

連続法による非線形方程式系の数値実験的一考察

富士通 (株) 国際研 鈴木千里 (Chisato Suzuki)

小藤俊幸 (Toshiyuki Koto)

1. はじめに

非線形代数方程式

$$(1.1) \quad f(y)=0, (f: R^k \rightarrow R^k), \text{ あるいは } \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \dots, y_k)=0 \\ f_2(y_1, y_2, \dots, y_k)=0 \\ \vdots \\ f_k(y_1, y_2, \dots, y_k)=0 \end{cases}$$

を位相的に連続な方程式に変換してその解を研究する手法は総称的に連続法である。この連続法として、一つのパラメータを導入して論ずるホモトピー法と常微分方程式 (ODE) の定常解に対応づけて論ずる方法とがよく知られている。本資料では後者の常微分方程式を用いる連続法について考察する。なお、前者に対する最近の研究としては、例えば文献1), 2) などがある。

常微分方程式を用いる連続法として Davidenkoの方法³⁾ (1953), Braninの方法⁴⁾ (1971) などの先駆的な研究や、非線形計画法の観点からの田辺⁵⁾ などの研究があるが、これらは何れも非線形代数方程式の解を1階常微分方程式の定常解に対応づけて解く手法である。これに対して、三人のイタリア人 Sandro, Valerio, Francesco は1979年に2階常微分方程式を用いる連続法を連名で提案した⁶⁾。以下ではこの方法を単に SVF法と呼ぶことにする。

筆者らは、2階常微分方程式を用いるこの SVF法には物理的な意味解釈が容易であることに興味を持ち、代数方程式に対する静電場法⁷⁾ のように奇麗な解釈をSVF法に与えることを試みた。また非線形二点境界値問題の複数個の解の解法⁸⁾ に対する初期近似解を得るための一つの手法としてその可能性を模索した。この試みの中で得られた結果として本資料では、最急降下法がカオティックな数値的不安定現象を持つことを述べ、更に SVF法の大域的な収束特性を改良するための一つのアイデアを述べる。この改良とは、漸近解が極小点や鞍点に停留することなく大域的に

分布する解を渡り歩くための軌道を生成するように SVF法に制御機能を付加する策である。この策はまだアイデアの域を出ていないが幾つかの数値結果をもとに制御機構の持つ問題点と今後の展望を述べる。

本資料の構成を述べる。2節では連続法のあるべき姿を簡単に述べ、3節において1階常微分方程式を用いる連続法としてよく知られた連続ニュートン法と連続最急降下法の特徴について考察する。4節では、SVF法の特徴を吟味して、続く5節において最急降下法のカオティックな現象を述べ、2階常微分方程式を用いることの効用を説く。6節ではSVF法に改良を加えて、その有効性を数値的に考察する。

2. 連続法の一般論

離散版の反復式から対応する連続法の構成過程を考察する。例えば、ニュートン法は関数 f をある解の近傍でテイラー展開して、2次以降を無視することより導かれる。従って、これは局所的な解法である。更に各解の近傍で構成されたニュートン反復式は同一視して扱い、そして連続化することにより常微分方程式を得る。一般的な場合として、このようなプロセスを経て得られる常微分方程式が元の方程式の解をその定常解として素直に反映していることが望ましい。最終的には、上述した常微分方程式とそれを解くための解法との組み合わせにより一つの連続法が構成される。従って、連続法を考察するとき、どのような常微分方程式の解法を用いるかの選択は一般に重要となる。上述した非線形方程式とその連続法との関係を図1に示す。

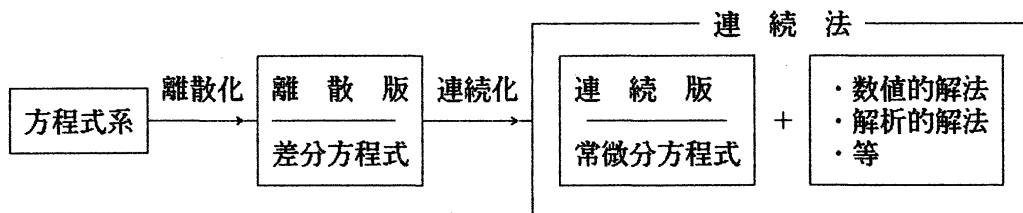


図1. 非線形方程式と連続法との関係

一般に連続法は大域的収束性とその生命である。しかし連続法の多くは、鞍点(退化による特異点)問題や極小点への解の漸近の問題などの漸近特性を持つため、これらの解消が大域的収束

性(完全収束性)を獲得するカギとなる。また、連続法の収束性の悪さから、その処理時間の問題がしばしば取り上げられることを注意しておく。

3. 連続ニュートン法と連続最急降下法

1階常微分方程式を用いる連続法の典型として連続ニュートン法、連続最急降下法を挙げることができる。ここでは、この二つの方法について、大域的収束性を持つか否か、あるいは処理の容易性などの観点からの評価などを述べる。表形式によってそれらをまとめる(表1参照)。これらの結果は2階常微分方程式による連続法の特性を吟味する上での一つの基準に用いる。

