

微分代数における Gröbner 基底とその応用

徳島大・総合科学 高山 信毅 (Nobuki Takayama)

0.

k を標数 0 の体、 K を k 上の有理関数体 $k(x_1, \dots, x_n)$ 、 R を $K[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$ とする。微分作用素の和・積を考えることにより、 R は (非可換) 環となる。本稿では R を考察する。 \mathcal{O} を R の左 ideal とする。 $L \in \mathcal{O}$ とす。

問題 1. $L \in \mathcal{O}$ がどう k を判定する アルゴリズム α を求めよ。

多項式環に対しては、Knuth-Bendix completion により ideal の Gröbner 基底を構成し、Gröbner 基底による m -reduction で L を標準形へ書き換え、問題 1 を解くことができます (cf. [1]). R に対しても同じ方法が適用できる。本稿の第一の目的は R に対する問題 1 の解を与えることである (cf. Galligo [3], [3] には $k[x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$: Weyl Algebra. での問題 1 の解が証明済みで示されている。R.I.M.S. での講演の後、理研の佐々木建昭氏に教えていただいた。)

本稿の第二の目的は、そのアルゴリズムの、偏微分方程式系の代数的研究、その中でも特に、多変数特殊関数への応用

例を示すことである。

問題2. 多変数特殊関数の近接関係式を計算するアルゴリズムを求めよ。

近接関係式 (Contiguous relation, recurrence relation) とは何か、を Gauss の超幾何関数について説明する。Gauss の超幾何関数は次の形をしている。

$$f(\alpha, \beta, r; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(1, m)(r, m)} x^m, \quad {}_{\text{Pochhammer}} (\alpha, m) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1).$$

この f に対して次の関係式が成立する。

$$(0.1) \begin{cases} H_{\alpha} f(\alpha, \beta, r; x) = f(\alpha+1, \beta, r; x) & , H_{\alpha} = \frac{1}{x} \left(x \frac{d}{dx} + \alpha \right) \\ B_{\alpha} f(\alpha, \beta, r; x) = f(\alpha, \beta, r; x) & , B_{\alpha} = \frac{1}{r-\alpha} \left\{ x(1-x) \frac{d}{dx} + (r-\alpha-\beta x) \right\} \end{cases}$$

関係式 (0.1) は Gauss の超幾何関数の α についての近接関係式とよばれている。多変数特殊関数 (Erdelyi [2] 5.7) に対するこのような関係式は部分的にしか知られておらず、これを systematic に求めることだ、Kimura [4] に problem ([4] 60p) として提出されている。本稿では問題1の一応用として問題2の解を与える。例として、Appell の F_4 の α についての近接関係式を掲載する。これは新しく知られた公式である。

1. 記号 & 定義.

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$a \in K$, $a \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}$ の形の項を R の単項式と呼ぶ。

$$\text{Exp} \left(a \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right) := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}_0)^n.$$

$$\text{coeff} \left(a \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right) := a.$$

$(\mathbb{N}_0)^n$ の順序 $>$ を次のように定義する。

$$(p_1, \dots, p_n) > (q_1, \dots, q_n) \iff$$

$$(p_1 + \dots + p_n > q_1 + \dots + q_n) \text{ or } (p_1 + \dots + p_n = q_1 + \dots + q_n \ \& \> \ (p_1 > q_1 \text{ or } ((p_1 = q_1) \ \& \dots \ \& \> \ ((p_{n-1} = q_{n-1}) \ \& \> \ (p_n > q_n))))$$

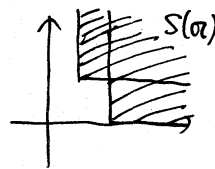
i.e. $n=2$ なら, $(0,0) < (0,1) < (1,0) < (0,2) < (1,1) < (2,0) < \dots$ 。

$\text{head}(L) :=$ 最も次数の高い L 中の単項式。 ($L \in R$)。

$\text{tail}(L) := L - \text{head}(L)$ 。

$\sigma \in R$ の左イデアルとすると

$$S(\sigma) := \bigcup_{L \in \sigma} \{ \text{Exp}(\text{head}(L)) + (\mathbb{N}_0)^n \}$$



