数理解析研究所講究録
615巻 1987年 211-228

半単純群の Discrete Series について

東京電機大 理工　西山　享 (Kyo Nishiyama)

表現論を専門としない人に対して半単純リー群Gの離散系列表現(discrete series representation = DS)とその構成法の紹介をせよということで、非I型群研究集会で2,3回話をさせていただいた。その時は[Parthasarathy]の紹介をしてお茶をにごしていたが半単純群の専門家にとっては周知の事実を話していた事になる。今回報告を書くことになって非常にこまったと思った。しかし、その時話さなかったことも含めてDSのことについてまとめるのも何かの役立つかも知れないとも思う。そこで、(I) DSの基本的な性質、(II) Dirac operatorを使ったDSの構成、(III) Holomorphic Discrete Seriesのいくつかの性質、について簡単にまとめてみることにする。(I), (II) については文献と出典をなるべく詳しくすることを心掛けようと思う。(III) には少しは専門的な内容も含まれている。

(I) <u>DSの定義と性質</u>　DSは一般の局所コンパクト unimodular 群で定義される概念である。

<u>定義 I-1.</u> Gをunimodularな局所コンパクト群、dg を G の Haar 測度としたとき、G の $L^2(G;dg)$ 上の正則表現はユニタリである。このとき G の正則表現の部分表現として実現される G の既約ユニタリ表現を DS と呼ぶ。

一般の Lie 群 $\tilde{G}$ の DS については、Anh [Anh] による研究がある。しかし、最初の重要かつ基本的な仕事はやはり Harish-Chandra による半単純群 G の DS の一連の研究であろう ([Harish-Chandra, (d), (e)])。もちろん彼以前にも具体的な群に対しては、Holomorphic DS と呼ばれる特殊な DS の研究が既に Bargman, Graev 達によって行われていた ([Bargmann],[Graev]) こと、また、Harish-Chandra 自身1950年代に Holomorphic DS の詳細な研究を行っていることに注意しておく。Holomorphic DS については (III) で触れたいと思う。

以下 G を連結半単純 Lie 群で中心有限なものとする。K を G の極大コンパクト部分群とすると、

<u>定理 I-2 ([Harish-Chandra,(e),Theorem13]).</u>　G が DS を持つための必要十分条件は、rank G = rank K となることである。但し、rank とは Cartan 部分群の次元を表す。

最近、大島-松木 ([Oshima-Matsuki]) によりアフィン対称空間上の DS にも上の結果が拡張されたことは注目に価する。

我々は DS を扱うので以下 rank G = rank K を仮定する。するとこの仮定により K の Cartan 部分群 B は G の Cartan 部分群でもある。B のことをコンパクト Cartan 部分群と呼ぶ。B は G による共役を除けば一意的に定まる。G の Lie 環を $\underline{g}$、その複素化を $\underline{g}_c$ とする (一般に Lie 群を英大文字で、その Lie 環をアンダーライン付きの英小文字で、複素化を下付き C で表すことにする)。すると $\underline{g}_c$ は $\underline{b}_c$ に関するルート分解をもつ。

$$\underline{g}_c = \underline{b}_c \oplus \sum_{\alpha \in \underline{b}_c^* \setminus \{0\}} \underline{g}_\alpha \qquad (\text{直和})$$

$$\underline{g}_\alpha = \left\{ x \in \underline{g}_c \mid [h,x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in \underline{b}_c \right\}$$

$\Delta=\{\alpha\in\underline{b}_c^*\setminus\{0\}\mid g_\alpha\neq(0)\}$ とおき、これを $(g_c,\underline{b}_c)$ のルート系とよぶ。このとき $\dim_c g_\alpha=1$ が知られている。各々の $\alpha\in\Delta$ に対して、我々は次のような $(x_\alpha,x_{-\alpha},h_\alpha)$ を選ぶことができる。

$$x_{\pm\alpha}\in g_{\pm\alpha}, \qquad [x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha\in\underline{b}_c, \qquad \alpha(h_\alpha)=2$$