表1. 連続ニュートン法と連続最急降下法の特性

諸特性	連続ニュートン法	連続最急降下法
ODE (Jはfのヤコビアン)	$J(y) (dy/dt) = -f(y)$	$(dy/dt) = -J(y)^T f(y)$
ODEの正規性; 不連続性	非正規; $\det J(y) = 0$ で不連続	正規型: 全域で定義可能
鞍点など退化点への漸近性	漸近する	漸近する
極小点への漸近性	漸近しない	漸近する
数値解法の必要精度	高精度の解法を必要	ラフ近似でもよい
数値解の安定性	正則領域では安定	挙動不信な点アリ
数値計算ネック	$J(y)^{-1}$ の計算を必要	$J(y)^{-1}$ の計算は不必要

表1に基づき連続ニュートン法と連続最急降下法の本質的な差異を指摘しておく。連続ニュートン法は非正規型の常微分方程式に準拠しているため有限の時間内において解軌道が消滅してしまうことがある。従って、高精度の数値積分法を用いて一つの解軌道を追跡していても突然異なる漸近軌道に移行してしまうことがしばしば起きる。このため数値的に大域的な収束性を追求することは殆ど困難といえる。一方、連続最急降下法は正規型の常微分方程式に準拠しているため連続ニュートン法のようなことは起きない。従って、常微分方程式を比較的ラフ近似で数値的に解くことが許される。しかし、常微分方程式の離散解自身が極めて複雑に挙動することがある。

4. SVF法の特性

Sandro, Valerio, Francescoが提案した2階常微分方程式を用いる方法を眺望して問題点を指摘する。このSVF法は、関数 $f(y)$ から作られるポテンシャル

$$(2.1) \quad P = \frac{1}{2} f(y)^T f(y)$$

の中での質量 $\mu(t) > 0$ ($t \geq 0$) の質点の力学的運動として定式化することができる。具体的には常微分方程式

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mu(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + A(t, y) \frac{dy}{dt} = -\nabla P, & (t \geq 0), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^T, \\ A(t, y) = g(t) [a(t) I + (1-a(t)) J(y)^T J(y)], \end{cases}$$

によって支配される質点の力学系である。ここで、

$$(2.3) \quad g(t) > 0, \quad 1 \geq a(t) > 0, \quad (t \geq 0),$$

そして I は k 次の単位行列である。彼らはこの方程式に対してつぎのような解釈を与えた。即ち $\mu(t) \equiv 0$ のとき、

(i) $g(t) = (1-a(t))^{-1} \Rightarrow$ (2.2)式は Levenberg-Marquardt法の連続版;

$$dy/dt = -(\delta(t) I + (J(y))^T J(y))^{-1} J(y) f(y), \quad \delta(t) = a(t)/(1-a(t)),$$

(ii) $g(t) = 1, a(t) = 1 \Rightarrow$ (2.2)式は最急降下法の連続版; $dy/dt = -J(y)^T f(y)$,

(iii) $g(t) = 1, a(t) \rightarrow 0 \Rightarrow$ (2.2)式はNewton法の連続版; $dy/dt = -(J(y))^{-1} f(y)$.

簡単にわかることであるが、 $A(t, y)$ は k 次対称正定値行列である。従って、方程式(2.2)は減衰を伴う散逸系である。従って、任意の初期値条件

$$y(0) = y_0, \quad dy/dt |_{t=0} = x_0,$$

に対して、解は漸近特性を持つ。実際、いま μ の時間変化は少ないとして、例えば $\mu = \text{定数}$ とすれば、(2.2)式は

$$\begin{aligned} d \left[\frac{1}{2} \mu (dy/dt)^T (dy/dt) + P(y) \right] / dt &= (dy/dt)^T [\mu (d^2 y / dt^2) + \nabla P(y)] \\ &= -(dy/dt)^T A(t, y) (dy/dt) \leq 0 \end{aligned}$$

と書けることから、適当な点への解軌道の漸近特性が分かる。しかし、SVF法にもつぎのような問題が存在することは容易に理解できる。

- (1) 退化性; 鞍点への漸近
- (2) 極小点への漸近.

これらの問題に対して Sandro, Valerio, Francescoの三人は, 連続ニュートン法では完全収束性の保証されないBrentの問題⁹⁾

$$f_1(y_1, y_2) = 4(y_1 + y_2) = 0,$$

$$f_2(y_1, y_2) = 4(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)((y_1 - 2)^2 + y_2^2 - 1) = 0,$$

を彼らの方法で数値的に解き, それが完全収束性を有するとしてその有効性を主張した. 更に極小を持つようなポテンシャル場を導く非線形方程式に対しても, 初期速度を適当に与えることによって, 極小点に漸近することなくゼロ点に収束することを数値的に示している. しかし残念なことには, 初期速度が全く経験的に選択されていることである. 従って, 新たな問題点として

- (3) 初期条件として速度 $y'(0)$ を必要とし, この選択の合理的な基準を持たない, が提起される.