$S(\sigma)$ は $(\mathbb{N}_0)^n$ のモノイデアルとなる。

$U \subset \mathbb{C}^n$ domain, presheaf $U \mapsto \{f \mid f \text{ は } U \text{ 上の正則関数, } \sigma f = 0\}$ を作る。この層を $\mathcal{D}(\sigma)$ と書き、 σ の解空間の層とよぶ。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}(\sigma) := \sup_{x_0 \in \mathbb{C}^n} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{x_0}(\sigma) \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}.$$

$$\mathbb{R}^{(1)} \mid \mathbb{R}^{(2)} \ (\mathbb{R}^{(1)}, \mathbb{R}^{(2)} \in (\mathbb{N}_0)^n) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \mathbb{R} \in (\mathbb{N}_0)^n \text{ s.t. } \mathbb{R}^{(2)} = \mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{R}.$$

$N, L \in R$, $N = N^{(1)} + \dots + N^{(p)}$ ($N^{(i)}$ は単項式) とする。

$$N \text{ が } L \text{ により } m\text{-reducible} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists i, \text{Exp}(\text{head}(L)) \mid \text{Exp}(N^{(i)}).$$

N が L で m -reducible とすれば、 $\exists i, \text{Exp}(\text{head}(L)) \mid \text{Exp}(N^{(i)})$ となる。

$\text{head}(C \text{ head}(L)) = N^{(i)}$ となる R の単項式 C により、 N を、 $N - CL$ の書き換える操作を、 N の L による m -reduction といいよ。(i.e. modulo L による N の書き換え)

N が L で m -irreducible $\stackrel{\text{def}}{\iff} N$ が L で m -reducible でない。

Prop. 1 F を R の元の有限集合とする。 $L \in R$ とするとき、 L の F による m -reduction は有限回で停止する。(つまり F で m -irreducible となる。)

定義 1.1 ($L_1, L_2 \in R$ の S -operator: $Sp(L_1, L_2)$ 。)

$$Sp(L_1, L_2) := C_1 L_1 + C_2 L_2$$

ここで C_1, C_2 は次の条件をみたす R の単項式で、下の e が $(N_0)^m$ でもっとも小さいもの。

$$(1) e := \text{Exp}(\text{head}(C_1 \text{head}(L_1))) = \text{Exp}(\text{head}(C_2 \text{head}(L_2)))$$

$$(2) \text{coeff}(\text{head}(C_1 \text{head}(L_1))) + \text{coeff}(\text{head}(C_2 \text{head}(L_2))) = 0.$$

(つまり、 L_1, L_2 に C_1, C_2 をかけて、 L_1, L_2 の最高次の項を消したものが $Sp(L_1, L_2)$)

注 $Sp(L_1, L_2)$ には K に関する不定性があるが、これは以下の議論では問題とならない。

2. 問題 1 の解.

$L^{(1)}, \dots, L^{(r)}$: R の左 ideal \mathcal{O} の generator とする。

アルゴリズム 2.1 (Knuth-Bendix 型アルゴリズム by Buchberger)

入力: $\{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$

出力: F . (Gröbner Basis of \mathcal{O} .)

$$F := \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\};$$

$$S := \emptyset;$$

do { $F := F \cup S$; $S := \emptyset$;

F の各要素を F について m -irreducible とする。 0 は F より除く。

F の元の組み合わせ (p, q) すべてに関して以下を繰り返す。 {

$t := Sp(p, q)$; $t \in F$ に関して m -reduction \wedge m -irreducible とする。

if $t \neq 0$ then $S := S \cup \{t\}$; }

} while $S \neq \emptyset$.

Prop 2.1 アルゴリズム 2.1 は、停止する。

略証: $(No)^m$ のモノイダル \mathcal{A} は a.c.c. (ascending chain condition) を満たす。

から。 //

アルゴリズム 2.1 で生成される F を \mathcal{A} の Gröbner Basis とする。こ

れは一意的には定まらない。 Gröbner Basis について、次の事実が

成り立つ。 G を \mathcal{A} の Gröbner Basis とするとき、

Prop 2.2 $N \in \mathcal{A}, N \neq 0 \Rightarrow \text{Exp}(\text{head}(N)) \in \bigcup_{L \in G} \{ \text{Exp}(\text{head}(L)) + (No)^m \}$ 。 すな

わち、 $S(\mathcal{A}) = \bigcup_{L \in G} \{ \text{Exp}(\text{head}(L)) + (No)^m \}$ 。

Prop 2.2 により、次のアルゴリズムが得られた。

アルゴリズム 2.2 ($L \in \mathcal{A}$ の判定法, 問題 1 の解)。

入力: G ; \mathcal{A} の Gröbner Basis, $L \in \mathcal{A}$ 。

出力: $L \in \mathcal{A}$ かどうかの答え。

while $L \neq 0$ に関して m -可約 do. {
 $L := L \in G$ で m -reduction したものの }
 if $L = 0$ then "yes" else "no".

