

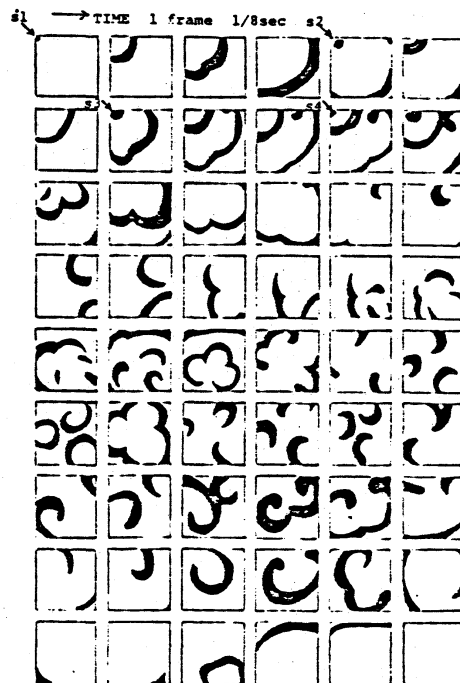
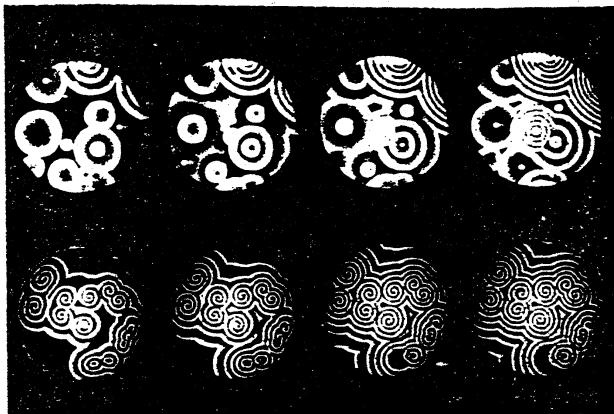
Dynamics of Interfaces
in Systems of Reaction Diffusion

広島大学理学部 小林 亮

第 1 章 序

自然科学の様々な分野で見られるパターン形成に関するモデルの中で、特に反応拡散方程式系によって記述されるものと、それらのシミュレーションについて、いくつかのトピックスを紹介する。ここでは、対象とする系の状態が急激に変化する遷移層や、相転移の際にみられる界面の見せるパターンについて考えたい。このようなパターンの中には、複雑さと同時に美しさを合わせ持ったものがしばしば観察される。いくつか例を挙げてみよう。

(図 1) は Belousov - Zhabotinsky 反応と呼ばれる化学反応である。これはある種の有機物が臭素酸によって酸化される際に現れるパターンであり、不純物や壁面をベースメーカーとするターゲット状のパターンや、スパイラル状のパターンをみるこ

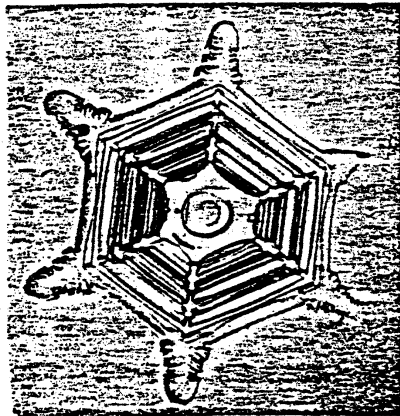


左上: (図 1) [1]
 左上: (図 2) [2]
 右: (図 3) [1]

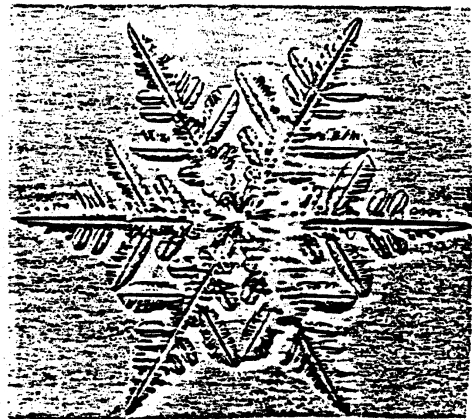
とができる。(図2)は細胞性粘菌の集合期において観察されるパターンである。この現象においては c-AMP と呼ばれる走化性物質と PDE と呼ばれる酵素とが、重要な役割を果たしていることが知られている。(図1)と比べてみると全く異質な系であるにもかかわらず、非常に似通ったパターンを示しているのが興味深い。(図3)は鉄-硝酸反応系と呼ばれるもので、この現象が発見された当初から、神経における信号伝達機構との類似性が指摘されてきた反応である。これは鉄線で編んだ金網上での実験結果であって、(図1)や(図2)ほどはっきりしていないが、やはりターゲット状のパターンや、スパイラル状のパターンがみられる。

これらの似通ったパターンは、それぞれ全く異なった現象の中で見られるものであるが、それらの間になんらかの共通のメカニズムがあるのではないかという期待をいだかせる。そこで、これらの現象を「興奮場」と呼ばれる一つの枠組によって理解しようという試みを第2章で紹介する。

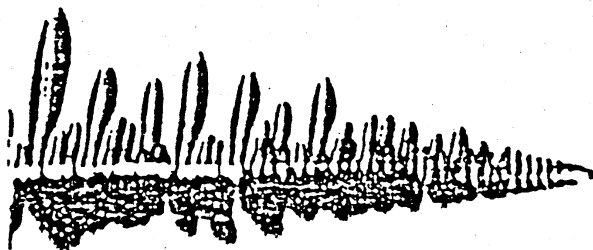
(図4)(図5)は雪の結晶で、古来よりその美しさによって、多くの人々に親しまれてきた。六方対称性を基本としたその形状は千変万化である。(図6)(図7)



