数理解析研究所講究録
615巻 1987年 110-128

On symmetry of $L^1(G)$ for solvable Lie groups

京大理　野村隆昭　(Takaaki Nomura)

Gを局所コンパクト群とするとき、どのようなGに対してBanach*-代数 $L^1(G)$ が対称になるかという問題は、ユニタリ表現論が始まって以来今日まで多くの研究がなされてきた。[14] の Introduction によれば、その研究の歴史は、消失した希望と誤った予想の列であるという。本稿では、正規 j代数を Lie 代数とする単連結可解 Lie 群 G に対して、$L^1(G)$が、対称となるための1つの必要十分条件を証明する。結果は、筆者の当初の予想に反して、多くの場合、$L^1(G)$ は対称とはならないことがわかった。しかも、証明自体が Poguntke の定理の演習問題となってしまったのは少し残念である。しかしながら、$L^1(G)$ が対称でないということは、例えば Kirillov-Bernat 対応が位相同型であるという予想にたいして、Boidol [2] の定理が適用されないということでもあり、その予想に関する研究の余地が、正規 j代数という枠組においてさえ大いにあるということにもなるので、その意味では、本稿の結果は、筆者にとっても有難いともいえる。

§1. 準備. Aを単位元 e を持つ可換 Banach 代数としょよう。Aの極大イデアルの全体を$\mathfrak{M}$とする。よく知られた Gelfand-Mazur の定理によって、$M\in\mathfrak{M}$ が与えられたとき 各 $x\in A$ に対して複素数

$x(M)$が定まり、 χ

(1) $$x=x(M)e+m \qquad (m\in M)$$

となる。さらに、Aには対合（involution）$*$が定義されているとする。すなわち、Aは単位元 e を持つ Banach$*$-代数とする。このとき、$e^*=e$ であるから、(1) より

$$x^* = \overline{x(M)}e+m^*.$$

$M^* = \{m^*;\ m\in M\}$ も極大イデアル故、$x^*(M^*) = \overline{x(M)}$ が成り立つ。

$x^*(M) = \overline{x(M)}$ が任意の $M\in\mathfrak{M}$と $x\in A$ に対して成り立つとき、A は対称であるという（Naimark[16]では完全対称（completely symmetric）と呼んでいる）. A が対称であることと任意の $M\in\mathfrak{M}$ が自己共役（i.e. $M^*=M$）であることとは同値である。

補題 1.1. A は単位元 e を持つ可換 Banach$*$-代数とする。このとき、A が対称であるための必要十分条件は、任意の $x\in A$ にたいして、$e+x^*x$ が逆元を持つことである。

簡単なことであるが、一応証明をつけておこう。必要性の方は明らかであろう。十分性については、まず自己共役元 $x(x^*=x)$ のスペクトルは R の部分集合であることを示そう。実数 λ,μ ($\mu\neq 0$) に対して、$y=(x-\lambda\cdot e)/\mu$ とおくと

$$(x-(\lambda+i\mu)e)(x-(\lambda-i\mu)e) = \mu^2(e+y^*y).$$

仮定より右辺は逆元を持つので $x-(\lambda+i\mu)e$ も逆元をもつ。ゆえに $x(M)\in R$ が任意の $M\in\mathfrak{M}$ に対しては、$x=x_1+ix_2$ (x_1,x_2 は自己共役元)と分解することにより、$x^*(M) = \overline{x(M)}$ を得る。 証明終

一般に、単位元 e を持つ（可換とは限らない）Banach*-代数 A において、$e+x^*x$ が任意の $x \in A$ に対して逆元を持つとき、A は対称であると定義する。可換代数の場合にはこの定義が最初の定義と同値であることを補題 1.1. は示している。A に単位元がないときは、単位元を添加して得られる Banach*-代数 A が対称であるときに、A は対称であるという。

Banach*-代数 A が対称ということと、任意の元 $x \in A$ に対して、x^*x のスペクトルが、負でない実数からなることが同値であることとが容易にわかる。そして、補題 1.1. の証明を検討することにより、（可換とは限らない）Banach*-代数 A が対称ならば、任意の自己共役元のスペクトルは実数からなることがわかる。

注意1.2. (i) Bonsall-Dancan [4, § 41] に従って、Banach*-代数 A の各自己共役元のスペクトルが実数からなるとき、A を hermitian ということにしよう。上で述べたことから、Banach*-代数 A が対称ならば、A は hermitian である。その逆『hermitian → 対称』を主張するのが、Shirali-Fond の定理（[27], see also [4, Theorem 41.5]）である。この事実をふまえて、文献 [19] では対称 (symmetric) という用語を使わず、初めから hermitian という用語を使っている。