3. 応用.

以下 $k = \mathbb{C}$ とする。

まず \mathcal{O} の解空間の次元を求める公式を示す。

$$\text{Prop 3.1} \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathcal{O}) = \#(\mathbb{N}_0)^m \setminus S(\mathcal{O})$$

略証: Cauchy-Kowalevski の定理, 及び Cauchy の存在定理による。//

注. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathcal{O}) < +\infty$ のとき, \mathcal{O} の Gröbner Basis を計算すれば, \mathcal{O} を容易に Pfaff 方程式系へ書き換えることができます。 $(\mathbb{N}_0)^m \setminus S(\mathcal{O})$ の元を $\text{Exp}(\ast)$ とする \ast が Pfaff eq の base となる。

さて, 次に問題 2 の解を与える。

多変数特殊関数やそれに対する Horn の表については, [2] 5.7 を参照。

- (イ) $\mathcal{O}_\lambda : 10 \ni x - 9\lambda$ を含む左イデアル (λ は特殊関数を定義している)
 - (ロ) $f_\lambda(x_1, \dots, x_n) : \mathcal{O}_\lambda f_\lambda = 0, f_\lambda(0, \dots, 0) = 1$ とする関数 (f_λ が多変数特殊関数)
 - (ハ) $H_\lambda \in R$, s.t. $f_{\lambda+1} = H_\lambda f_\lambda \neq 0$. (この H_λ を上昇演算子と呼ぶ)
- (イ)(ロ)(ハ) が与えられたとする。

lemma 3.1 (Key lemma)

\mathcal{O}_λ と H_λ で生成される左イデアルが R に一致すれば,

$\exists B_{\lambda+1} \in R$. s.t. $B_{\lambda+1} f_{\lambda+1} = f_{\lambda}$ (この $B_{\lambda+1}$ を下降演算子と呼ぶ)

注. \mathcal{O}_{λ} が R の左極大イデアルであれば, lemma の仮定が成立する。

① $g^{(i)}$ を \mathcal{O}_{λ} の generator とする。仮定より,

$$\exists c^{(i)}, c \in R. \quad \sum c^{(i)} g^{(i)} + c H_{\lambda} = 1. \quad (3.1)$$

$$\therefore \underbrace{\sum c^{(i)} g^{(i)} f_{\lambda}}_{=0} + \underbrace{c H_{\lambda} f_{\lambda}}_{=f_{\lambda+1}} = f_{\lambda} \quad \therefore B_{\lambda+1} := c \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 //$$

注. \mathcal{O}_{λ} の generator と H_{λ} から出発して, アルゴリズム 4.2.1 を適用すると, 有限回のくりかえしで, アルゴリズム 4.2.1 における F の元として 1 がある。これを逆にたどることにより (3.1) の解が求まる。

lemma 3.2

$\mathcal{O}_{\lambda+1}$ が R の左極大イデアル $\Rightarrow B_{\lambda+1}$ は modulo $\mathcal{O}_{\lambda+1}$ で一意的。

($B_{\lambda+1} f_{\lambda+1} = f_{\lambda}$ をみたす $B_{\lambda+1}$ は modulo $\mathcal{O}_{\lambda+1}$ で一意的)

注. 左極大という仮定は, 特殊関数を定義している R のイデアルに対しては, 普通の仮定である。(特殊関数の定義がないからこたはいいかげんな説明が...) 次の事実が成り立つ。

$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(\mathcal{O}_{\lambda}) < +\infty$, \mathcal{O}_{λ} が確定特異点型とする。このとき,

解 $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{\lambda})$ のモジュール表現が irreducible $\Rightarrow \mathcal{O}_{\lambda}$ は左極大イデアル。

注. lemma 3.1 は, B_{λ} を与えて $H_{\lambda+1}$ を求めるといふ形でも成立する。

定理 3.1

Horn の表の中の 34 個の 2 変数超幾何関数のうちの 10 個 λ - η ($\alpha, \alpha', \beta, \beta', \dots$) に関して、近接関係式が計算可能。

略証. λ を λ - η とすると H_λ が B_λ となるかおまねば lemma 3.1 を適用できる (仮定がみたせることのチェックも必要)。しかし、 B_λ が H_λ となるかは必ず簡単な形、

$$\frac{1}{c} (px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} + c) \quad p, q \in \mathbb{Z}, c \text{ は } \lambda \text{ に依存する数,}$$