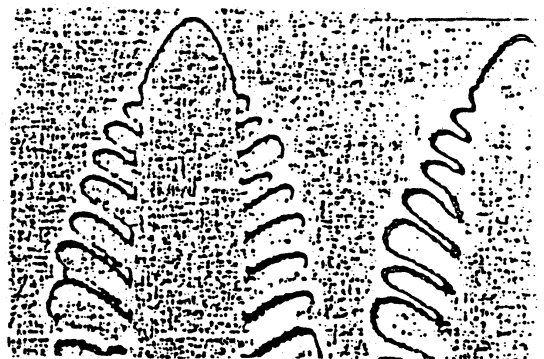
(図4)[12]



(図5)[12]



(図6)[13]



(図7)[14]

は過冷却液や過飽和溶液中から結晶が析出する際に見られるデンドライトと呼ばれる構造物である。このような複雑な形態がほぼ一様な環境相のなかで生成されるということは、実に興味深いことである。第3章では、このような結晶成長のうち1成分凝固系に対するアプローチについて述べる。

このようなパターン形成の問題を理論的に扱う際の難しさには、大きく次の2点が考えられる。まず、「形」というものをどのように数学的に表現し、またその表現の表わすパターンをどのように評価するかという問題である。もう一つは、これらの複雑なパターンは多くの場合遷移過程における産物であるということである。残念ながら現段階では、このような遷移過程におけるパターン形成を解析するための数学的手段は十分なものであるとは言い難い。それゆえ、モデル方程式が実際のパターンを再現しうるものであるかを検証したり、モデルに含まれるパラメータサーチを行ったりするために、数値シミュレーションが非常に重要な手段となる。さらに、膨大な数値データの映像化を適切に行なうことは、計算結果の評価を行なう上で、不可欠な技術であると言える。特に本稿の話題である、動的な系におけるパターン形成に対しては、アニメーションによる結果の表示が、非常に直接的で効果的である。今回紹介したアニメーションビデオは、このような目的を持って作成されたものである。また、このようなビデオを作成することによって、関連分野の研究者とのコミュニケーションを円滑に行なうことが可能であると言える。

第2章 興奮場におけるパターン形成

本章では、(図1)~(図3)に見られる特徴的なパターン形成のメカニズムを、ある特性を持った興奮場における普遍的現象としてとらえたい。まず、興奮場とはどのようなものであるかを説明しよう。系はただひとつ安定な状態Aを持っているとする。そこに、なんらかの刺激が与えられた時に、もしこの刺激が小さければ、系はすみやかに元の状態Aに戻る。もし刺激がある程度大きければ、系は一旦興奮して、しかる後に状態Aに戻る。このような場を単安定興奮場と呼ぼう。次に、系がA以外にもうひとつ安定な状態Bを持つ場合を考える。状態Aにある系に小さい刺激が与えられたときには、単安定の場合と同じ様にすみやかに状態Aに戻るが、大きい刺激に対しては系は状態Bに遷移する。このような場を双安定興奮場と呼ぶことにする。

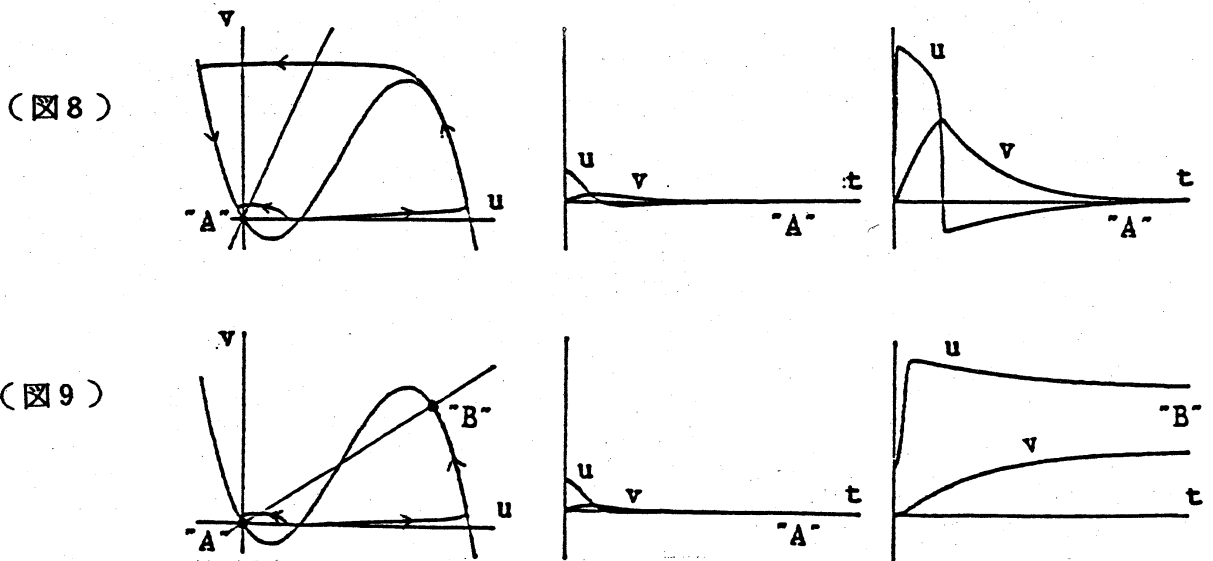
このような興奮場を記述する、最も簡単なモデル方程式として、次の Bonhoeffer

van der Pol 方程式がある。

$$\begin{cases} u_t = u(u - \alpha)(1 - u) - v & 0 < \alpha < 1/2 & (2.1) \\ v_t = \varepsilon(u - \gamma v) & \varepsilon \ll 1 & (2.2) \end{cases}$$

ここで u を activator, v を inhibitor と呼ぶことにしよう。Activator と inhibitor の個々の特性(すなわち第1式で $v = 0$ 第2式で $u = 0$ としたときの特性)を見ておこう。Activator は 0 と 1 の 2 つの安定状態を持ち $0 < \alpha < 1/2$ より 1 の方が強い安定性を持つことがわかる。以下では u が 1 に近い状態を興奮した状態と呼ぶことにしよう。対して、inhibitor は単に指数的減衰を特性とする量である。両者の相互作用を見ると、inhibitor は activator を抑制し activator は inhibitor を生成するという関係になっている。また、 $\varepsilon \ll 1$ より activator は inhibitor に比べて非常に変化の速い量である。この方程式は γ がある値より小さいときには単安定興奮場を表わし、それより大きいときには双安定興奮場を表わしている。(図8)(図9)は興奮場の持つ、刺激に対するレスポンスを、それぞれ単安定、双安定の場合について表わしたものである。