また SVF法は正規型の2階常微分方程式に準拠した連続法であることから連続最急降下法に近い特性を有する. しかし, 数値的な安定性は連続最急降下法に比べて SVF法の方が良いように思われる(次節参照).

5. 最急降下法とカオス

本節では $g(t)=1$, $a(t)=1$ とする2階常微分方程式(2.2) から, 最急降下法にカオスが起きることを示し, このカオスの解消に SVF法の y'' 項が寄与すること, 即ち y'' 項の付加は系の安定化の作用を持つことを示す. 簡単化のために関数 f は $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とし, かつ C^2 級関数とする. そのとき, (2.2) 式から

$$(5.1) \quad \mu \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -f'(y)f(y), \quad (' = d/dt)$$

を得る. ここで, $\mu (> 0)$ は定数パラメータとする. (5.1) 式の差分近似として

$$(5.2) \quad \mu (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})/h^2 + (y_n - y_{n-1})/h = -f'(y_n)f(y_n),$$

を考える. μ をパラメータとして各種の値を取ることによって, 上式を色々と解釈することが可能である. 実際, (5.2) 式は

- (i) $\mu = 0$ のとき, 連続最急降下法のODE の後退差分近似;
- (ii) $\mu = h/2$ のとき, 連続最急降下法のODE の中心差分近似;
- (iii) $\mu = h$ のとき, 連続最急降下法のODE の前進差分近似;

に一致する. 特に (iii) は厳密に離散版の最急降下法そのものである. そこで, このケースについてカオティックな現象が起こることを示そう. つぎの定理はこの事実を主張した定理である.

【定理】 f (または $-f$) が a, b, c ($a < c < b$) に対して, つぎの条件 C_1 または C_2 を満たすとする.

$$(C_1) \begin{cases} (1) f'(a) = f(c) = 0 \\ (2) f'(y) > 0 \quad (a < y < b, y \neq c) \end{cases}$$

$$(C_2) \begin{cases} (1) f'(a) = f'(c) = 0 \\ (2) f(y) > 0 \quad (a < y < b, y \neq c) \\ (3) f'(y) < 0 \quad (a < y < c) \\ (4) f'(y) > 0 \quad (c < y < b). \end{cases}$$

そのとき h が十分大きければ, 最急降下法による系列

$$y_{n+1} = y_n - hf'(y_n)f(y_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

は Li-York¹⁰⁾ の意味でカオスとなる. \square

この定理は山口-俣野の定理¹¹⁾ の直接的な適用により得られる. 従って, 定理の証明は明らかである. なお, この定理はポテンシャル関数 $P(y)$ が少なくとも二つの臨界点を持ち, 更にそのうち一方が極小値を取るような関数 f に対する最急降下法ではカオティックな現象を起こすことを主張している.

更に (ii) のケースについてもカオティックな現象が起きることを示すことができる. これもまた 1 階微分の中心差分近似におけるカオスの研究に関する山口-宇敷の結果¹²⁾ あるいは宇敷の結果¹³⁾ の直接的な適用により証明できる.

つぎに y'' 項がカオスの解消に有効となることを述べる. ここで, μ の値を大きく取るとは 2 階微分項の影響が大きくなることを意味することに注意せよ. まず

$$x_n = (y_n - y_{n-1})/h$$

と置いて、(5.2) 式を変形することから始める。そのとき、つぎを得る。

$$(5.3) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n - \beta f'(y_n) f(y_n), & (\alpha = (\mu - h)/\mu, \beta = h/\mu) \\ y_{n+1} = y_n + h x_{n+1} \end{cases}$$

さらに

$$(5.4) \quad \begin{cases} g(x, y) = \alpha x - \beta f'(y) f(y), \\ h(x, y) = y + h g(x, y) \end{cases}$$

とすれば、(5.3) から

$$(5.5) \quad \begin{cases} x_{n+1} = g(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = h(x_n, y_n) \end{cases}$$

の表現を得る。この2次元写像のヤコビアン行列式は (x_n, y_n) によらない定数 $\alpha = (\mu - h)/\mu$ である。特に $\mu \neq h$ であれば、(5.5) 式は R^2 上の微分同相写像を定める。このとき、(5.5) の逆写像は

$$(5.6) \quad \begin{cases} y_n = y_{n+1} - h x_{n+1} \\ x_n = (x_{n+1} - \beta f'(y_n) f(y_n)) / \alpha \end{cases}$$