$\{x_\alpha, h_\alpha\mid \alpha\in\Delta\}$ により g_cはベクトル空間として張られるが、この $\{x_\alpha,h_\alpha\}$ 達に関する g_c の構造定数は整数にとれる。このような $\{x_\alpha, h_\alpha\mid \alpha\in\Delta\}$ を Chevalley 基底とよぶ。今適当な順序を Δ に入れ、Δ^+ を正のルート全体、Δ^-を負のルート全体、$\Delta^+\supset\Pi$ を simple system とする。$\alpha\in\Delta$ にたいして $s_\alpha\in \mathrm{Aut}(\underline{b}_c^*)$ を

$$s_\alpha(\lambda)=\lambda-\lambda(h_\alpha)\alpha \qquad (\lambda\in\underline{b}_c^*)$$

で定義する(例えば [Bourbaki],[Matsushima] を参照)。

<u>定義 I-3.</u> $W=W(\Delta)=<s_\alpha\mid\alpha\in\Pi>=<s_\alpha\mid\alpha\in\Delta>$ を $(g_c,\underline{b}_c)$ の Weyl 群と呼ぶ。

$$C=\{h\in\underline{b}_c\mid \mathrm{Re}\,\alpha(h)\geqq 0 \qquad \forall\alpha\in\Pi\}$$

とおいた時、${}^twC$ $(w\in W)$ を (closed) Weyl chamber と呼び、特に C のことを positive chamber と呼ぶ。

<u>定義 I-4.</u> $\alpha\in\Delta$ がコンパクトであるとは $x_\alpha\in\underline{k}_c$ となる時を言い、そうでない時、ノンコンパクトとよぶ。$\Delta_{cpt}=\{\alpha\in\Delta\mid\alpha$ はコンパクト$\}$ は $(\underline{k}_c,\underline{b}_c)$ のルート系であるが、$W_{cpt}=W(\Delta_{cpt})$ をコンパクト Weyl 群と呼ぶ。

<u>補題 I-5([Warner,Lemma1.3.2.4]).</u> $W(G;B)=N_G(B)/Z_G(B)$ とおくと、これは有限群で、$W(G;B)\simeq W_{cpt}$。

以下 Harish-Chandra による G の DS の parametrization を述べる ([Harish-Chandra,(e)],[Knapp-Zuckerman])。トーラス B の character の微分全体を $\Lambda\subset\sqrt{(-1)}\underline{b}^*$ と書くと Λ は $\sqrt{(-1)}\underline{b}^*$ の lattice であって、$\Lambda\supset\Delta$ である。

$$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0,\,\alpha\in\Delta}\alpha \quad ,\ \rho_c=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0,\,\alpha\in\Delta_{cpt}}\alpha \quad ,\ \rho_n=\rho-\rho_c$$

とおく。$\lambda\in\Lambda+\rho\subset\sqrt{(-1)}\underline{b}^*$ をとるとき、これを含むような Weyl chamber C_λ を一つ固定する。$w\in W$ が一意的に存在して $C_\lambda={}^t wC$ と書けている。

<u>定理 I-6 ([Harish-Chandra,(e),Theorem16]).</u> (1) $\lambda\in\Lambda+\rho$ かつ $\lambda(h_\alpha)\neq 0$ $(\forall\alpha\in\Delta)$ となる λ をとる。すると G の DS $D(\lambda)$ であってその指標 $\Theta(\lambda)$ が B 上では、

$$\Theta(\lambda)\Big|_B=(-1)^q\,det(w)\nabla^{-1}\sum_{s\in W_{cpt}}det(s)\,exp\,s\lambda$$

$$q=\frac{1}{2}dim\,G/K\ ,\quad \nabla=exp\,\rho\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-exp\,(-\alpha))$$

の形で与えられるものが一意的に存在する。

(2) 逆に任意の DS は(1)で与えられた $D(\lambda)$ の形に書ける。更に、$D(\lambda_1)\simeq D(\lambda_2)$ $\Leftrightarrow W_{cpt}\lambda_1=W_{cpt}\lambda_2$ が成立する。

この定理により DS の parameter として $(\Lambda+\rho)'/W_{cpt}$ がとれることが分かる。一般に G は DS 以外に DS に良く似た性質をもつ表現で limit of DS (LDS) と呼ばれる表現をもつ。これについては、