(ii) 対合が等長 (i.e. $\|x^*\| = \|x\|$ x A) のとき、Raikov による対称 Banach*-代数の特徴付け ([16], § 23.4) や Leptin [11] による特徴付けもあるが、本稿では後になって使われないので割愛する。

例1.3. 開単位円板 $|z|<1$ で正則で、閉単位円板 $|z|\leqq 1$ で連続な函数 f の全体を A とし、 $\|f\|=\sup_{|z|\leqq 1}|f(z)|$ でノルムを入れ、通常のごとく諸演算を定義すると、A は可換 Banach 代数となる。$f^*(z)=f(z)$ で（等長な）対合が定義される。この A は対称ではない。実際 $\mathfrak{M}$ と閉単位円板とが対応し、自己共役極大イデアルと、閉区間 [-1,1] に属する実数とが対応する（[16,§ 20.3]参照）。

§2. 群環 $L^1(G)$. G を局所コンパクト群とし、dx を G の左 Haar 測度、Δを G のモジュラー関数 ($dx^{-1} = \Delta(x^{-1})dx$) とする。左 Haar 測度 dx に関する $L^1(G)$ は convolution

$$f*g(x)= \quad f(y)g(y^{-1}x)dy$$

で Banach 代数となる $L^1(G)$ に等長な対合

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1})f(x^{-1})$$

を導入して、Banach*-代数にする。よく知られた事実「$L^1(G)$が単位元を持つ ←→ G は離散群」をここで注意しておこう。この Banach *-代数 $L^1(G)$ が対称であるとき、G 自身も対称であるという。局所コンパクト可換群は対称である (e.g.[16,§ 31])1.以下主として筆者の興味の対象である Lie 群に対して、対称性の研究の歴史を垣間見ることにする（Lie 群以外の場合やもっと詳しい結果については、[12],[14,Introduction],[19,p.727 8],[13] 等を参照されたい）。

(i) コンパクト群は対称である、[28] 及び Bonic[未発表]. [7,§ 52.1] にも事実のみのべられている。

(ii) Euclid 型の運動群（コンパクト群と可換群の半直積）は対称である、[6]。van Dijk の論文 [28] では、運動群の群のある閉部分代数が対称であることを証明している。

(iii) 連結べき零Lie群は対称である、[20]。

(iv) 非コンパクト半単純Lie群は対称ではない、[10,§4]。これは、有界でnon-hermitianな球関数の存在（c.f.[8]）から証明される。その議論は、Naimark[16,§29.4(c)] や Gelfand 達 [7,§52] が SL(2,C) に対して示したのと全く平行である。

(v) H が対称な局所コンパクト群のとき、その semidirect compact extension $K \ltimes H$ も対称である、[14,Corollary 1]。

(vi) 直線上の一次変換群（通称 ax+b 群）は対称である、[12]。この論文が出る以前は、ax+b 群は対称ではないと思われていたのである。なお、"離散 ax+b 群"は対称ではない。くわしくは [9] 参照。[9] 以前は、amenability と対称性が一致するという期待がもたれていた。

(vii) 次の交換関係をみたす基底 a,x,y,z をもつ 4次元の（完全）可解 Lie 代数$\mathfrak{g}$を考える。

$$[a,x]=-x,\ [a,y]=y,\ [x,y]=z$$

$G=\exp\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ に対応する単連結 Lie 群とする。G は普通、split oscilator と呼ばれているものである。この G は対称ではない、[14,p.131, Corollary]。しかも対称ではない単連結可解 Lie 群の内、最小次元のものである。

(viii) 6次元以下の単連結可解 Lie 群で対称でないもののリストが [21] であたえられている。ただし、6次元のものに対しては、任意の proper quotient が対称になるものに限られている。このリストから特に、非I型の Lie 群の典型的な例である Mautner 群が対称であることがわかる。

§3. 可解 Lie 群の場合　全節の(vi),(vii)より、可解 Lie 群が

いつ対称になるかという問題が生じる。指数型の群の場合、Poguntke [24, Theorem 10] により、一つの必要十分条件が得られている。彼の定理とその周辺の定理を述べるために、少し準備をする。