となる。

いま、 f が条件 (C_1) または (C_2) を満たすものとすれば、いずれの場合にも c 点はポテンシャル関数 $P(y) = (1/2)(f(y))^2$ の臨界点となる。また、この臨界点の非退化性を保証するために $P''(c) > 0$ を仮定する。これは (C_1) の場合には $f'(c) \neq 0$ を意味して、 (C_2) の場合には $f(c)f''(c) > 0$ を意味する。このとき明らかに点 $(x, y) = (0, c)$ は写像(5.5) の不動点である。

これにより次の命題を述べることができる。

【命題】 写像(5.5) の不動点 $(0, c)$ は

(i) $\mu < (2h + P''(c)h^2)/4$ のとき、鞍部点、

(ii) $\mu > (2h + P''(c)h^2)/4$ のとき、アトラクタ、

である。ここで、鞍部点とはヤコビ行列の固有値の絶対値の一つが1より小であり、他方が1より大であるような不動点である。またアトラクタとはヤコビ行列の固有値の絶対値が共に1より小であるような不動点のことである。□

この命題の(ii)により大きな μ に対しては、アトラクタの不動点が出現することから局所的に安定となり¹⁵⁾、カオティックな振る舞いをおさえることになる。すなわちカオスの解消作用として機能する。

以下では上で述べたこと具体例として、関数 $f(y) = \sqrt{2}y(1-y)$ について簡単な数値的考察を行う。図2はパラメータ μ を変化させ、2組の初期値

$$\textcircled{1} (x_0, y_0) = (0.0, 0.2),$$

$$\textcircled{2} (x_0, y_0) = (0.0, 0.8),$$

に対する y_n の軌道 ($500 \leq n \leq 1000$) をプロットしたもの(分岐ダイアグラム)である。パラメータ μ の増大にともないカオスが解消して軌道が2つの解(ゼロと1)の何れかに漸近していく様子が観察される。

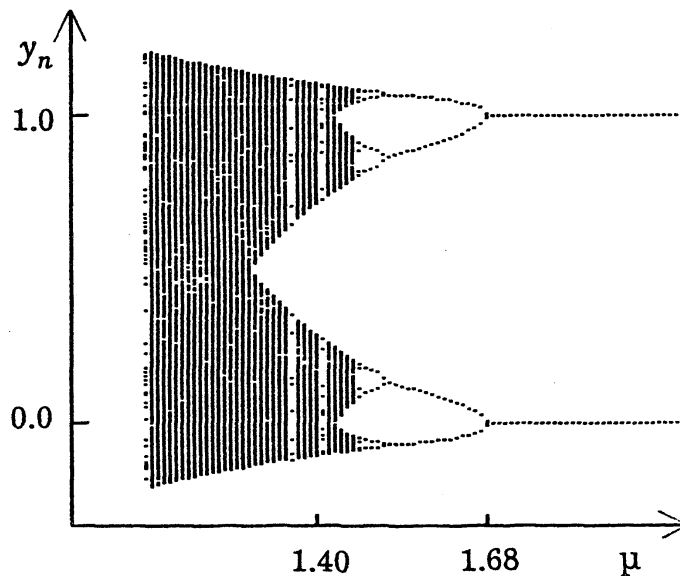


図2. 分岐ダイアグラム. 写像 $f(y) = \sqrt{2}y(1-y)$ に対する常微分方程式(5.1)において y'' を中心差分, y' を(離散化幅 $h=1.40$) 後進差分で近似し, μ を定数パラメータとして二組の初期値のもとで解いたときの解軌道のプロット図. 但し $g=1$, $a=1$. 小さな μ でカオスを, $\mu > 1.68$ において安定な漸近挙動を見る. なお $\mu=h$ のときは, (5.2) は厳密な最急降下法である.

図2の分岐ダイアグラムについて若干の注釈を述べておく. $h=1.4$, $\mu=1.2$, そして初期値を $(x_0, y_0) = (0.0, 0.2)$ とする (x_n, y_n) の軌道を x - y 平面上に図示すると図3のようになる. この図

においてストレンジ・アトラクタを見ることができる。これはヘノン・アトラクタ¹⁴⁾の一種である。

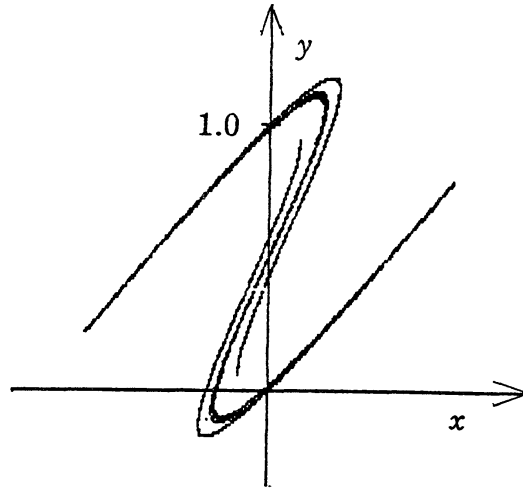


図3. ストレンジ・アトラクタ

一方、この問題の写像(5.5)は $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, \frac{1}{2})$ の3つの不動点を持つ。上の命題によって最初の2つの不動点 $(0, 0)$ と $(0, 1)$ は、 $\mu < (h^2+h)/2$ のとき鞍部点となり、 $\mu > (h^2+h)/2$ のときアトラクタとなる。分岐ダイアグラムにおけるゼロまたは1への漸近は後者が対応する。