<u>定理 I-7 ([Knapp-Zuckerman,Theorem1.1]).</u> $\lambda\in\Lambda+\rho$ を任意にとり、$\lambda\in C_\lambda$ となる Weyl chamber と $C_\lambda={}^t wC$ となる $w\in W$ を選んでおく。

(1) $\lambda(h_\alpha)\neq 0$ $(\forall\alpha\in\Delta_{cpt})$ のとき G の LDS と呼ばれる表現 $D(\lambda; C_\lambda)$ であって、その指標 $\Theta(\lambda; C_\lambda)$ が B 上では、

$$\Theta(\lambda; C_\lambda)\Big|_B = (-1)^q\, det(w)\nabla^{-1} \sum_{s\in W_{cpt}} det(s)\, exp\, s\lambda$$

の形で与えられるものが存在する。

(2) 二つの LDS $D(\lambda_1; C_{\lambda_1})$, $D(\lambda_2; C_{\lambda_2})$ に対して、$D(\lambda_1; C_{\lambda_1}) \simeq D(\lambda_2; C_{\lambda_2})$ $\Leftrightarrow \exists s\in W_{cpt}$ s.t. $s\lambda_1=\lambda_2$, $sC_{\lambda_1}=C_{\lambda_2}$ が成り立つ。

例 I-8 ([Sugiura],[Okamoto] を参照). G=SL(2,R) とする。

$$u_\theta=\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$$

とおく。$K=\{u_\theta \mid \theta\in\mathbf{R}\}$ は G の一つの極大コンパクト部分群であって、今の場合は K 自身がコンパクト Cartan 部分群となる。K=B の character の微分は **Z** と同型であって、$n\in\mathbf{Z}$ にたいして、$\mathbf{R}\ni\theta \to 2\pi i n\theta$ で与えられる。また、$\Delta_n=\Delta=\{\pm 2\}$, $\rho=1$ であるから、$\mathbf{Z}+\rho=\mathbf{Z}$ である。$\lambda\in\mathbf{Z}$ にたいして、$\lambda(h_\alpha)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ だから、{G の DS 全体} $\simeq \{D(i) \mid i\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\}$ が成立する。Weyl chamber は $C_+=\{\theta\geqq 0\}$ と $C_-=\{\theta\leqq 0\}$ の二つあるので、

{G の LDS} $\simeq \{D(0;C_+), D(0;C_-)\}\cup$ {G の DS 全体}

となっている。概念的には図 I-9 のようになる。

DS の指標公式については、平井武先生による詳しい研究がある ([Hirai,(e)])。また、Holomorphic DS の指標については [Schmid]、具体的な群については、[Hirai,(a)-(d)] の外にも多数の文献がある。

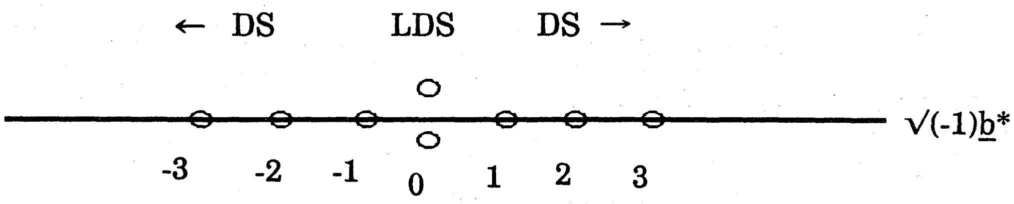

図 I-9

D(λ) を G の DS とする。D(λ) を K の表現に分解したときの K の表現の重複度を表す公式として、Blattner's formula と呼ばれるものがある。$\mu \in \sqrt{(-1)}\underline{b}^*$ を K の表現の最高ウェイトとする。また、