初めに紹介したいいくつかの現象には、それぞれモデルが提出されており⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ここではそれらについて細かく述べることはしないが、これらのモデルによって記述される現象は、ある実験条件のもとでは単安定興奮場とみなせることがわかる。また



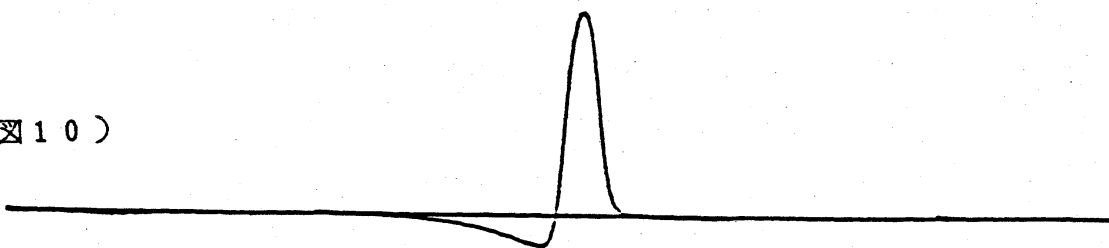
それ以外に、神経の興奮を記述する Hodgkin-Huxley モデル^[6]も単安定興奮場を表わすモデルである。

ここで問題となるのは、このような単安定興奮場が拡散性の媒質であったとき、この場の上でどのように刺激が伝達され、また、その刺激がどのようなパターンを形成するかということである。ここでは拡散性を持つ単安定興奮場のモデルを代表する方程式として特に FitzHugh - Nagumo 方程式^{[7][8]}を考えよう。以下で紹介するシミュレーションもこの方程式に関するものである。これは、Bonhoeffer van der Pol 方程式において、activator のみが拡散性を持つ（もしくは著しく activator の拡散性が inhibitor の拡散性より大きい）場合を記述するモデル方程式である。

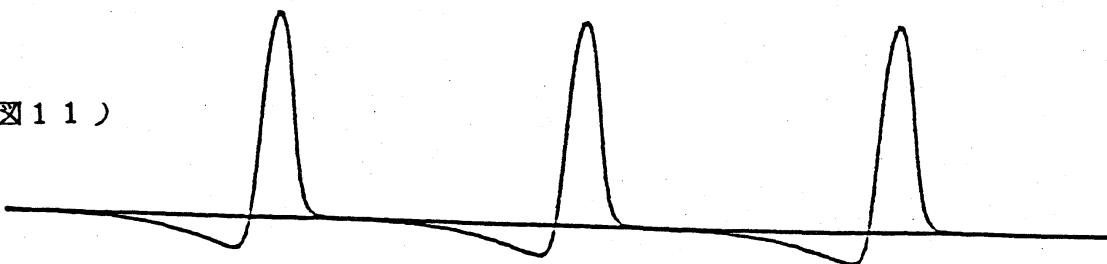
$$\begin{cases} u_t = D \nabla^2 u + u(u - \alpha)(1 - u) - v \\ v_t = \varepsilon(u - \gamma v) \end{cases}$$

この方程式は、空間1次元の場合、よく知られているように、(図10)のような形の安定なパルス進行波解を持つ。^{[9][10]}ここでこのパルス進行波解の形状について考えておこう。パルスのフロント部では $v \approx 0$ であるため、 u 単独の場合の2つの安定状態を結ぶ遷移層が生じており、 $u = 1$ の方が安定性が強いため、このフロントは前進する。これによっていったん興奮状態にはいった部分では、単安定興奮場の

(図10)



(図11)



(図10)(図11): activator のグラフ。パルスは右に進行する。

特性に従って activator は急激に減少し、しかる後にある時間をもってもとの状態に回復する。これが1パルス進行波解が維持されるメカニズムである。また、同様に(図11)のようなパルス列進行波解も存在する。

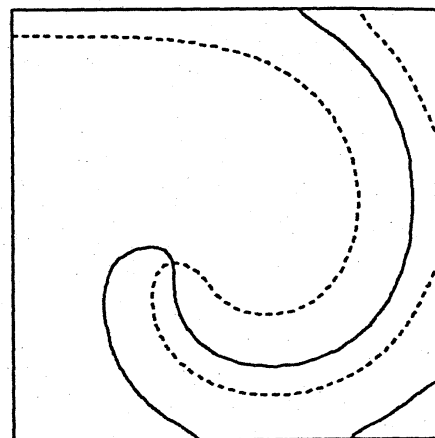
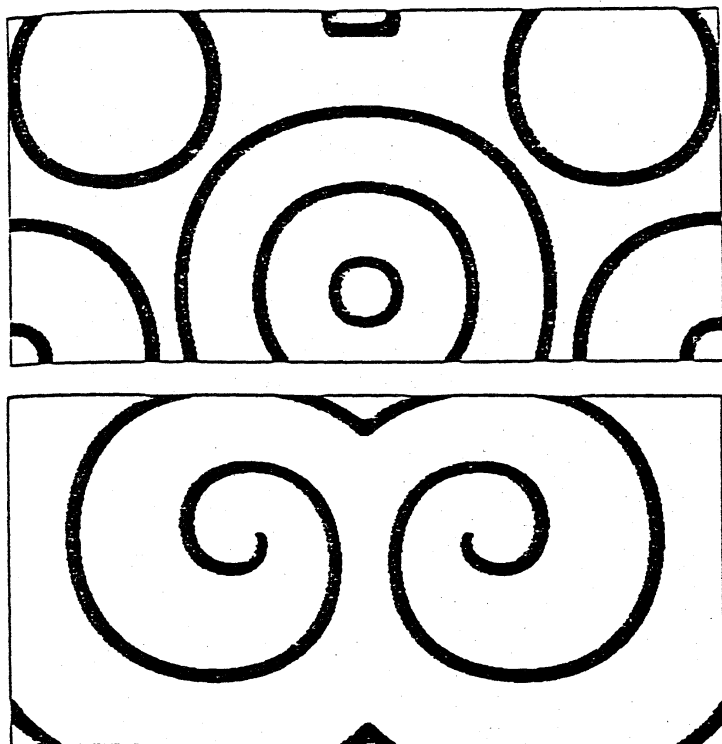
このパルス(列)の性質を挙げておこう。

