数理解析研究所講究録
613巻 1987年 133-134

収束の遅い級数の加速例

京大数理研／一松　信　　Sin Hitotumatu

1986年秋の学会で、Leibniz の級数などについて具体的な剰余項を求めたが、その後 $\Sigma 1/(n^2+1)$について「補外」が可能なことに気付いたので、ここに追加報告する。(当初の予定だったICM-86の報告については、数式処理研究会の報告に併せて記述した。)さて

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k^2 = 1/n - 1/2n^2 + 1/6n^3 - 0/n^4 + O(n^{-5})$$

は、数学会で述べたように、誤差の積分表示から計算できるが、端補正の台形公式、ないしはそれと同じだがEuler-Maclaurin の公式などの手法でも計算できることを、中島勝也教授から御注意頂いた。

他方次の公式は、直接に計算できる。

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/(k^2-1) = [1/n+1/(n+1)]/2 = 1/n - 1/2n^2 + 1/2n^3 - 1/2n^4 + O(n^{-5})$$

さてここで欲しいのは次の値である。

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k^2+1) = \pi\cdot\coth(\pi)/2 - 1/2 = 1.0767740475...$$

次の関係に注目しよう。

$$1/(k^2-1) - 2/k^2 + 1/(k^2+1) = 2/k^2(k^4-1) \sim 2/k^6,$$

n からのこの和は $O(n^{-5})$

従って4次まででよければ、係数の補間が可能である。　さらに同じ論法により、任意のAについて次の式が成立する。

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/(k^2+A) = 1/n - 1/2n^2 + [1/6 - A/3]/n^3 + (A/2)/n^4 + O(n^{-5})$$

この式はすべての $A \neq -m^2, m>n$ について正しいけれども、Aが余り大きいと5次以上の項が無視できなくなって、実用にならない。

下に幾つかの数値例を示す。 100項とって加速すれば、小数点以下10桁正確に出る。

もちろんここに挙げた級数は、理論的に真値が求められるし、数値的にも通例の一般的な加速公式によって奇麗に計算できる。 実際二宮市三先生から計算結果を頂いた。

私が誤差の具体式にこだわるのは、むしろ大学初年級の教育面への適用を考えているせいである。

A	真値	20項の和	加速値
-0.5	2.6910120633	2.6422219037	2.6910120079
-0.25	2.0000000000	1.9512195122	1.9999999809
0	1.6449340668	1.5961632439	1.6449340772
0.25	1.4253771499	1.3766159850	1.4253771829
0.5	1.2743205342	1.2255690204	1.2743205829
0.75	1.1629210258	1.1141791562	1.1629210832
1	1.0766740475	1.0279418152	1.0766741069
		100項の和	加速値
-0.5		2.6810617324	2.6910120633
-0.25		1.9900497512	2.0000000000
0		1.6349939002	1.6449340668
0.25		1.4154270653	1.4253771499
0.5		1.2643705317	1.2743205342
0.75		1.1529711054	1.1629210258
1		1.0667242091	1.0766740475

[参] 一松　信：教室に電卓を！Ⅲ，海鳴社、1986年10月、特に第６章。