率添字の列 $\{\tau_n \equiv a_n\}$ を導入したものと見做せる。これは §4 で述べる手法の組みあわせの最も初歩的なものだ

が、適用範囲を広げる為の手がかりを与えている。これを一般化する為に、二つの確率添字の列 $\{\tau_n\}$, $\{\nu_n\}$ について、$Y_{\tau_n} - Y_{\nu_n}$ が退化する為の条件を議論する必要が出てくる。表題とした "*fully stochastic version*" とは、この意味で使われる([8])。又、この議論は *stable limit theorem* や *mixing limit theorem* で研究されてきた $\{\tau_n\}$ に対する条件 '$\tau_n / a_n \xrightarrow{P} \lambda$, $P(0<\lambda<\infty)=1$'([1],[9])において、$\{\nu_n = [a_n\lambda]\}$ とおけば、$\{Y_n\}$ と $\{Y_{\tau_n}\}$ の間に $\{Y_{\nu_n}\}$ を挟んで評価していることになる。この節では、$\{\nu_n\}$ は §1 で述べた $\{\tau_n\}$ に関する設定や仮定を満たすものとする。

定義 3.1

$\{Y_n\}$ に対する一般化された Anscombe条件 $A(f(n), \{\tau_n\}, \{\delta_n\})$ とは、

$$\max_{i:|f(i)-f(\tau_n)|\leq\delta_n} |Y_i - Y_{\tau_n}| \xrightarrow{P} 0$$

のことである。

この定義は、$\tau_n \equiv a_n$, $f(n) = \log k_n$ とおくと、[11]の定義1の条件 $A(\{k_n\}, \{a_n\}, \{\delta_{a_n}\})$ と一致し、$\{\delta_n\}$ を $\delta_n \downarrow 0$ となる正数列と考えることにより、従来の Anscombe 条件から導

かれる結果を細分化できる。これを他の手法と組みあわせるという立場から、更に拡張する。

定義 3.2

確率添字の列 $\{\nu_n\}$ が、$\{Y_n\}$ に関して $\{\tau_n\}$ の ε-近似であるとは、ある非減少数列 $\{f(n)\}$ とある正数列 $\{\delta_n\}$ に対して、次の二つの式が成り立つことである。

$$\limsup_{n\to\infty} P(|f(\nu_n) - f(\tau_n)| > \delta_n) < \varepsilon$$

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big(\max_{i:|f(i)-f(\tau_n)| \leqq \delta_n} |Y_i - Y_{\tau_n}| \geqq \varepsilon\Big) < \varepsilon$$

補題 3.3

$\{Y_n\}, \{\tau_n\}, \{\nu_n\}$ は、前に述べた確率変数の列とする。このとき、$\{\nu_n\}$ が $\{Y_n\}$ に関して $\{\tau_n\}$ の ε-近似であれば、

$$\limsup_{n\to\infty} P(|Y_{\nu_n} - Y_{\tau_n}| \geqq \varepsilon) < 2\varepsilon$$

が成り立つ。

（証明）

$$P(|Y_{\nu_n} - Y_{\tau_n}| \geqq \varepsilon)$$

$$\leqq P(|f(\nu_n) - f(\tau_n)| > \delta_n)$$

$$+ P(|f(\nu_n) - f(\tau_n)| \leqq \delta_n,\ |Y_{\nu_n} - Y_{\tau_n}| \geqq \varepsilon)$$

$$\leqq P(|f(\nu_n) - f(\tau_n)| > \delta_n)$$

$$+ P\Big(\max_{i : |f(i) - f(\tau_n)| \leqq \delta_n} |Y_i - Y_{\tau_n}| \geqq \varepsilon \Big)$$

より、両辺の上極限をとればよい。 □

この補題から、明らかに次の定理が示せる。

定理 3.4

$\{Y_n\}$; 実数値確率変数の列

$\{\tau_n\}, \{\nu_n\}$; $\{Y_n\}$ と同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された二つの正整数値確率変数の列

更に、$\{Y_n\}$ はある非減少数列 $\{f(n)\}$ とある正数列 $\{\delta_n\}$ に対し、一般化された Anscombe 条件 $A(\{f(n)\}, \{\tau_n\}, \{\delta_n\})$ を満たし、$\{\nu_n\}$ は

$$P(|f(\nu_n) - f(\tau_n)| > \delta_n) \longrightarrow 0$$

を満たす。このとき、$Y_{\nu_n} - Y_{\tau_n}$ は $n \uparrow \infty$ のとき退化し、このことから、$Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$ ならば、$Y_{\nu_n} \xrightarrow{d} F(x)$ も成り立つ。

（証明）

仮定より、任意の正数 ε に対して、$\{\nu_n\}$ は $\{Y_n\}$ に関して $\{\tau_n\}$ の ε-近似である。従って、補題 3.3 より $Y_{\nu_n} - Y_{\tau_n}$ は、$n \uparrow \infty$ のとき退化する。 □