を Lie代数とし、$f \in \mathfrak{g}^*$ とする。いつものごとく、

$$\mathfrak{g}^f = \{X \in \mathfrak{g} \,;\, f([X,Y])=0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

とおいて、$m(f) = \mathfrak{g}^f + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ と定義する。明らかに $m(f)$ は のイデアルである。$m(f)$ には、quotient $m(f)/\mathfrak{a}$ がべき零となるイデアル (in $m(f)$) $\mathfrak{a}$ で最小のものが存在する。それを $m^\infty(f)$ としよう。実際、$m(f)$ の降中心列の k 番目の項を $\mathcal{C}^k m(f)$ とするとき、$m^\infty(f) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k m(f)$ である。

定義 3.1. $f(m^\infty(f)) = \{0\}$ のとき、f は inductive であるという。

定理 3.2. (Poguntke) $\mathfrak{g}$ を指数型 Lie 代数とし、$G = \exp\mathfrak{g}$ を対応する単連結(可解) Lie 群とする。このとき、G が対称であることと、任意の $f \in \mathfrak{g}^*$ が inductive であることとは同値である。

注意 3.3. (i) 定理 3.2 は、もともと [22] において、「指数型Lie 代数 が、べき零イデアル$\mathfrak{n}$と、$\mathfrak{n}$ に半単純 derivations によって働く可換部分代数$\mathfrak{a}$との半直積に分解できる」という仮定のもとに示されていた。

(ii) $m(f)$ がべき零ならば、明らかに f は inductive である。従って、単連結べき零 Lie 群は対称である。

定義 3.4. $C^*(G)$を G の C^*群環とし、Prim $C^*(G)$ で、$C^*(G)$の原始イデアル空間に，Jacobson 位相をいれたものとする。同様に、Prim*$L^1(G)$ で、Banach*-代数 $L^1(G)$の既約 * 表現の核からなる空間に Jacobson 位相を入れたものとする。Φ : Prim $C^*(G) \ni I \to I \cap L^1(G) \in \mathrm{Prim}^* L^1(G)$ で連続な全射がえられる。この写像 Φ が同相写像のとき、G は *-regular であるという。

定理 3.5.(Boidol[2]) 指数型の Lie 群 G が *-regular であるための必要十分条件は、全ての $f \in \mathfrak{g}^*$ が inductive なことである。

系 3.6. 指数型の Lie 群にたいしては、*-regularity と対称性は一致する。

定理 3.7.(Boidol[2]) 指数型の Lie 群 G が *-regular であるとき、Kirillov-Bernat 対応 $\mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ は同相写像である。

注意 3.8. 定理 3.7.の逆「Kirirov-Bernat 対応が同相写像ならば G は *regular」は成立しない。反例は split oscilator で与えられる (Rosenberg [未発表], c.f.[5, Introduction])。なお、Kirilov-Bernat 対応が連続であることは、すでに、Pukanszky [26, Proposition 2] でわかっている。

この節の残りでは、ax+b 群と split oscilator について、§2 (vi),(vii)でのべたことを、定理 3.2. の演習問題としてやってお

く。まず次のことに注意しておく。「f is inductive $\Leftrightarrow$ $(Ad^*g)f$ is inductive $\forall g \in G$」。従って、各余随伴軌道から代表元をとって調べれば十分である。

(i) ax+b 群の場合　　その Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とすると、$\mathfrak{g}$ は $[x,y]=y$ なる交換関係を持つ基底 x,y を持つ。余随伴軌道は次の 2 種類。x^*, y^* を双対基底とすると

(イ)	一点	$\{\alpha x^*\}$	$(\alpha \in R)$
(ロ)	2つの開軌道	$\{\alpha x^*+\beta y^*\ ;\alpha\in R,\ \beta>0\}$	
		$\{\alpha x^*+\beta y^*\ ;\alpha\in R,\ \beta<0\}$	

(イ)の場合。$f=\alpha x^*$ $(\alpha\in R)$とすると、$\mathfrak{g}^f=\mathfrak{g}$ ゆえ $m(f)=\mathfrak{g}$。従って、$m^\infty(f)=Ry$ となり、$f(m^\infty(f))=\{0\}$。ゆえに f は inductive。

(ロ)の場合。$f=\pm y^*$ とすると、$\mathfrak{g}^f=\{0\}$ ゆえ $m(f)=Ry$ となり、これは可換だから注意 3.3 (ii) より f は inductive。