$Q(\mu)=\{\mu$ をノンコンパクトな正のルートの和に書く書き表し方の数$\}$

とおくと、

定理 I-10 (Blattner,[Hecht-Schmid,(a),Theorem(1.3)]). G は線形 Lie 群、λ を Δ^+ に関して dominant、μ を $\Delta^+{}_{cpt}$ に関して dominant とするとき、最高ウェイト μ の K の有限次元既約表現の D(λ) における重複度は、

$$\sum_{w \in W_{cpt}} det(w)\ Q(w(\mu+\rho_c)-\lambda-\rho_n)$$

で与えられる。

(II) Dirac Operator による DS の構成　　Dirac Operator の固有空間として DS を構成しようという試みは、[Narashimhan-Okamoto] によって始められた。[Narashimhan-Okamoto] では G/K を Hermite 対称空間と仮定しているが、この

仮定は本質的でなく、[Parthasarathy]によって一般のG/Kの時にも同様の議論が可能であることが示された。そこで、ここでは[Parthasarathy]に沿ってDSの構成法を簡単に見ることにする。

$$\underline{g}=\underline{k}\oplus\underline{p} \ , \qquad \underline{p}=\underline{k}^{\perp}$$

を$\underline{g}$のCartan分解とする。rank G = rank Kの仮定からdim $\underline{p}$は偶数であることに注意する。$\underline{p}$にKilling formによる正定値内積<,>を入れておく。Killing formはadjoint-不変であるから、特にKの作用に関して不変である:

$$<\mathrm{Ad}(k)\,v_1 \,,\, \mathrm{Ad}(k)\,v_2> \,=\, <v_1 \,,\, v_2> \qquad k\in K,\ v_1, v_2\in\underline{p}$$

これにより、Ad: K→SO($\underline{p}$)となる準同型が得られる。必要ならKの二重の被覆をとることにより、次の図式を可換にするαがあるとしてよい。$\underline{p}$が偶数次元

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(\underline{p}) \arrow[d, "\text{double covering}"] \\ K \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \mathrm{SO}(\underline{p}) \end{tikzcd}$$

であることから、$\underline{p}_c$のClifford環Cliff($\underline{p}_c$)は単純であって従ってBurnsideの定理によりある全行列環と同型である: Cliff($\underline{p}_c$) ≃ $\underline{gl}$(L)。Spin($\underline{p}$)のスピノール表現とはベクトル空間L上の表現であって、

$$\varepsilon:\ \mathrm{Spin}(\underline{p}) \to \mathrm{Cliff}^{\times}(\underline{p}_c) \simeq GL(L)$$

によって定まるものである([Chevalley]参照)。更に、

$$K \xrightarrow{\alpha} Spin(\underline{p}) \xrightarrow{\varepsilon} GL(L)$$

によって定まるＫのＬ上の表現もスピノール表現とここでは呼ぶことにする。ε は既約でなく二つの既約成分に分解する。それを $(\varepsilon^{\pm},L^{\pm})$ と書き、$\chi=\varepsilon\circ\alpha$, $\chi^{\pm}=\varepsilon^{\pm}\circ\alpha$ とおく。

まず Dirac operator を構成しよう。(τ,V) をＫの既約有限次元ユニタリ表現とし、

$$E=E_{L\otimes V}=G\times_K(\chi\otimes\tau)\quad,\quad E^{\pm}=E_{L^{\pm}\otimes V}=G\times_K(\chi^{\pm}\otimes\tau)$$

とおく。ここに、$E_\tau=G\times_K\tau=\{(g,v)|\ g\in G,\ v\in V\}/\sim$ は K- 主バンドルであって、同値関係 $\sim$ は $(g,v)\sim(gk,\tau(k^{-1})v)$ で与えられる。$\Gamma(\cdot)$ でベクトルバンドルの C^∞ な切断全体を表す。いま、

$$\mu:\ \Gamma(E_{\underline{p}_{\mathbf{C}}\otimes L\otimes V})\to\Gamma(E)\quad,\quad \mu^{\pm}:\ \Gamma\left(E_{\underline{p}_{\mathbf{C}}\otimes L^{\pm}\otimes V}\right)\to\Gamma(E^{\mp})$$

を

$$\begin{array}{ccc}\underline{p}_{\mathbf{C}}\otimes L^{\pm}\otimes V & \longrightarrow & L^{\mp}\otimes V\\ \Psi & & \Psi\\ x\otimes l\otimes v & \longrightarrow & \varepsilon(x)l\otimes v\end{array}$$