をしており、具体的におまる。lemma 3.1 の仮定も必ずおみたすべし。//

注. 一変数特殊関数、Lauricella の n 変数超幾何関数、その他に対しても上の定理は成り立つが、詳しくは説明しない。

定理 3.1 にしたかると、近接関係式を計算するアルゴリズム \mathcal{A} は次のようになる。

アルゴリズム \mathcal{A} 3.1

入力: 多変数特殊関数を定義する \mathcal{O}_λ の生成元, H_λ (または B_λ)

出力: $B_{\lambda+1}$ (または $H_{\lambda+1}$)

begin.
 \mathcal{O}_λ の Gröbner Basis $G_\lambda = \{L^{(1)}, \dots, L^{(n)}\}$ をおめる。

$\sum C^{(i)} L^{(i)} + CH_\lambda = 1$ となる $C^{(i)}, C$ をおめる。

$B_{\lambda+1} := C \in G_{\lambda+1}$ について m -reduction したものを。
end.

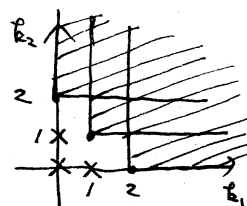
4. 実例.

例1.
$$\begin{cases} L_1 = x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (r-1) \frac{\partial}{\partial x} - \beta \\ L_2 = y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (r-y) \frac{\partial}{\partial y} - \beta' \end{cases}$$

L_1, L_2 で生成される R ($\therefore r$ は $n=2$) の左イデアル \mathcal{O} とする。 \mathcal{O} の

Gröbner-Basis は、

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y\beta' - (r-x)(x-y)}{x-y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\beta y}{x-y} \frac{\partial}{\partial y} - \beta \\ & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\beta'}{x-y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y} \frac{\partial}{\partial y} \\ & y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\beta'}{x-y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x\beta - (r-y)(x-y)}{x-y} \frac{\partial}{\partial y} - \beta' \end{aligned}$$



例2. (Appell の F_4)

$$F_4(\alpha, \beta, r, r'; x, y) := \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n) (\beta, m+n)}{(1, m) (1, n) (r, m) (r', n)} x^m y^n \quad (\text{Appell's } F_4)$$

$$\mathbb{K} := \mathbb{C}(\beta, r, r') \quad , \quad R := \mathbb{K}(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \text{ とおく。}$$

$$\begin{cases} L_\alpha^{(1)} := \delta_x (\delta_x + r - 1) - x (\delta_x + \delta_y + \alpha) (\delta_x + \delta_y + \beta) & , \delta_x = x \frac{\partial}{\partial x}, \delta_y = y \frac{\partial}{\partial y} \\ L_\alpha^{(2)} := \delta_y (\delta_y + r' - 1) - y (\delta_x + \delta_y + \alpha) (\delta_x + \delta_y + \beta) \end{cases}$$

$\mathcal{O}_\alpha \in L_\alpha^{(1)}, L_\alpha^{(2)}$ で生成される R の左イデアルとする。

$$\mathcal{O}_\alpha f_\alpha \equiv 0 \quad (f_\alpha(x, y) := F_4(\alpha, \beta, r, r'; x, y) \text{ とおく。}) \quad \text{成り立つ。}$$

$$H_\alpha := \frac{1}{\alpha} (\delta_x + \delta_y + \alpha) \text{ とおく。} \quad H_\alpha f_\alpha = f_{\alpha+1} \quad \text{成り立つ。}$$

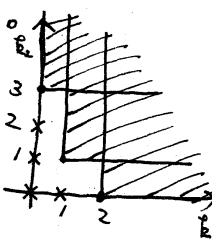
\mathcal{O}_α の Gröbner Basis は次の3つの元からなる。

$$l_\alpha^{(1)} = x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - r' \frac{\partial}{\partial y}$$

$$l_\alpha^{(2)} = 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y^2 - y(r-x)) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\alpha + \beta + 1 - r) x \frac{\partial}{\partial x} + ((\alpha + \beta + 1)y - r'(r-x)) \frac{\partial}{\partial y} + \alpha\beta$$

$$l_\alpha^{(3)} = 2y^2 (x^2 - 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1) \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \text{低次項。}$$