6. SVF 法の改良と数値実験

SVF法の安定性は前節で述べた通りであるが、次の問題は極小点や鞍点への漸近特性の解消である。これは非線形方程式の複数個の解を系統的に探索するための接近として必要である。この解決のためにSVF法の改良を試みた。改良の基本は制御機構を導入することである。(2.2)式における $A(t, y)$ は正定値行列であることから、SVF法は例えば一度極小点に漸近すれば、二度とそこから脱出することが不可能である。従って、漸近先がゼロ点、極小点、鞍点、等であるかを判定した後、再びそこから脱出することのできるような制御機能を備えればよいことになる。この機能を持たせるために(2.2)式を次のように改良する。

$$(6.1) \quad \begin{cases} \mu(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + A(t, y) \frac{dy}{dt} = -\nabla P, & (t \geq 0), & \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^T, \\ A(t, y) = g(t) [a(t) I + J(y)^T J(y)], \end{cases}$$

ここで

$$(6.2) \quad g(t) > 0, \quad +\infty > a(t) > -\infty, \quad t \geq 0,$$

上式が SVF法(2.2) と本質的に変わる部分は関数 $a(t)$ のレンジだけである。仮に $a(t)$ を

$$(6.3) \quad a(t) = \begin{cases} C_0, & t < t_0, \\ C_0 - C_1 \exp(-\gamma(t-t_0)), & t > t_0, \end{cases}$$

$\gamma > 0$ とする。そして、 $C_0 - C_1 < 0$ となるように定数 $C_0 (\geq 0)$, $C_1 (> 0)$ を取る。この $a(t)$ の概略的なグラフを図4に与える。たまたまこのように選んだ $a(t)$ に対して

$$(6.4) \quad |C_0 - C_1| \gg \max \lambda (= J(y)^T J(y) \text{の最大固有値})$$

であれば、時刻 t が t_0 以降のしばらくの間、(6.1)の $A(t, y)$ は負定値行列となる。そのとき、方程式(6.1)は増幅系となり、一度漸近した点からの脱出軌道に入る。従って、 t_0 が立つとき、漸近点の近傍からの脱出機能が作動することになる。この t_0 の設定は与えられた制限パラメータ $\varepsilon > 0$ に対して

$$(a) \quad \frac{1}{2} y'^T y' + P \leq \varepsilon,$$

$$(b) \quad |\det J(y)| \leq \varepsilon,$$

の何れかまたは両方が成立した時点とする。ここで (a)は解がゼロ点に漸近したことを意味し、(b)は極小点か若しくは退化点に解が漸近したことを意味する。また、両者の同時成立は重複を持つゼロ点への漸近を意味する。

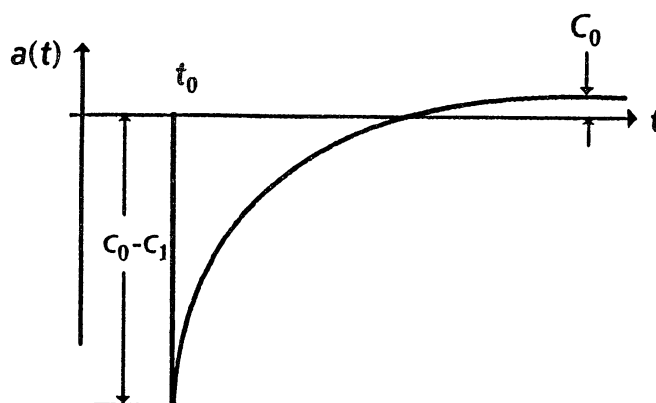


図4. $a(t)$ の概略的なグラフ

つぎに、非線形2点境界値問題⁸⁾からの二つの具体例に対して上述の方法の適用を試みる。なお(6.1)の常微分方程式の数値積分には y'' に中心差分近似そして y' に後進差分近似を用いる(5.2)式のような近似法を適用した。この理由は4次のRunge-Kutta法、Cowell型の7次の予測子-修正子法を併用してみたがその解挙動に基本的に違いは見られなかったことによる。実際、これらの二つの高精度な数値積分法では安定性の制約のため大きな積分刻みを取ることができず解軌道の収束性が極端に悪かった。