によって誘導される線形写像、

$$\nabla:\ \Gamma(E)\to\Gamma(E_{\underline{p}_{\mathbf{C}}\otimes L\otimes V})\quad,\quad \nabla^{\pm}:\ \Gamma(E^{\pm})\to\Gamma\left(E_{\underline{p}_{\mathbf{C}}\otimes L^{\pm}\otimes V}\right)$$

を標準的に与えられた接続とするとき、

$$D=\mu\circ\nabla:\ \Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(E)$$

$$D^{\pm}=\mu^{\pm}\circ\nabla^{\pm}:\ \Gamma(E^{\pm})\longrightarrow\Gamma(E^{\mp})$$

を Dirac operator と呼ぶ。しかし現実には Dirac operator は次のようにして計算される。

$$C(G,V)=C^{\infty}(G)\otimes L\otimes V\quad,\quad C^0(G,V)=\{u\in C(G,V)|\ u(gk)=\chi\otimes\tau(k^{-1})u(g)\ \ g\in G,\ k\in K\}$$

とおくと、

$$\Gamma(E) \simeq C^0(G,V) \subset C(G,V)$$

である。

命題 II-1 ([Parthasarathy,Proposition1.1]).　$X_1, \ldots, X_{2m}$ を $\mathfrak{p}$ の Killing form に関する正規直交基底とするとき、Dirac operator D は

$$D(u) = \sum_{i=1}^{2m} \nu(X_i)\otimes\varepsilon(X_i)\otimes 1(u) \quad (u\in C^0(G,V)\subset C^\infty(G)\otimes L\otimes V)$$

で与えられる。ここに ν は $C^\infty(G)$ 上の右正則表現である。

上の命題から D は微分作用素として計算可能であるが、更に次の定理が成り立つ。

定理 II-2 (Parthasarathy, [Wolf,Theorem5.1]).　D は $\Gamma^2(E)=\{E$ の L^2 切断全体$\}$ 上の essentially self-adjoint operator である。

$D^\pm = D|_{\Gamma(E^\pm)}$ であることに注意しておく。

定義 II-3.　Dirac operator の 0- 固有空間を

$$H_2^\pm(V) = Ker\left(D^\pm: \Gamma(E^\pm) \to \Gamma(E^\mp)\right) \cap \Gamma^2(E)$$

と書き、$H_2{}^\pm(V)$ の元を Dirac half-spinors とよぶ。

$D, D^\pm$ は $\Gamma^2(E)$ 上の G の作用と可換になるので、明らかに $H_2{}^\pm(V)$ は $\Gamma^2(E)$ の G- 不変閉部分空間になる。そこで $\pi^\pm(\tau)$ を $H_2{}^\pm(V)$ 上の G のユニタリ表現とする。$\pi^\pm(\tau)$ はある条件の下に一方が自明になり、他方が DS になることが示される。それを正確に述べるために少し記号を準備する。

<u>補題 II-4.</u>　(1) $W^1=\{\sigma\in W \mid \sigma\Delta^+\supset\Delta^+_{cpt}\}$ とおくと、

$$W=W_{cpt}\cdot W^1\ ,\quad W^1\simeq W_{cpt}\backslash W$$

が成立する。

(2) $P_+=\{\lambda\in \underline{b}_c{}^* \mid \lambda(h_\alpha)\in Z_{\geq 0}\}$ とおくとき、

$$P_+\times W^1\ni(\lambda,\sigma)\rightarrow\sigma(\lambda+\rho)$$

は $P_+\times W^1$ から DS の parameter 空間 $(\Lambda+\rho)'/W_{cpt}$ への全単射を与える。

$\sigma\in W^1$ に対して、

$$\sigma\cdot\lambda=\sigma(\lambda+\rho)-\rho\qquad(\lambda\in b_C^*)\ ,\quad j(\sigma)=\begin{cases}+ & \text{if } det(\sigma)=1\\ - & \text{if } det(\sigma)=-1\end{cases}$$