以上より任意の $f\in\mathfrak{g}^*$ が inductive となり ax+b 群は対称である。そして、$*$-regular であり、Kirillov-Bernat 対応は位相同型である。

(ii) split oscilator 群の場合　　a,x,y,z を§2(vii)の如くとする。$f=x^*+y^*+z^*$ とおいて、この f が inductive でないことを示そう。α,β etc を実数とすると

$$[\alpha a+\beta x+\gamma y+\delta z,\alpha' a+\beta' x+\gamma' y+\delta' z]$$
$$=(-\alpha\beta'+\alpha'\beta)x+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)y+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)z$$

ゆえに

$$f([\alpha a+\beta x+\gamma y+\delta z, \alpha' a+\beta' x+\gamma' y+\delta' z])$$
$$= (-\alpha\beta'+\alpha'\beta)+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)$$
$$= (\beta-\gamma)\alpha'-(\gamma+\alpha)\beta'+(\alpha+\beta)\gamma'$$

従って、 $\mathfrak{g}^f = \{\alpha(a-x-y)+\delta z\ ;\alpha\in R, \delta\in R\}$。$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=Rx+Ry+Rz$ ゆえ $m(f)=\mathfrak{g}$ となる。ゆえに $m^\infty(f) = Rx+Ry+Rz$ となり、$f|_{m^\infty(f)} = 0$ (x^*+z^*, y^*+z^* も inductive でないことも同様に示される)。inductive でない一次形式が存在するので、split oscilator 群は対称ではない。

<u>§4. 正規 j代数の場合</u>

この節では、[17], [18] で取り扱った(完全)可解 Lie 群について、それが対称であるための1つの必要十分条件を述べる。証明は、前節の例のように、定理 3.2 を用いてなされる。

先ず、正規 j代数の定義とその構造についてまとめておく。$\mathfrak{g}$ を Lie 代数、 j を $\mathfrak{g}$ 上の実線形作用素で、$j^2 = -1$ をみたすもの、そして $\omega\in\mathfrak{g}^*$ とする。次の (i) (iii) がみたされるとき、3つ組 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を正規 j代数 という。

(i) $\mathfrak{g}$ は完全可解。

(ii) j を $\mathfrak{g}_C$ 上の複素線形作用素に拡張し、$\mathfrak{g}^-$ を $\mathfrak{g}_C$ における j の固有値 $-i$ に対応する固有空間とするとき、$\mathfrak{g}^-$ は $\mathfrak{g}_C$ の部分代数。

(iii) $\omega([jx, jy])=\omega([x,y]) \qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}$

$\omega([x, jy])>0 \qquad \forall x\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}.$

ax+b 群の Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ には正規 j代数の構造がはいる。実際、x,y を $[x,y]=y$ なる $\mathfrak{g}_0$ の基底とするとき、$\mathfrak{g}_0$ 上の線形作用素 j

$\begin{pmatrix} a & b \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+b \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & \frac{a^2}{2} & a & c\\ & 1 & a & b \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$

$[x,y]=z$
$[x,y-z]=z-0=z$

を、jy=x, jx=-y で定義すると明らかに、$j^2=-1$ 。さらに、$\mu\in R$, $\lambda>0$ に対して、$\omega\in\mathfrak{g}_0^*$ を、$\omega(x)=\mu$, $\omega(y)=-\lambda$ で定義する。このとき、任意の $\mu\in R$, $\lambda>0$ に対して、$(\mathfrak{g}_0, j, \omega)$ が正規 j代数になることが示される。その検証は読者に委ねる。

さて、$(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を正規 j代数とする。実ベクトル空間　には内積 $\langle x, y\rangle = \omega([x, jy])$ が入る。$\mathfrak{n}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ とし、$\mathfrak{a}$を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する$\mathfrak{n}$の直交補空間とする。このとき、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数であり、$\mathfrak{g}$ の随伴表現の制限で定義される$\mathfrak{a}$の$\mathfrak{n}$への制限は対角化可能である（従って、$\mathfrak{g}$ は注意 3.3 (i) で述べた、Poguntke が [22] で課した条件を満たしている）。$\alpha\in\mathfrak{a}^*$ にたいして、

$$\mathfrak{n}_\alpha = \{x\in\mathfrak{n};\ [a,x]=\alpha(a)x \quad \forall a\in\mathfrak{a}\}$$