- (1) 刺激に対して閾値を持つ。すなわち、ある強さ以上の刺激が与えられなければパルスは発生しない。
- (2) 不応期を持つ。これは、パルス列においてパルス間距離には下限があることを示している。
- (3) パルスどうしが正面衝突すると、一対一で消滅する。
- (4) パルス列において、パルス間距離が大きい方がパルスの進行速度が速い。

これらの性質は、実際の現象(神経パルス、鉄線上の鉄-硝酸反応等)と定性的によく一致している。(1)は場自体が持つ特性の反映である。(2)は1つのパルスによって生じた inhibitor が十分減衰しきらないうちに後続のパルスのフロントが到着したときは、このパルスはつぶれてしまうという性質を述べている。(3)は保存場における波と本質的に異なる特性である。(4)は先行するパルスの残した inhibitor の残留量により、後続のパルスの速度が影響を受けることによる。これらの特性はかなりはっきりした性質であるが、数学的な記述は難しい。

では、この方程式は空間2次元の場合に、どのような解を持つだろうか。まず、1次元の場合のパルス(列)に対応して、1次元的なフラットな形の進行波(列)があることがわかる。次に、(図12)のように軸対称に広がっていくリングパターンやターゲットパターンがあることも、容易に想像されるだろう。もちろん、この場合、中心に刺激の供給がなければならぬ(実際にはこの中心部は不純物等の要因で振動的な場になっていると推測される)。興味深いのは、この方程式が(図13)のような回転するスパイラル状の解を持つことである。この解は、進行波の波面が一部カットされた状況から生じてくることがシミュレーションよりわかる。そして、一旦生じたスパイラル状の解は、その後刺激を与えなくとも、消えることなくその形状を保つことができる。これは、スパイラルの中心部が、回転しながら(図14)に示されるような構造を保持し続け得ることによっている。

ここで留意すべき重要な事は、これらの2次元パターンが実際にシミュレーションで観察されることから、その波面の形状が微小な摂動に対して安定であると推測され



左上：(図12)
 左上：(図13)
 黒い部分が興奮領域である。

右：(図14)
 実線は activator、破線は inhibitor の等高線である。

ることである。特に2次元空間における1次元的な単一パルスに関しては、三村等によって安定性が理論的に示されている。^{〔11〕}

これらの2次元空間における進行波には、1次元の進行波の性質に対応していくつかの性質がある。まず、(2)と対応して、同一方向に進む進行波の波面の間の距離には下限がある。また、波面どうしが衝突したときには、それらは、保存場における波のように互いにすりぬけることができずに、消滅してしまう。これは性質(3)と対応しており、これらの2次元パターンの特徴を作る大きな要因となっている。シミュレーションによって観察されたこれらの性質は、1次元の場合と同様、実際の現象(Belousov - Zhabotinsky 反応、金網上の鉄-硝酸反応等)と定性的に非常によく一致している。

今回のシミュレーションで用いたモデル方程式は、それぞれの現象のモデル方程式ではなく、それらの共通の性質を抽出して単純化したものである。このモデル方程式によってターゲットパターンやスパイラルパターンが得られたということは、これらのパターンが拡散性単安定興奮場に普遍的なパターンであることを示唆している。実際我々は鉄-硝酸反応系のシミュレーションにおいても同様のパターンを得ている。逆に上述のようなパターンを呈する現象は、拡散性単安定興奮場としてとらえることができる可能性が高いと言えるであろう。

第3章 凝固現象において見られるパターン形成

結晶成長は古くから、物理学・金属学等の分野で研究が続けられている現象で、ミクロなレベルでは多くの知見が得られているが、マクロなスケールでこれらの構造を記述する数理物理的なモデルの研究は比較的近年のものである。本章では結晶成長の一種である1成分系の凝固現象を、マクロな物理量を用いて記述するモデルと、その数値シミュレーションについて述べよう。

金属や水などの結晶が融液内で成長する場合、その律速過程は、界面において発生する潜熱の除去過程であると考えられる。界面からの潜熱の除去効率により、界面における過冷度、すなわち凝固の駆動力が決定され、成長速度が決まる。ただし、成長速度は結晶構造に依存した異方性を持ち、このことが結晶の形状に本質的な影響を及ぼす。

凝固が進行する状況には、大きく分けて、次の2つの場合がある。まず一つは液体側に過冷がなく、結晶側から潜熱が除去される場合である。もう一つは過冷液体に向かって凝固が進行する場合であり、潜熱の除去は過冷液体を通して行なわれる。液体が過冷されていないときには、結晶形には複雑な構造は現れず、逆に成長とともに対称性の高い単純な形になってゆく。液体が過冷されているときには、デンドライト等の複雑な構造が、成長とともに現れてくる。

このことは表面張力と温度場という2つの要因を考えることによって解釈される。過冷がないときには、結晶側の温度場と表面張力が、ともに界面形状を安定化するように働く。故にこの場合、複雑な構造が生じることはありえない。それに対して、過冷があるときには、表面張力は同じように形状安定化の効果を持つが、過冷液体側の温度場は界面形状を不安定化させる要因となっている。そして、この2つが同時に働いた結果として、ある特徴的な長さを持った構造が形成されるのである。