とおく。すると次の定理が成立する。

<u>定理 II-5 ([Parthasarathy,Theorem3]).</u>　$(\tau_{\sigma\cdot\lambda+\rho_n}, V)$ $(\lambda\in P_+)$ を K の最高ウェイトが $\sigma\cdot\lambda+\rho_n=\sigma(\lambda+\rho)-\rho_c$ の有限次元既約表現とする。更に、

$$<\sigma\lambda,\alpha>\neq 0\quad\forall\alpha\in\Delta_n$$

を仮定する。すると、

(1) $j=j(\sigma)$ に対して

$$\left(\pi^j(\tau),\ H_2^j(V)\right)\simeq D(\sigma(\lambda+\rho))$$

が成り立つ。ここに $D(\lambda)$ は Harish-Chandra's parameter が λ の DS である。

(2) $j\neq j(\sigma)$ に対しては、$H_2^j(V)=(0)$ 。

この定理によってほとんどの場合 (i.e., $<\sigma\lambda,\alpha>\neq 0$ $(\forall\alpha\in\Delta_n)$ の場合) に DS が構成できたことになる。また、この実現を使えば K の表現と DS の表現との間の関係も比較的見易いものになる。

<u>系 II-6.</u> D(λ) の minimal K-type は unique でその重複度は 1 である。minimal K-type の最高ウェイトは $(\lambda+\rho_n-\rho_c)$ で与えられる。ここに、ρ_n, ρ_c は λ を dominant にするような Δ^+ に関してとる。

(III) <u>Holomorphic Discrete Series の性質</u> G/K は Riemann 対称空間であるが、特に G- 不変な複素構造を持つ場合、即ち G/K が Hermite 対称空間である場合を考える。このような G に対して、G/K を有界対称領域 Ɖ として実現したとき Ɖ 上の適当な測度 μ をとることにより、DS のある種の系列は L^2(Ɖ ;μ) の正則関数のなす Hilbert 部分空間上に実現される。このような系列に属する DS を Holomorphic DS と呼び、この節では HDS と略記する。

<u>例 III-1.</u> G＝SL(2,**R**) においては、例 I-8 の記号で、$\{D(i) | i>0\}$ が HDS で $\{D(i) | i<0\}$ が anti-HDS である。従って複素構造の入れ方により全ての DS は HDS と思ってよい。

具体的な群について一番 primitive な形で HDS を扱った最初の論文として [Graev] が上げられる。この論文では G＝SU(p,q) の場合に具体的な HDS の構成が成されている。古典型のノンコンパクト Hermite 対称空間であって、既約なものは次の四種類に限られる ([Helgason,ChX,§6.3])。

$$
\begin{aligned}
G/K &= SU(p,q)/S(U(p)\times U(q)) \\
&= SO^*(2n)/U(n) \\
&= SO_0(p,2)/SO(p)\times SO(2) \\
&= Sp(n,\mathbf{R})/U(n)
\end{aligned}
$$

<u>定理 III-2 (Harish-Chandra,[Varadarajan,Propositions2.3.2 & 2.3.5]).</u> $(\underline{g}_c, \underline{b}_c)$ の正のルート Δ^+ を適当にとることにより、HDSの K-有限なベクトルの全体は $\underline{g}_c$-加群として既約な最高ウェイト加群となる。

HDSの K-有限なベクトル全体の上の微分表現の具体的な実現 (これは定理 III-2の証明でもある) と HDSに関する若干の comment を述べてこの節を終わろうと思う。

$$\underline{g}=\underline{k}\oplus\underline{p} \quad , \qquad \underline{p}=\underline{k}^{\perp}$$

を Cartan 分解とし、$\underline{p}_c^{\pm}$ を次のように定義する。まず $(\underline{g}_c,\underline{b}_c)$ の正のルート Δ^+ を $\Delta^+{}_n=\Delta^+\backslash\Delta^+{}_{cpt}$ が Ad(K) で不変になるように選ぶ。これは G/K が Hermite 対称空間の時には可能である。このとき、

$$\underline{p}_c^{\pm}=\sum_{\alpha\in\Delta_n^+}\underline{g}_{\pm\alpha}\subset\underline{p}_c$$