【数値例1】 関数

$$f_1 = 0.06 \exp(y_1) + 0.04 \exp(y_2) - y_1$$

$$f_2 = 0.06 \exp(y_2) + 0.04 \exp(y_1) - y_2$$

に対して、各パラメータを下記のように設定して実行した。

$$h = 0.1, \quad \varepsilon = 0.0001,$$

$$C_0 = 0.0, \quad C_1 = 1.8, \quad \tau = 0.1.$$

この関数に対応するポテンシャル場の等高曲線を図4に示す。このポテンシャル場に

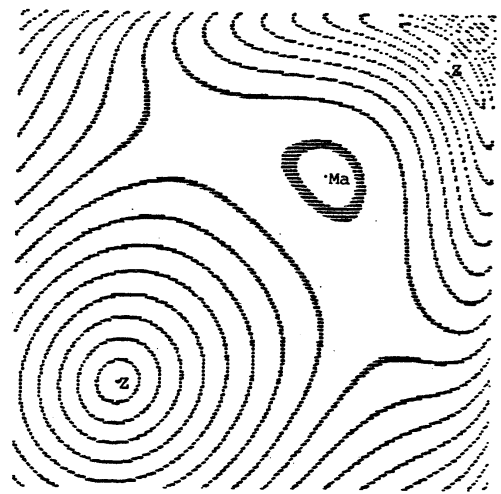


図4. 数値例1の関数の等高ポテンシャル曲線 (Z:ゼロ点, Ma:最大点)

は2つのゼロ点 $((0.1183, 0.1183)$ と $(3.577, 3.577)$)と1つの最大点がある。3つの出発点

$$\begin{pmatrix} (x_{1,0}, y_{1,0}) \\ (x_{2,0}, y_{2,0}) \end{pmatrix} : (a) = \begin{pmatrix} (0.0, 2.0) \\ (0.0, 1.0) \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} (0.0, 4.0) \\ (0.0, 4.2) \end{pmatrix}, (c) = \begin{pmatrix} (0.0, 3.5) \\ (0.0, 4.0) \end{pmatrix}$$

からの解軌道をそれぞれ図5の(a), (b), (c)に与える。ただし、(a)だけは $C_1=3.1$ としている。これらは何れも成功例である。なお、図中に記載してあるc印は制御開始の場所、s印は出発点を表す。次に全ゼロ点の探索に失敗するケースを与える。このケースは一つのゼロ点を見つけた後、 t_0 を起こして制御するが再び元のゼロ点に漸近する例である。このときの出発点を

$$\begin{pmatrix} (x_{1,0}, y_{1,0}) \\ (x_{2,0}, y_{2,0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.0, 3.0) \\ (0.0, 2.0) \end{pmatrix}$$