アルゴリズム 3.1 を適用して $B_{\alpha+1}$ を得る。(結果は次ページ)



$$B_{\alpha+1} = \frac{1}{c} \left(c_0 + c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

where

$$c = -2(-\alpha + \gamma' - 1)(-\alpha + \gamma + \gamma' - 2)(-\alpha + \gamma - 1)$$

$$c_0 = 2\alpha^3 + 4\alpha^2\beta x + 4\alpha^2\beta y - 2\alpha^2\beta - 4\alpha^2\gamma - 4\alpha^2\gamma' + 8\alpha^2 - 3\alpha\beta\gamma x - 5\alpha\beta\gamma y + \alpha\beta\gamma - 5\alpha\beta\gamma'x - 3\alpha\beta\gamma'y + \alpha\beta\gamma' + 10\alpha\beta x + 10\alpha\beta y - 4\alpha\beta + 2\alpha\gamma^2 + 6\alpha\gamma\gamma' - 10\alpha\gamma + 2\alpha\gamma'^2 - 10\alpha\gamma' + 10\alpha + 2\beta\gamma^2 y + 2\beta\gamma\gamma'x + 2\beta\gamma\gamma'y - 3\beta\gamma x - 7\beta\gamma y + \beta\gamma + 2\beta\gamma'^2 x - 7\beta\gamma'x - 3\beta\gamma'y + \beta\gamma' + 6\beta x + 6\beta y - 2\beta - 2\gamma^2\gamma' + 2\gamma^2 - 2\gamma\gamma'^2 + 8\gamma\gamma' - 6\gamma + 2\gamma'^2 - 6\gamma' + 4$$

$$c_1 = x(4\alpha^2 x + 4\alpha^2 y - 4\alpha^2 + 2\alpha\beta x - 2\alpha\beta y - 2\alpha\beta - 5\alpha\gamma x - 3\alpha\gamma y + 5\alpha\gamma - 5\alpha\gamma'x - 3\alpha\gamma'y + 5\alpha\gamma' + 12\alpha x + 8\alpha y - 12\alpha - \beta\gamma x + \beta\gamma y + \beta\gamma - \beta\gamma'x + \beta\gamma'y + \beta\gamma' + 2\beta x - 2\beta y - 2\beta + \gamma^2 x + \gamma^2 y - \gamma^2 + 3\gamma\gamma'x + \gamma\gamma'y - 3\gamma\gamma' - 6\gamma x - 4\gamma y + 6\gamma + 2\gamma'^2 x - 2\gamma'^2 - 8\gamma'x - 2\gamma'y + 8\gamma' + 8x + 4y - 8)$$

$$c_2 = 4\alpha^2 xy + 4\alpha^2 y^2 - 4\alpha^2 y - 2\alpha\beta xy + 2\alpha\beta y^2 - 2\alpha\beta y - 3\alpha\gamma xy - 5\alpha\gamma y^2 + 5\alpha\gamma y + 2\alpha\gamma'x^2 - 7\alpha\gamma'xy - 4\alpha\gamma'x - 3\alpha\gamma'y^2 + \alpha\gamma'y + 2\alpha\gamma' + 8\alpha xy + 12\alpha y^2 - 12\alpha y + \beta\gamma xy - \beta\gamma y^2 + \beta\gamma y + \beta\gamma'xy - \beta\gamma'y^2 + \beta\gamma'y - 2\beta xy + 2\beta y^2 - 2\beta y + 2\gamma^2 y^2 - 2\gamma^2 y - \gamma\gamma'x^2 + 3\gamma\gamma'xy + 2\gamma\gamma'x + 2\gamma\gamma'y^2 - \gamma\gamma'y - \gamma\gamma' - 2\gamma xy - 8\gamma y^2 + 8\gamma y - \gamma'^2 x^2 + 3\gamma'^2 xy + 2\gamma'^2 x + \gamma'^2 y - \gamma'^2 + 2\gamma'x^2 - 8\gamma'xy - 4\gamma'x - 4\gamma'y^2 + 2\gamma'y + 2\gamma' + 4xy + 8y^2 - 8y$$

$$c_3 = 3(2\alpha - \gamma - \gamma' + 2)y(x^2 - 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1)$$

なお、前ページの式は、REDUCE の計算結果を stream editor で加工し TEX のプログラムを生成し、TEX で出力したものである。X-window の TEX プレビューを利用すれば、対話型処理をしている時も、この手で見やすい式を画面上に得ることが出来る。

参考文献

- [1] B. Buchberger and R. Loos, Algebraic Simplification. Computing, Suppl. 4, 11-43 (1982).
- [2] A. Erdélyi et al. Higher transcendental functions. MacGraw-Hill 1953.
- [3] A. Galligo. Some algorithmic questions on ideals of differential operators.
- [4] T. Kimura. Hypergeometric functions of two variables. Seminar Note Series of Univ. of Tokyo 1972.