とおく。$\underline{p}_c^{\pm}$ は G/K の接空間の正則な部分と反正則な部分に対応している。$\underline{q}_c^+=\underline{k}_c\oplus\underline{p}_c^+$ とおくと $\underline{q}_c^+$ は $\underline{g}_c$ の部分環になる。今 $\lambda_0\in\Lambda$ にたいして $I(\lambda_0)$ を $\underline{q}_c^+$ の表現で $\underline{k}_c$ の表現としては最高ウェイトが λ_0 の有限次元既約表現、$\underline{p}_c^+$ は $I(\lambda_0)$ 上自明に働くようなものとする。このとき、

$$J(\lambda_0)=U(\underline{g}_C)\otimes_{U(\underline{q}_C^+)}I(\lambda_0)$$

とおくと、$D(\lambda_0-\rho_n+\rho_c)\simeq J(\lambda_0)$ が成り立つ。$J(\lambda_0)$ が既約な最高ウェイト加群になることは純代数的に Verma module の理論などを用いて証明できる。また、$J(\lambda_0)$ が HDS になることは Harish-Chandra の議論によりわかる。上の事実が anti-HDS についても同様に成立することは言うまでもない。但し、正のルート Δ^+ はもちろん取り替える必要がある。他の DS に対する Lie 環の表現の実現については [Enright-Varadarajan] を参照されたい。

HDSと他のDSとの決定的な違いはその退化度に表れていると筆者は確信しているが、その証明等はまだ得ていない。ここでは問題提起の形で述べるにとどめる。

命題 III-3 ([King,Proposition3.1]). G/KはHermite対称空間になっているものとする。DをそのHDSとすると

$$GK\text{-}dim\,D = \#(\Delta^{+}\backslash\Delta^{+}_{cpt}) = \#\Delta^{+}_{n}$$

が成立する。ここにGK-dimはGelfand-Kirillov次元をあらわす([Vogan], [Krause-Lenagan])。

予想 III-4. 命題III-3の仮定の下にDを任意のDSとすると、

$$GK\text{-}dim\,D \geqq \#(\Delta^{+}\backslash\Delta^{+}_{cpt}) = \#\Delta^{+}_{n}$$

が成立し、等号はDがHDS又はanti-HDSの場合に限る。

注意) G=SU(n,1)のときにはこの予想は正しい([King,Proposition6.1])。実際このときはGelfand-Kirillov次元は

$$GK\text{-}dim\,D = \begin{cases} n & D\text{が}HDS\text{のとき} \\ 2n-1 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。

HDSの退化度はその主系列表現への埋めこみの仕方に顕著に表れる。即ち次が成立する。

<u>定理 III-5.</u>　命題 III-3 の仮定の下に D を HDS とすると D は $(\mathfrak{g}_c, K)$- 加群として唯ひとつの主系列表現に埋めこめる。ここに主系列表現とは G の極小放物型部分群からのユニタリとは限らない誘導表現をさす。

上の定理は『有限次元既約表現は唯ひとつの主系列表現に埋めこめる』ことの拡張になっている。実際どちらもコンパクト Cartan 部分環に対する最高ウェイト加群であることからの帰結である ([Hecht-Schmid,(b)])。筆者は最近山下博氏から個人的に定理 III-5 の微分方程式を使った別証を見せていただいた ([Yamashita])。山下氏の証明は HDS の Gelfand-Graev 表現への埋め込みを調べる手法を主系列表現へ応用したものである。

最後になったが、HDS の空間を Siegel 領域 G/K の Silov 境界上に Fourier 変換によって実現できることが G/K が管状領域の時には [Rossi-Vergne] によって、そうでないときには野村隆昭氏 ([Nomura]) によって最近示されたことに注意しておく。実現は現実にはある巾零 Lie 環上の Fock 表現として得られるようである。

References.

Anh, N.H.

Classification of connected unimodular Lie groups with discrete series, Ann. Inst. Fourier, 30(1980), 159-192.

Bourbaki, N.

Groupes et algèbres de Lie, Chp. 4-6, Hermann, 1968.

Bargmann, V.

Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. Math., 48(1947), 568-640.

Chevalley, C.

Theory of Lie groups, Princeton Univ. Press, 1946.

Enright, T. and Varadarajan, V.S.

On an infinitesimal characterization of the discrete series, Ann. math., 102(1975),1-15.

Graev, M.I.

Unitary representations of real simple Lie groups, Trudy Moscow. Mat. Ob., 7(1958), 335-389 (in Russian, 英訳有り).

Harish-Chandra

(a) Representations of semisimple Lie groups IV, Amer. J. Math., 77(1955), 743-777.

(b) Representations of semisimple Lie groups V, Amer. J. Math., 78(1956), 1-41.

(c) Representations of semisimple Lie groups VI, Amer. J. Math., 78(1956), 564-628.

(d) Discrete series for semisimple Lie groups I, Acta Math., 113(1965), 241-318.

(e) Discrete series for semisimple Lie groups II, Acta Math., 116(1966), 1-111.

Hecht, H. and Schmid, W.

(a) A proof of Blattner's conjecture, Inv. Math., 31(1975), 129-154.

(b) On the asymptotics of Harish-Chandra modules, Journal für Math., 343(1983), 169-183.

Helgason, S.

Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

Hirai, T.

(a) The characters of irreducible representations of the Lorentz group of n-th order, Proc. Japan Acad., 41(1965), 526-531.

(b) Classification and the characters of irreducible representations of SU(p,1), Proc. Japan Acad., 42(1966), 907-912.

(c) Explicit form of the characters of discrete series representations of semisimple Lie groups, in Proc. Symp. in Pure Math. (AMS), 26(1973), 281-287.

(d) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups IV, Explicit forms of the characters of discrete series representations for Sp(n,R), Japan. J. Math., 3(1977), 1-48.

(e) The characters of the discrete series for semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 21(1981), 417-500.

King, D.R.

Character polynomials of discrete series representations, in Lecture notes in Math. 880, Springer-Verlag.

Knapp, A.W. and Zuckerman, G.J.

Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, Ann. Math., 116(1982), 389-501.

Krause, G.R. and Lenagan, T.H.

Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension, Pitman Publ., 1985.

Matsushima, Y.

リー環論, 共立出版, 1956.

Narashimhan, M.S. and Okamoto, K.

An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for Hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann. Math., 91(1970), 486-511.

Nomura, T.

Fourier transform of a space of holomorphic discrete series, Proc. Japan Acad., 61(1985), 133-136.

Okamoto, K.

等質空間上の解析学, 紀伊國屋, 1980.

Oshima, T. and Matsuki, T.
A description of the discrete series for semisimple symmetric spaces, Adv. Studies in Pure Math., 4(1984), 331-390.

Parthasarathy, R.
Dirac operator and the discrete series, Ann. Math., 96(1972), 1-30.

Rossi, H. and Vergne, M.
Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Funct. Anal., 13(1973), 324-389.

Schmid, W.
On the characters of the discrete series (the Hermitian symmetric case), Inv. Math., 30(1975), 47-144.

Sugiura, M.
Unitary representations and harmonic analysis, Kodansha, 1975.

Varadarajan, V.S.
Infinitesimal theory of representations of semisimple Lie groups, in Harmonic Analysis and Representations of Semisimple Lie Groups edited by J.A.Wolf, M.Cohen and M.De Wilde, Reidel, 1980, 131-255.

Vogan, D.
Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules, Inv. Math., 48(1978), 75-98.

Warner, G.
Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, Springer-Verlag, 1972.

Yamashita, H.
Private communication, April, 1986.

$C(\mathbb{R}) \rtimes_\alpha \mathbb{R}$

$f(r) = \Sigma$

$$(f*g)(r) = \int f(s)\, \alpha_s(g(-s+r))\, ds$$

$$(f*g)_r(t) = \int f_s(t)\, \alpha_s(g_{-s+r})(t)\, ds$$

$$= \int f_s(t) \cdot g_{-s+r}(t+s)\, ds$$

$$= \int \hat{f}(\underline{s}, t)\, \hat{g}(\underline{-s}+r, t+\underline{s})\, ds$$