このようなパターン形成を説明するモデルとしては Geometrical Model^[17]と Boundary Layer Model^[18]がある。Geometrical Model は、界面の成長速度が、界面の曲率のみによって決まるモデルである。Boundary Layer Model は界面付近の温度場を境界層と考え、その厚さを界面の曲率や成長速度に加えて1つの物理量と考え、他の物理量と連立させて解くモデルである。ここでは、これらのモデルについて詳しく述べることはしないが、興味のある方は[19]を一読されたい。それに対して、Phase Field Model^{[20][21]}と呼ばれるモデルがあり、これは相を表現するための秩序変数

の場を導入する方法である。あとで紹介するモデルは、本質的にはこのモデルと同様のモデルである。このモデルの利点は、界面どうしの相互作用が自然に表現でき、さらにシミュレーションが容易であるという点である。また、Langer らは、デンドライトの先端を回転放物面と考えて、先端の曲率半径と速度の間にある仮定を導入することにより、サイドブランチの onset を論じているが、^[22] この理論の正当性は十分確立されるには至っていない。

結晶成長を記述するためには、時間とともに変化する物の形、すなわち界面の運動を表現しなければならない。界面の厚さを 0 とするモデルを考えることもできるが、シミュレーションを行なう立場からすれば、界面の取り扱いがかなり難しいものになる。特に界面どうしが接触したりして位相的性質が変わるようなときは非常に扱いが困難である。そこでここでは界面が非常に小さいが有限の厚さを持つように記述されるモデルを考えよう。そのために次のような秩序変数の場 $p(x, t)$ を導入する。

$$p = \begin{cases} 0 & \text{in liquid phase} \\ 1 & \text{in solid phase} \end{cases}$$

そして、0 と 1 を結ぶ非常に狭いレイヤーによって界面を表現することにする。このような秩序変数の場を用いることにより、界面の複雑な形状の変化も容易に記述することができる。さらに、温度場 $T(x, t)$ を考えて、 $p(x, t)$ と $T(x, t)$ によって対象とする凝固系を記述する。使用する物理定数を挙げておこう。

T_0 : 平衡温度 (フラットな界面における),

T_c : 代表的な冷却温度 (例えば液体の初期過冷温度、過冷がないときは外部の冷却温度をとる.),

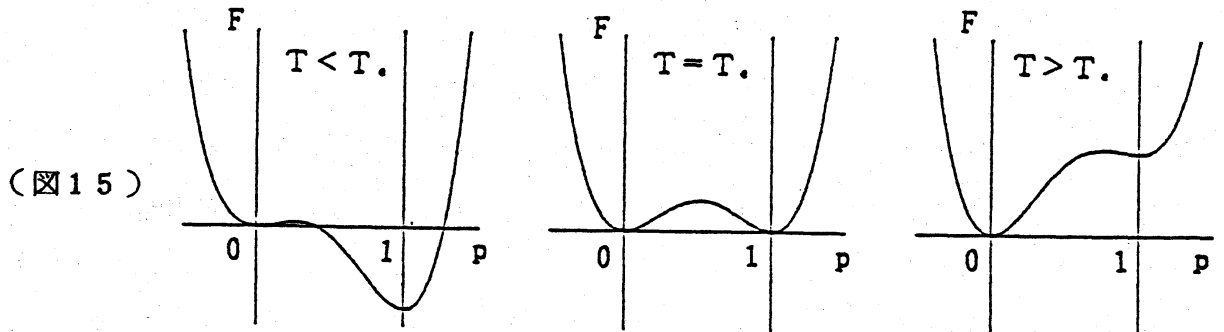
ΔT : 冷却の大きさ ($= T_0 - T_c$)

L : 潜熱, ρ : 密度, c : 熱容量, k : 熱伝導係数,

注: L, ρ, c, k 等は簡単のために、 p, T に依存しない定数としている。

ここで次のような Ginzburg - Landau 型の自由エネルギーを考えよう。

$$\Phi[p, T] = \int_V \frac{\epsilon^2}{2} |\nabla p|^2 + F(p, T) dx \quad (3.1)$$



ε は長さの次元を持ち、 p のレイヤーの幅は ε のオーダーである。 $F(p, T)$ は T をパラメータとする仮想的な自由エネルギー密度で、(図15)のようなものを考える。 $F(p, T)$ には次のことを要請しよう。 $F(p, T)$ は、 T を固定するとに $p=0, 1$ で極小値をとり、 $F(0, T) - F(1, T)$ は $T_c - T$ に(少なくとも $T_c - T$ が小さい時)比例するとする。この $\Phi[p, T]$ から p の時間変化を決める次の方程式を得る。

$$\tau p_t = \varepsilon^2 \nabla^2 p + f(p, T) \quad (3.2)$$

$$\tau, \varepsilon \ll 1$$

ここでは、 $f(p, T)$ として次のようなものを考えよう。

$$f(p, T) = p(p - \alpha(T))(1 - p) \quad (3.3)$$

$$\alpha(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan } \gamma(T - T_c) \quad (3.4)$$

ここで、 $x-y$ 平面を界面の接平面にとり z 方向を結晶からの外法線方向にとると $\varepsilon^2 \nabla^2 p$ は $\varepsilon^2(p_{xx} + p_{yy}) + \varepsilon^2 p_{zz}$ と書ける。 $\{p = 1/2\}$ を界面とみたときの平均曲率を κ とすると(結晶が凸であるとき $\kappa > 0$ とする)、 $\varepsilon^2(p_{xx} + p_{yy}) \propto -\varepsilon \kappa$ であり、これは表面張力の効果を表わしている。すなわち、 $\kappa > 0$ では界面における実効過冷却度は小さくなり、 $\kappa < 0$ では大きくなるために、突出した部分の成長速度を遅くし、へこんだ部分の成長速度を速くする効果を持つ。

次にエンタルピー $H = \rho(cT - Lp)$ に対する保存則 $H_t = k\nabla^2 T$ より

$$\rho c T_t = k \nabla^2 T + \rho L p_t \quad (3.5)$$

ここで、 T に関しては $T - T_c = \Delta T \cdot T'$ によって無次元化を行ない、ふたたび T' を T と書き直すことにより次を得る。