とおく。$j\mathfrak{n}_\alpha\subset\mathfrak{a}$ となる $\alpha\in\mathfrak{a}^*$ $(\mathfrak{n}_\alpha\neq\{0\})$ の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ とする（注意：どの α_k も 0 でないことがわかる）と $l=\dim\mathfrak{a}$, $\dim\mathfrak{n}_{\alpha_k}=1$ $(1\leqq{}^\forall k\leqq l)$ である。この l のことを、正規 j代数 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ の<u>階数</u> と呼ぶ。適当に番号を付けかえると、$\mathfrak{n}_\alpha\neq\{0\}$ となる $\alpha\in\mathfrak{a}^*$ は次の形（すべての possibility が起こるとは限らない）。

$$1/2(\alpha_k+\alpha_m)\ (1\leqq m<k\leqq l),\quad 1/2\alpha_k\ (1\leqq k\leqq l),$$
$$1/2(\alpha_k-\alpha_m)\ (1\leqq m<k\leqq l),\quad \alpha_k\ (1\leqq k\leqq l).$$

そして、$j\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}=\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}$, $j\mathfrak{n}_{\alpha_k/2}=\mathfrak{n}_{\alpha_k/2}$ が成り立つ。$0\neq u_i\in\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ $(1\leqq i\leqq l)$ を、$[ju_i, u_i]=u_i$ をみたす様に選ぶことができ、このとき、$\alpha_k(ju_i)=\delta_{ki}$ が成り立つ。

補題 4.1. $\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}\neq\{0\}$ $(k>m)$ とすると、

$$[\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}, \mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}] = \mathfrak{n}_{\alpha_k}$$

証明．包含関係 $[\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2},\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}]\subset\mathfrak{n}_{\alpha_k}$ が成り立つのはあきらか。等号になることが問題。$0\neq x\in\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}$ を固定する。このとき、$jx\in\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}$ であり、$[x,jx]\in\mathfrak{n}_{\alpha_k}$。$\dim\mathfrak{n}_{\alpha_k}=1$ ゆえ、$[x,jx]\neq 0$ であればよい。ところが $(\mathfrak{g},j,\omega)$ は正規 j代数ゆえ、もし $[x,jx]=0$ であれば、$\omega([x,jx])=0$, 従って $x=0$ となり、仮定 $x\neq 0$ に反する。　　　　　　　　　　　　証明終

命題 4.2.　$(\mathfrak{g},j,\omega)$ を階数 1 の正規 j代数とし、$G=\exp\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ に対応する単連結 Lie 群とする。このとき、G は対称である。

証明　Poguntke の定理 3.2 を使う。まず、階数が 1 であるから、$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_{\alpha/2}+\mathfrak{n}_\alpha$ $(\alpha\in\mathfrak{a}^*)$ となる。$\mathfrak{n}_{\alpha/2}=\{0\}$ のとき、$\dim\mathfrak{g}=2$ であり、これは、丁度 ax+b 群の Lie 代数に（同型と）なる。従ってこの時は§3 (i) より命題が成立する。以下、$\mathfrak{n}_{\alpha/2}=\{0\}$ とする。$0\neq u_\alpha\in\mathfrak{n}_\alpha$ を $[ju_\alpha,u_\alpha]=u_\alpha$ ととる。このとき、$\mathfrak{a}=\mathbb{R}\,ju_\alpha$, $\mathfrak{n}_\alpha=\mathbb{R}u_\alpha$ である。$u_\alpha^*\in\mathfrak{n}_\alpha^*$ を $u_\alpha^*(u_\alpha)=1$ なるものとする。余随伴軌道は次の３種類である。

(i) ２つの開軌道：

$\{\xi+\eta+au_\alpha^*\ ;\ \xi\in\mathfrak{a}^*,\eta\in\mathfrak{n}_{\alpha/2}^*,\ a>0\}$

$\{\xi+\eta+au_\alpha^*\ ;\ \xi\in\mathfrak{a}^*,\eta\in\mathfrak{n}_{\alpha/2}^*,\ a<0\}$

(ii) 2次元軌道：$\mathfrak{n}_{\alpha/2}^*$ における単位球面を S とすると

$\{\xi+r\sigma\ ;\ \xi\in\mathfrak{a}^*,\ r>0\}$　　$(\sigma\in S)$

(iii) 一点　$\{\xi\}$　$(\xi\in\mathfrak{a}^*)$

まず (i) の場合。$f=\pm u_\alpha^*\in\mathfrak{n}_\alpha^*\hookrightarrow\mathfrak{g}^*$ とする。$\mathfrak{g}^f=\{0\}$ であるから、$m(f)=\mathfrak{n}_{\alpha/2}+\mathfrak{n}_\alpha$ となり、注意 3.3 (i) より f は inductive である。