§4　手法の組みあわせについて

この節では、§2と§3で述べた手法を組みあわせて得られる random limit theorem について述べる。

定理 4.1

$\{Y_n\}$, $\{\tau_n\}$ は、§1で述べた確率変数の列とする。又、任意の正数 ε に対して、$\{Y_n\}$ と同じ確率空間の上で定義された正整数値確率変数の列 $\{\nu_n(\varepsilon)\}$ で、∞ に確率収束するものが存在し、更に、$\{\nu_n(\varepsilon)\}$ は $\{Y_n\}$ と一様に漸近的 ε-独立で、かつ $\{Y_n\}$ に関して $\{\tau_n\}$ の ε-近似であるとき、random limit theorem "$Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$" が成り立つ。

（証明）

任意の $F(x)$ の連続点 x と正数 ε に対して、

$$\{Y_{\tau_n} > x\} \supseteqq \{Y_{\nu_n(\varepsilon)} > x+\varepsilon\} \cap \{|Y_{\nu_n(\varepsilon)} - Y_{\tau_n}| < \varepsilon\}$$

$$\therefore\ P(Y_{\tau_n} \leqq x)$$

$$\leqq P(Y_{\nu_n(\varepsilon)} \leqq x+\varepsilon) + P(|Y_{\nu_n(\varepsilon)} - Y_{\tau_n}| \geqq \varepsilon)$$

故に、$x+\varepsilon$ を $F(x)$ の連続点とすれば、補題 2.2 と 3.3 を用いて、

$$\limsup_{n\to\infty} P(Y_{\tau_n} \leqq x) \leqq F(x+\varepsilon) + 4\varepsilon$$

が成り立つ。$\varepsilon \downarrow 0$ として、

$$\limsup_{n\to\infty} P(Y_{\tau_n} \leqq x) \leqq F(x)$$

が示せた。同様に、$x-\varepsilon$ を $F(x)$ の連続点とすると、

$$\liminf_{n\to\infty} P(Y_{\tau_n} \leqq x) \geqq F(x-\varepsilon) - 4\varepsilon$$
$$\to F(x) \qquad (\varepsilon \downarrow 0)$$

も示せるので、$Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$ が示せた。 □

この定理は、任意の正数 ε に対し、$\{\nu_n(\varepsilon) \equiv a_n\}$ とおくと、従来の‘$\tau_n / a_n \xrightarrow{P} 1$’の場合に対する random limit theorem を与えている。しかし、前にも述べた‘$\tau_n / a_n \xrightarrow{P} \lambda$, $P(0 < \lambda < \infty) = 1$’の場合は、$[a_n \lambda]$ を構成する為に、λ の単関数近似 λ_ε を用いるので、$\{\nu_n(\varepsilon) = [a_n \lambda_\varepsilon]\}$ となり、$\{\nu_n(\varepsilon)\}$ が ε に依存することが必要となる。

手法の組みあわせの方法は、定理4.1以外にも3通り考えられ、それぞれに従来の結果を拡張したものとなる。その中で、同じ手法を二回繰り返す例として、次の定理をあげる。

<u>定理 4.2</u>

$\{Y_n\}, \{\tau_n\}$ は、§1で述べたものとする。任意の正数 ε に対し、$\{Y_n\}$ と同じ確率空間で定義された確率添字の列 $\{\nu_n(\varepsilon)\}$ で、$\{Y_n\}$ に関して、∞ に発散する数列 $\{a_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の両方の ε-近似となるものが存在すれば、$Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$ が成り立つ。

[参考文献]

[1] Aldous, D. "Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables" Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 83 (1978)

[2] Aldous, D. and Eagleson, G.K. "On mixing and stability of limit theorems" Ann. Probability 6 (1978)

[3] Anscombe, F.J. "Large sample theory of sequential estimation" Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 (1952)

[4] Babu, G.J. and Ghosh, M. "A random functional CLT for martingales" Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 27 (1976)

[5] Bhattacharya, P.K. and Mallik, A. "Asymptotic normality of the stopping times of some sequential procedure" Ann. Statist. 1 (1973)

[6] Callaert, H. and Janssen, P. "The convergence rate of fixed-width sequential confidence intervals for the mean" Sankhyā ser. A 43 (1981)

[7] Csörgő, M. and Rychlik, Z. "Weak convergence of sequences of random elements with random indices" Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 88 (1980)

[8] Dorea, C.C.Y., David, H.T. and Werner, N.M. "Uniform ε-independence and the convergence in distribution of

randomly indexed sequences" Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 96 (1984)

[9] Guiasu, S. " On the asymptotic distribution of the sequences of random variables with random indices" Ann. Math. Statistics 42 (1971)

[10] Rényi, A. " On mixing sequences of sets" Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 9 (1958)

[11] Sugiman, I. " A random CLT for dependent random variables" J. Multivariate Anal. 20 (1986)