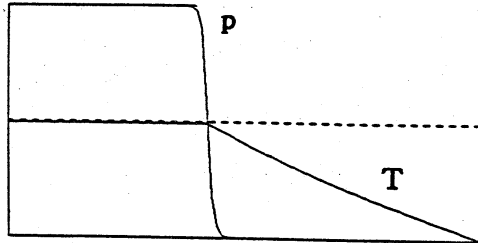
$$T_t = D \nabla^2 T + K p_t \quad (3.6)$$

$$D = \frac{k}{\rho c} \quad K = \frac{L}{c \Delta T} \quad T_c = 1 \quad T_c = 0$$

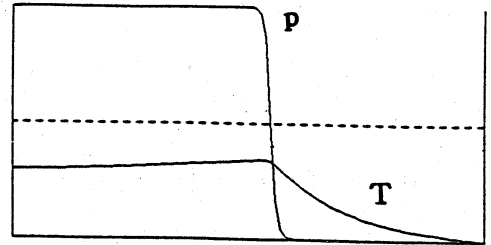
K は無次元化された潜熱であり、このモデルにおける重要なパラメータである。液体が過冷されている場合に、 $K > 1$ であるような状況を *undercooling* と呼び、 $K < 1$ であるような状況を *hypercooling* と呼ぶことにしよう。 $K < 1$ の状況は、金属においては実現することは困難であるが（特に構造を観察できる程の大きさの試料については、ほとんど不可能である。）、潜熱の小さいある種の物質については容易に実現することができる。デンドライトのような複雑なパターンは *undercooling* の状況下で観察され、*hypercooling* のときにはもっとゆるやかなパターンが形成される。^[16]

(3.2) と (3.6) を連立させ、適当な境界条件のもとで解くことにより、シミュレーションを行なうことができる。まず、空間1次元の場合について、どのような解があるかを(図16)～(図19)に示そう。重要なことは、界面の厚さすなわち p の遷移層の幅が拡散長に比べて、はるかに短くなくてはならないことである。これは $\varepsilon \ll 1$ により保証される。

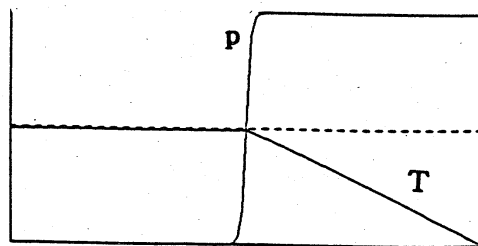
それでは空間2次元の場合にはモデル方程式(3.2), (3.6)はどのような性質の解を持つだろうか。我々は(図20)(図21)のような初期界面に摂動を加え、その後の界面の時間変化を追跡した結果、次のような性質を見いだした。



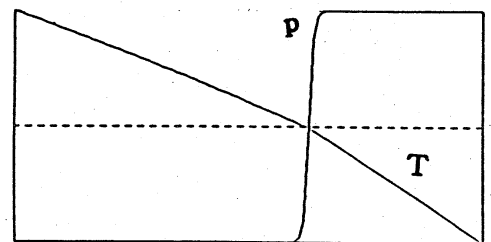
(図16)



(図17)

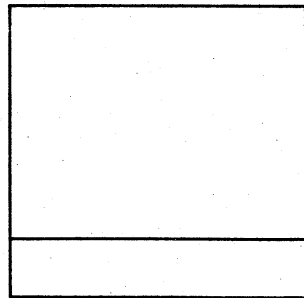


(図18)

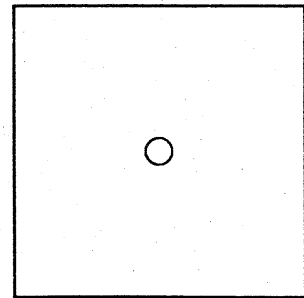


(図19)

(図16)は undercooling (図17)は hypercooling
 (図18)(図19)は過冷のない場合の計算である。
 点線は $T = T_c$ を表わしている。



(図20)



(図21)

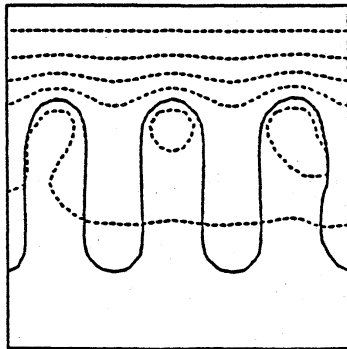
まず、液体が過冷されていない場合には、すみやかに界面形状は平坦化し複雑なパターン形成は見られない。これは実際の現象と一致しているが、やはり我々にとって興味深いのは、液体が過冷されている場合に、このモデルが現実のパターン形成をどの程度再現しうるかということである。そこでこの場合についてのシミュレーションを重点的に行なった。Undercooling と hypercooling の2つの場合について、結果を述べておこう。

Undercooling の場合 (図22)~(図25)

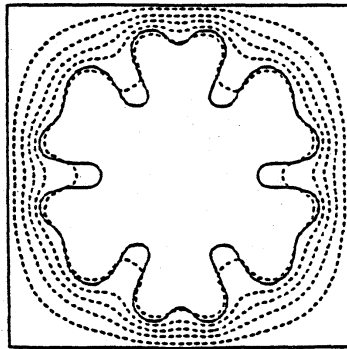
- * 界面形状の不安定化、及び、それに続く構造の形成が、あるパラメータ領域に対して観察された。
- * 不安定化を起こす際には、十分短い波長の摂動は減衰し、ある特定の長さを持った構造が優先的に現れる。
- * いくつかのブランチが競合して成長する場合、先に成長を開始したブランチが近くのブランチをスクリーニングして、その成長を抑止する性質が見られた。
- * 過冷液体中に突出したブランチでは、Tip-splitting が起こる。
- * 形成される構造は、初期状態に強く依存するが、共通の形態的特徴(サンゴ状ともいうべき)を備えているように思われる。

Hypercooling の場合 (図26)(図27)