(ii) の場合。$f=\sigma\in S_G\mathfrak{g}^*$ とすると、$\mathfrak{g}^f=\{u\in\mathfrak{n}_{\alpha/2}\ ;\ \sigma(u)=0\}+\mathfrak{n}_\alpha$.ゆえに $m(f)=\mathfrak{n}_{\alpha/2}+\mathfrak{n}_\alpha$ となり、(i) の場合と同様 f は inductive である。

(iii) の場合。$f=\xi\in\mathfrak{a}^*\subset\mathfrak{g}^*$ とすると、$\mathfrak{g}^f=\mathfrak{g}$ であるから $m^\infty(f)=\mathfrak{n}_{\alpha/2}+\mathfrak{n}_\alpha$。ゆえに $f(m^\infty(f))=\{0\}$ となって f は inductive である。

結局、すべての $f\in\mathfrak{g}^*$ が inductive であることから、$G=\exp\mathfrak{g}$ は対称である。　　　　証明終

定理 4.3. $(\mathfrak{g},j,\omega)$ を正規 j代数とし、$G=\exp\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ に対応する単連結 Lie 群とする。このとき、G が対称であるための必要十分条件は、任意の k,m (k>m) に対して、$\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}=\{0\}$ となることである。

証明　必要性の証明から始めよう。対偶「ある k,m (k>m) に対して、$\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}\neq\{0\}$ ならば、G は対称ではない」を証明する。各 i $(1\leq i\leq \ell)$ に対して、$0\neq u_i\in\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ を、先に述べたように、$[ju_i,u_i]=u_i$ となる様にとる。$u_i^*\in\mathfrak{g}^*$ を、$u_i^*(u_t)=\delta_{it}$, $u_i^*|_{\mathfrak{a}}=0$, $u_i^*|_{\mathfrak{n}_\alpha}=0$ $(\alpha\neq\alpha_t\ (1\leq t\leq\ell))$ で定義し、$f=\sum_{i\neq m}u_i^*$ とおく。この f が inductive ではないことを示そう。$x\in\mathfrak{n}_\alpha\ (\alpha\in\mathfrak{a}^*)$ のとき、$[ju_m,x]=\alpha(ju_m)x$ であり $\alpha_i(ju_m)=\delta_{im}$ ゆえ、$f([ju_m,y])=0$ が任意の y に対して成り立つ。ゆえに $ju_m\in\mathfrak{g}^f$ である。$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{n}$ であるから、$m(f)\supset\mathbb{R}\,ju_m+\mathfrak{n}$ 従って

(2)　$m(f)\supset\mathbb{R}\,ju_m+\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}+\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}+\mathfrak{n}_{\alpha_k}.$

以下、$m^1(f)=m(f)$, $m^2(f)=[m(f),m(f)]$, ... ,$m^n(f)=$

$[\mathfrak{m}^{n-1}(f),\mathfrak{m}(f)]$ とおいて、数学的帰納法によって、

(3) $\mathfrak{m}^{n}(f)\supset \mathfrak{n}_{\alpha_k}+\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}$

が任意の $n=1,2,\cdots$ に対して成り立つことを示そう。

$n=1$ のときは (2) より明らか。n のとき、(3) が成り立つと仮定すると、

$$\mathfrak{m}^{n+1}(f) = [\mathfrak{m}^{n}(f),\mathfrak{m}(f)]$$

$$\supset [\mathfrak{n}_{\alpha_k}+\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2},\mathbb{R}\, ju_m+\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}]$$

(帰納法の仮定と (2) より)

$$\supset [\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2},\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}]+[\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2},\mathbb{R}\, ju_m]$$

$$=\mathfrak{n}_{\alpha_k}+\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}$$

(補題 4.1. と $1/2(\alpha_k+\alpha_m)(ju_m) = 1/2$ なることより)

かくして、(3) が任意の n に対して成り立つので、

$$\mathfrak{m}^{\infty}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}^{n}(f)\supset \mathfrak{n}_{\alpha_k}+\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}.$$

従って、$\mathfrak{m}^{\infty}(f)\supset\mathfrak{n}_{\alpha_k}$となり、$f|_{\mathfrak{m}^{\infty}(f)}\neq 0$ である。これで定理の必要性の方が証明できた。