に取った。このときの解軌道は図6に示す。

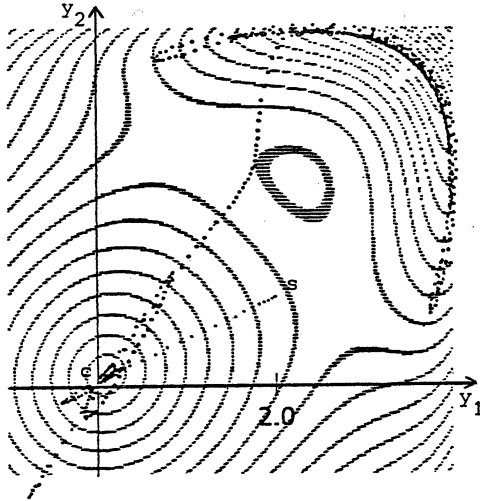


図5(a). 全ゼロ点探索に成功のケース

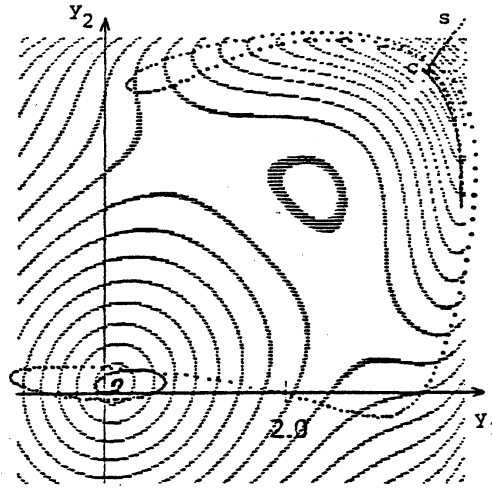


図5(b). 全ゼロ点探索に成功のケース

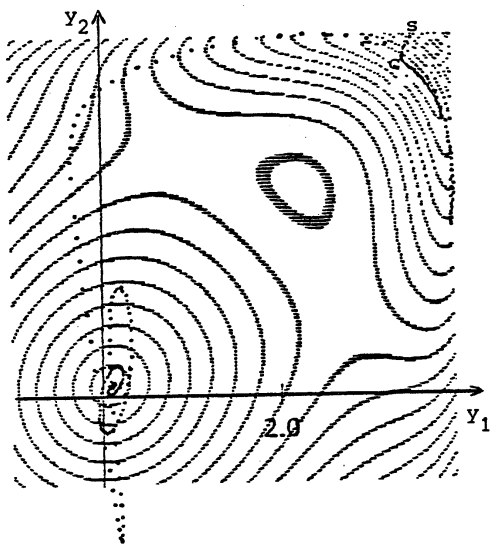


図5(c). 全ゼロ点探索に成功のケース

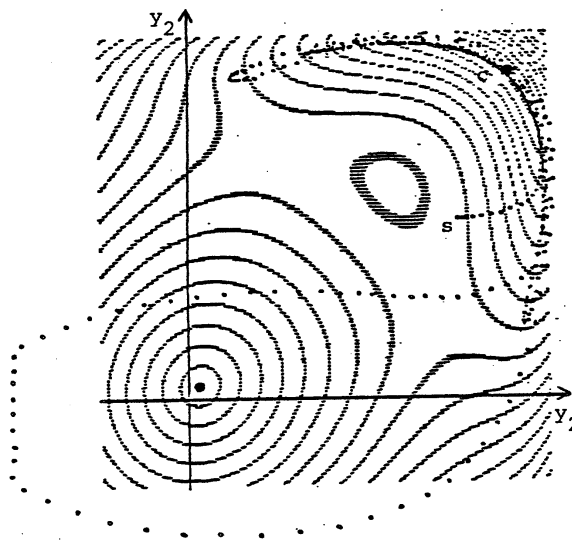


図6. 全ゼロ点探索に失敗のケース

【具体例2】 関数

$$f_1 = y_1^3 - y_2 + 1$$

$$f_2 = y_2^3 - y_1 + 1$$

に対して、各パラメータを下記のように設定して実行した。

$$h=0.01, \quad \varepsilon=0.01,$$

$$C_0=0.0, \quad C_1=5.0, \quad r=0.1.$$

この関数に対応するポテンシャル場の等高曲線を図7に示す。このポテンシャル場は各1個のゼロ点(0.5773, 0.5773), 最小点(-1.3247, -1.3247), 最大点からなる。3つの出発点

$$\begin{pmatrix} (x_{1,0}, y_{1,0}) \\ (x_{2,0}, y_{2,0}) \end{pmatrix} : (a) = \begin{pmatrix} (0.0, -1.0) \\ (0.0, -0.5) \end{pmatrix}, (b) = \begin{pmatrix} (0.0, 1.0) \\ (0.0, 0.5) \end{pmatrix}, (c) = \begin{pmatrix} (0.0, -1.0) \\ (0.0, 0.0) \end{pmatrix}$$

からの解軌道をそれぞれ図8の(a), (b), (c)に与える。これらは何れも成功例である。

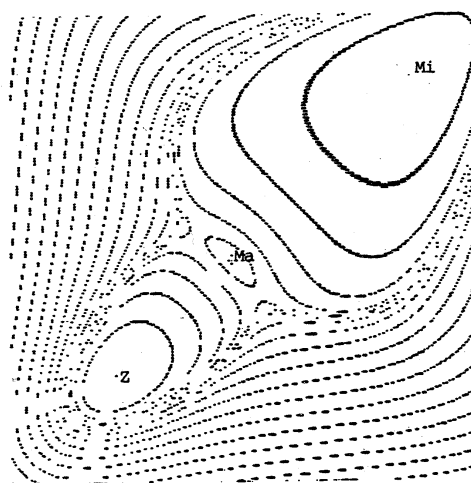


図7. 数値例2の関数の等高ポテンシャル曲線

(Z:ゼロ点, Mi:最小点, Ma:最大点)