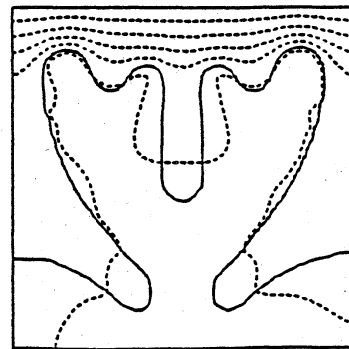
- * Undercooling の場合程複雑なパターンは生じないようであるが、必ずしも平面状の界面は安定ではなく、弱いパターンを見ることができる。



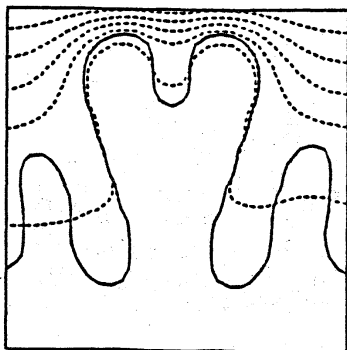
(図22)



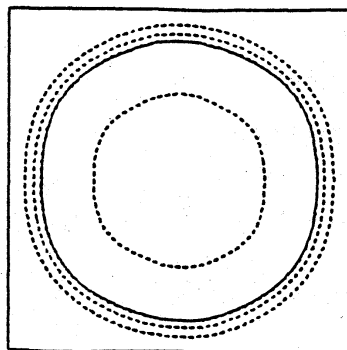
(図23)



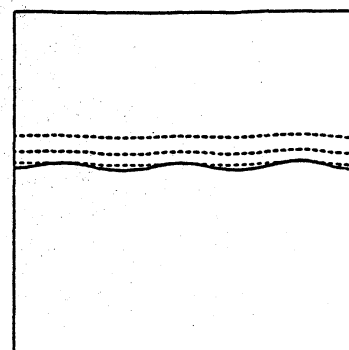
(図24)



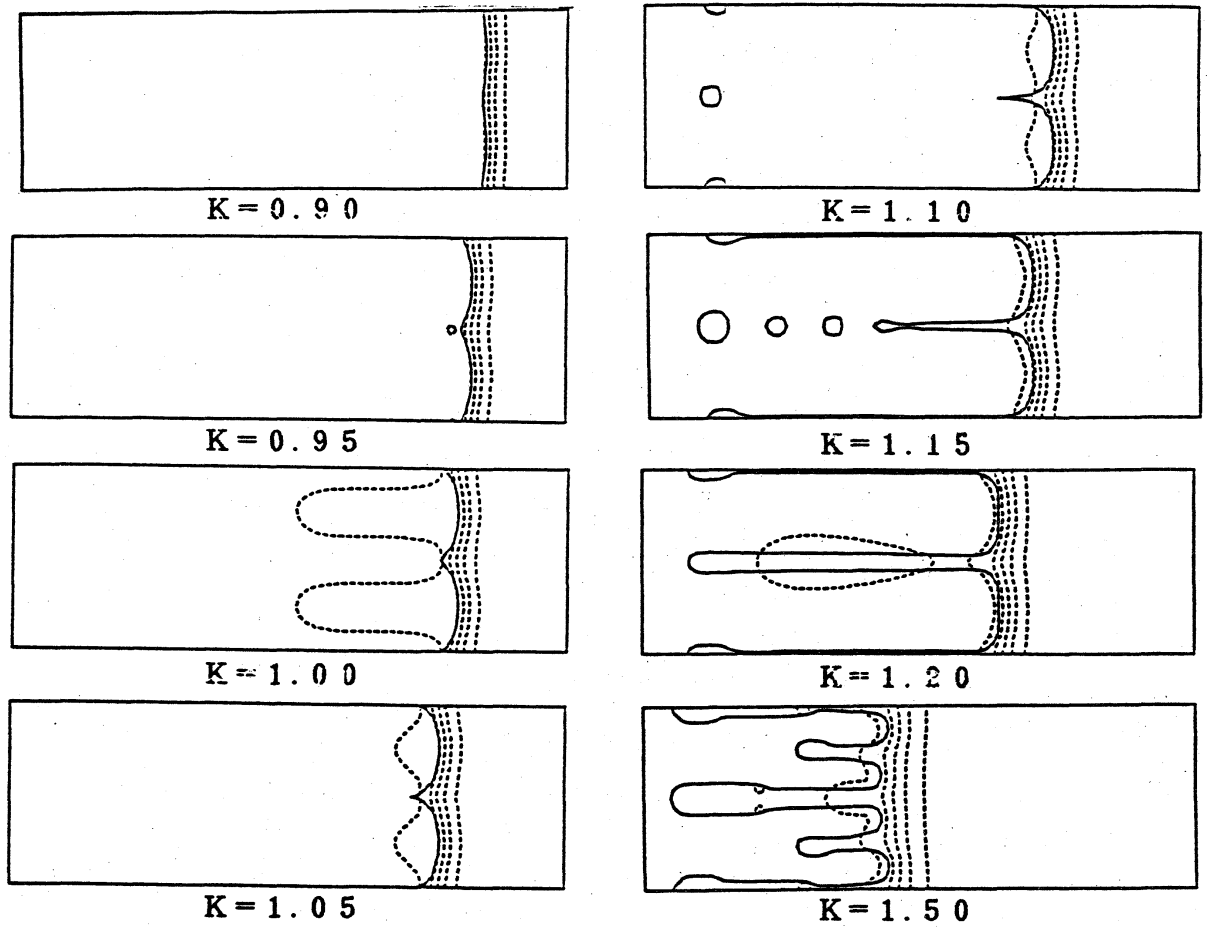
(図25)



(図26)