十分性の方を証明しよう。任意の k,m $(k\ m)$ に対して、$\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}=\{0\}$ とする。$\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2} = j\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}$ だから、任意の k,m $(k>m)$ に対して、$\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2} = \{0\}$ でもある。従って、$\mathfrak{g}_k=\mathbb{R}ju_k+\mathfrak{n}_{\alpha_k/2}+\mathfrak{n}_{\alpha_k}$ ($\mathfrak{n}_{\alpha_k/2}=\{0\}$ もあり得る) とおくと、$\mathfrak{g}=\sum_{k=1}^{\ell}\mathfrak{g}_k$ と表される。各 $\mathfrak{g}_k$ は明らかに階数 1 の正規 j代数であり、$\mathfrak{g}$ は Lie 代数として、これらの $\mathfrak{g}_k$ 達の直積である。命題 4.2. より各 $G_k=\exp\mathfrak{g}_k$ は対称、従って定理 3.2 より、任意の $f\in\mathfrak{g}_k^*$ は inductive である。各 $f\in\mathfrak{g}^*$ を、$f=\sum_{k=1}^{\ell}f_k$ $(f_k\in\mathfrak{g}_k^*)$ とおくと、$\mathfrak{g}$ は Lie 代数として、$\mathfrak{g}_k$ 達の直積ゆえ、$\mathfrak{g}^f=\sum_{k=1}^{\ell}(\mathfrak{g}_k)^{f_k}$。これより容易に、任意の $f\in\mathfrak{g}^*$ が inductive であることがわかる。ゆえに定理 3.2 より G は対称である。

証明終

系 4.4 $(\mathfrak{g},k,\omega)$ を既約な正規 j代数とする。$G = \exp\mathfrak{g}$ が対称であるための必要十分条件は、$\mathfrak{g}$ の階数が 1 に等しいことである。

例　$G = \exp\mathfrak{g}$ が対称とならない正規 j代数 $(\mathfrak{g},j,\omega)$の内で最も次元の低いものは、dim = 6 なるものである。これは次のようにして実現される。

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & x & y \\ 0 & b & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{matrix} a,b,c,x,y,z \\ \text{は実数} \end{matrix} \right\}$$

そこで、

$$\mathfrak{g}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{g}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} ; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく。$\mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}(1)$ に derivations

(1)　$X \to AX + X\,{}^tA \qquad (A \in \mathfrak{g}(0))$

で働く。ここで、${}^tA$ は A の転置行列。この作用で半直積 $\mathfrak{g}(0) \ltimes \mathfrak{g}(1)$ を作ると、これは $\mathfrak{g}$ に同型な Lie 代数である。$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1)$ 上の線形作用素 j を

$$j\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(0) \right)$$

$$j\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 & y \\ 0 & z/2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(1) \right)$$

で定義し、　(1) 上の一次形式 ω を、$\omega(X) = -\mathrm{tr}X \ (X \in \mathfrak{g}(1))$ で定

め、 $\mathfrak{g}(0)$ 上 0 として、 $\mathfrak{g}$ 上の一次形式と見なす。このとき、 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ は正規 j代数になる。その検証は読者に委ねる。

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(1),\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(1),\ u_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(1)$$

とおくと、 j の定義から

$$ju_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(0),\ ju_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(0)$$

$$ju_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(0)$$

で、 $\mathfrak{g} = \mathbf{R}\, ju_1 \oplus \mathbf{R}\, ju_2 \oplus \mathbf{R}\, ju_{21} \oplus \mathbf{R}\, u_1 \oplus \mathbf{R}\, u_2 \oplus \mathbf{R}\, u_{21}$ である。 $\mathfrak{a} = \mathbf{R}\, ju_1 \oplus \mathbf{R}\, ju_2$ とおく。 $\alpha_k(ju_m) = \delta_{km}$ で $\alpha_k \in \mathfrak{a}^*$ $(k=1,2)$ を定めると、容易にたしかめられるように

$\mathfrak{n}_{(\alpha_2-\alpha_1)/2} = \mathbf{R}\, ju_{21}$, $\mathfrak{n}_{\alpha_k} = \mathbf{R}\, u_k$ $(k=1,2)$, $\mathfrak{n}_{(\alpha_2+\alpha_1)/2} = \mathbf{R}\, j\, u_{21}$