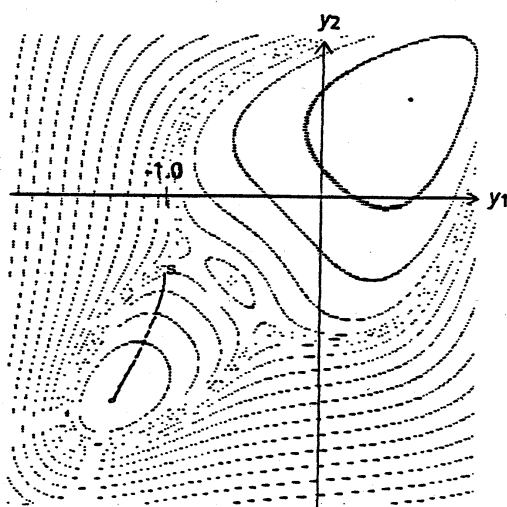


図8(a). 直接ゼロ点に漸近するケース

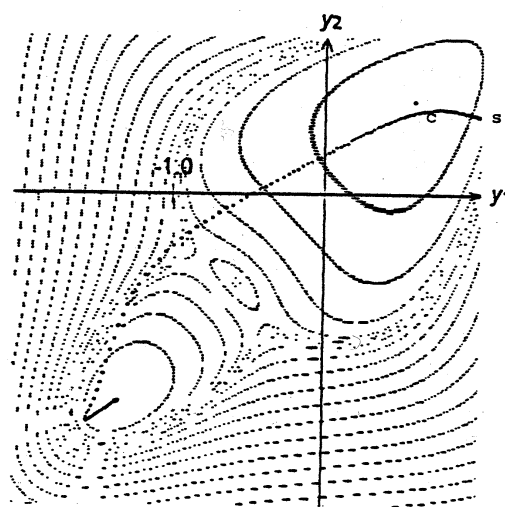


図8(b). 最小点に漸近した後ゼロ点に漸近

7. まとめ

本資料ではつぎの2点を重点的に述べた。

(I) 問題によっては最急降下法において、カオティックな現象を起こすことを主張した。そして y'' 項の付加はこの解消に有効的に作用することを論じた。

(II) SVF 法では、常に y' の項が散逸系の減衰項としての機能しか持たないため、一度極小値や鞍点に漸近すると二度とそこから脱出することが出来ないことを指摘して、脱出するために一時的にエネルギー増大の力学系となるような方法を提案

した。これにより解軌道の極小点や鞍点などでの停留をくい止め、SVF 法に対する大域的収束特性の改良を図った。

この (II) により原理的には大域的にゼロ点を渡り歩くことの可能性を示唆した。しかし、実用化のためには幾つかの問題を解決せねばならない。第1に一度特定したゼロ点や最小点をポテンシャル場の中から如何に除去するかという点の一つである (図6参照)。第2として本資料で提示した制御関数 $a(t)$ は任意性が多過ぎることである。今後、最適な $a(t)$ の検討が必要である。

謝辞：日頃より御指導頂く当研究所北川敏男会長ならびに榎本肇所長に感謝致します。

参考文献

- 1) N. Sagara and M. Fukushima : A continuation method for solving separable nonlinear least squares problems, J. Comp. and Appl. Math., 10, 157-161, 1984.
- 2) 非線形連立方程式のホモトピー法による数値解析の研究, 昭和58年度科研費研究報告書(研究代表者池辺八洲彦).
- 3) D. F. Davidenko: On a new method of numerical solution of systems of nonlinear equations Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 88, 601-602, 1953.

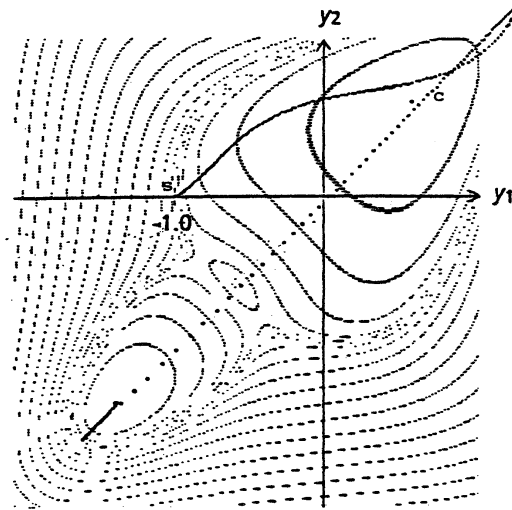


図8(c). 最小点に漸近した後ゼロ点に漸近

- 4) F. H. Branin: A globally convergent method for finding multiple solutions of nonlinear simultaneous equations, Conference, Scotland, NMNO, 1971.
- 5) K. Tanabe: Continuous Newton-Raphson method for solving an underdetermined system of nonlinear equations, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol.3, No.4, pp.495-503, 1979.
- 6) I.Sandro, P.Valerio, Z.Francesco: A New Method for Solving Nonlinear Simultaneous Equations, SIAM Numer. Anal., Vol.16, No.5, pp.779-789, 1979.
- 7) 桜井鉄也, 鳥居達生, 杉浦洋: 実係数代数方程式の連立型解法とその静電場的解釈, 京大数理解析研究所講究録583(並列数値計算アルゴリズムとその周辺), 1986年2月, 1-25.
- 8) 鈴木千里: 不動点近似による非線形2点境界値問題の数値解法, 情報処理学会論文誌, 第26巻, 第5号, 24-35, 1985.
- 9) R.P. Brent: On the Davidenko-Branin method for solving simultaneous nonlinear equations, IBM J. Res. Develop., 16, pp.434-436, 1972.
- 10) T. Li and J.A. York: Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly, 82,985-992, 1975.
- 11) M. Yamaguchi, H. Matano: Euler's finite difference scheme and chaos, Proc. Japan Acad.,55, Ser.A, 78-80, 1979.
- 12) M. Yamaguchi, S. Ushiki: Discretisation et chaos, C.R.Acad.Sci. Paris,Ser.A-B290, No.14, A637-B640, 1980.
- 13) S. Ushiki:Central difference scheme and chaos, Phys. D4(1981/1982), no.3,407-424.
- 14) M. He'non: A two dimensional mapping with a strange attractor, Comm. Math. Phys., 50, 69-77, 1976.
- 15) R. Devaney : An introduction to chaotic dynamical systems, The Benjamin/Cummings Company, Inc, California, P.320, 1986.