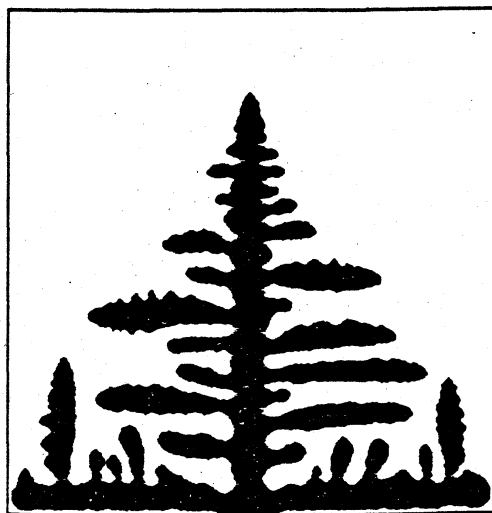


(図27)

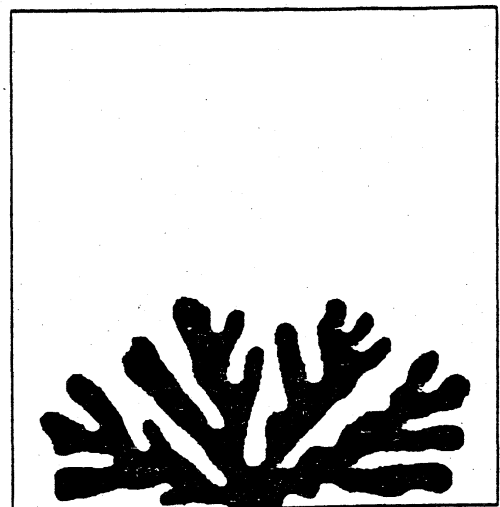


(図22)

(図22)はフラットな界面にある波長の摂動を加え、断熱条件下で計算したものである。



(図23)



(図24)

(図23)(図24)は下辺中央に核生成を起こさせて後、断熱条件下で計算したものである。

ここで見たように、hypercoolig と undercooling の場合で観察されるパターンが違いますが、 K が1より小さい領域から大きい領域に変わっていくとき、パターンはどのように変化するであろうか。これについて、1方向に向かって凝固が起こるときのシミュレーションを行なった結果が(図22)である。これを見ると、 K が大きくなるに従って、平面に近いパターンからセル状のパターン、さらにデンドライトへ移行していく様子が再現されている。

(3.2), (3.6)は異方性を考慮していない方程式であった。そこで次に、異方性を $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{v})$ ($\mathbf{v} = -\nabla p$) の形で導入してみよう。これから導かれる p の方程式は、

$$\tau p_t = -\nabla(|\nabla p|^2 \varepsilon \varepsilon_v) + \nabla(\varepsilon^2 \nabla p) + f(p, T) \quad (3.7)$$

($\varepsilon(\lambda \mathbf{v}) = \varepsilon(\mathbf{v})$ for $\lambda > 0$ に注意、 $(\varepsilon_v)' = \partial \varepsilon / \partial v^i (-\nabla p)$)
特に、空間2次元の場合に、 $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$ (θ は \mathbf{v} と x 軸とのなす角)で異方性を入れた時のモデル方程式は次のようになる。

$$\tau p_t = -(\varepsilon \varepsilon' p_r)_x + (\varepsilon \varepsilon' p_x)_r + \nabla(\varepsilon^2 \nabla p) + f(p, T) \quad (3.8)$$

例えば $\varepsilon(\theta) = \varepsilon(1 + \delta \cos \pi m \theta)$ 等と与えることによって、異方性を導入することができる。このような異方性によってデンドライトの形状がどのように影響を受けるかを計算したのが(図23)である。かなりリアルにデンドライトを再現しているといえるだろう。また、同じ条件で異方性のない場合の計算結果(図24)と比べると、異方性が結晶形に本質的な影響を及ぼすことがわかる。

これらの計算結果をみると、今回紹介したモデルは、1成分系の凝固現象を記述するモデルとして、定性的に妥当なものであると言えるだろう。また、パターン形成を記述するモデル方程式として、数学的にも興味深い多くの問題を含んでいると思われる。

謝辞：第2章の内容は三村昌泰氏との共同研究によるものです。シミュレーション及びアニメーション作成に関しては、広島大学核融合理論研究センター・V I D E O P A C・岡崎晴樹氏に多大な協力を戴きました。

==== 参考文献 =====

- [1] T. Winfree: "The Geometry of Biological Time", Biomath. vol. 8, Springer, New York (1980)
- [2] P. N. Devreotes: "The Development of Dictyostelium discoideum", Academic Press (1982)
- [3] R. J. Field and M. Burger: "Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems", Willey, New York (1985)
- [4] R. Suzuki: Adj. Biophys. . 9(1976)
- [5] M. Cohen: J. theoer. Biol. . 69(1977)
- [6] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley: J. Physiol. . 117(1952)
- [7] R. FitzHugh: Biophys. J. . 1(1961)
- [8] J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa: Proc. IRE, 25(1962)
- [9] E. Yanagida: J. Math. Biol. . 22, (1985)
- [10] C. Jones: Trans. A. M. S. . 286(1984)
- [11] M. Mimura, H. Ikeda and T. Tsujikawa: private communication
- [12] 黒田登志雄 ; 「結晶は生きている」サイエンス社
- [13] H. Honjo and Y. Sawada: J. Cryst. Growth 58(1982)
- [14] H. Esaka and W. Kurz: J. Cryst. Growth 72(1985)
- [15] B. Chalmers: "Principles of Solidification", Wiley, New York, (1964)
- [16] M. E. Glicksman and R. J. Schafer: J. Cryst. Growth 1(1967)
- [17] R. C. Brower, D. A. Kessler, J. Koplic and H. Levine: Phys. Rev. A29(1983), A30(1984), A31(1985)
- [18] E. Ben-Jacob, N. Goldenfeld, J. S. Langer and G. Schoen: Phys. Rev. A29(1984), Phys. Rev. Lett. 53(1984)
- [19] "Fronts, Interfaces and Patterns": Physica D, vol. 12D(1984)
- [20] G. Fix: "Free Boudary Problems", Reserch Notes in Math. 2, Pitman, New York . (1983)
- [21] J. B. Collins and H. Levine: Phys. Rev. B31(1985)
- [22] J. S. Langer: Rev. Mod. Phys. 52(1980)