である。 $\mathfrak{n}_{(\alpha_2-\alpha_1)/2} \neq \{0\}$ ゆえ、定理 4.3 によって、 $G = \exp\mathfrak{g}$ は対称ではない。 さて、今構成した $\mathfrak{g}$ は、Poguntke [21, p.162] のリストにはない。従って、$\mathfrak{g}$ のある proper quotient に対応する単連結 Lie 群も対称でないはずである。この quotient は次のようにして与えられる。まず、$\mathfrak{n}_{\alpha_2}$ は $\mathfrak{g}$ の（１次元）イデアルであることに注意する。そして、 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\alpha_2}$ が [21, p.162] のリスト中の記号で $\mathfrak{b}_5$ に同型なのである。 $\mathfrak{b}_5$は 5次元の Lie 代数で次の交換関係をみたす基底 e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 を持つ：

$$[e_2, e_3] = e_4,\quad [e_1, e_2] = -e_2,\quad [e_1, e_3] = e_4$$

$$[e_0, e_2] = e_2,\quad [e_0, e_4] = e_4$$

$e_0 \sim e_4$ に対応する $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\alpha_2}$の基底は次の通り。

$2ju_2 + \mathfrak{n}_{\alpha_2} \leftrightarrow e_0$, $\quad (ju_1 - ju_2) + \mathfrak{n}_{\alpha_2} \leftrightarrow e_1$

$ju_{21}+\mathfrak{n}_{\alpha_2} \leftrightarrow e_2$, $\qquad u_1+\mathfrak{n}_{\alpha_2} \leftrightarrow e_3$

$u_{21}+\mathfrak{n}_{\alpha_2} \leftrightarrow e_4$

この対応によって定まる線形写像が、Lie 代数間の同型を与えている事の検証は読者に委ねる。

最後に、$\mathfrak{g}$ は sp(2,R) の岩沢部分代数に同型であることにも注意しておく。

References

[1] B.A.Barnes, Ideal and representation theory of the L^1-algebra of a group with polynomial growth, Colloq. Math., 45(1981), 301-315.

[2] J.Boidol, *-regularity of exponential solvable Lie groups, Inv. Math., 56(1980), 231-238.

[3] ________, Connected groups with polynomially induced dual, J. Reine Angew. Math., 331(1982), 32-46.

[4] F.F.Bonsall and J.Duncan, Complete normed algebras, Springer, Berlin, 1973.

[5] H.Fujiwara, Sur le dual d'une groupe de Lie resoluble exponentiele, J. Math. Soc. Japan, 36(1984), 629-636.

[6] G.Gangoli, On the symmetry of L^1-algebras of locally compact motion groups and the Wiener Tauberian theorem, J. Funct. Anal., 25(1977), 244-252.

[7] I.M.Gelfand, D.Raikov and G.Shilov, Commutative normed rings, Chelsea, New York, 1964.

[8] S.Helgason and K.Johnson, The bounded spherical func-

tions on symmetric spaces, Adv. Math., 3(1969), 586-593.

[9] J.W.Jenkins, An amenable group with a nonsymmetric group algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 75(1969), 357-360.

[10] ___________, Nonsymmetric group algebras, Studia Math., 45(1973), 295-306.

[11] H.Leptin, Symmetrie in Banachschen Algebren, Arh. Math., 27(1976) 394-400.

[12] ________, Lokal kompakte Gruupen mit symmetrishen L^1-algebren, Symmposia Math., 22(1977),267-281.

[13] ________, The structure of $L^1(G)$ for locally compact groups, In operator algebras and group representations vol.k II, edited by Gr. Arsene et al., Pitman, London, 1984, 48-61.

[14] H.Leptin and D.Poguntke, Symmetry and nonsymmetry for locally compact groups, J.Funct. Anal., 33(1979), 119-134.

[15] J.Ludwig, A class of symmetric and a class of Wiener group algebras, J. Funct. Anal., 31(1979), 187-194.

[16] M.Naimark, Normed algebras, 2nd edition, Wolters-Noorkhoff, Gronigen, 1972.

[17] T.Nomura, Harmonic analysis on a nilpotenbt Lie group and representation of a solvable Lie group on b cohomology spaces, Preprint (accepted for publication).

[18] ________, Plancherel theorem for solvable Lie groups acting simply transitively on Siegel domain, RIMS 講求録 598 "球超関数ならびにそれによるδ超関数の展開",

[19] T.W.Palmer, Clases of nonabelian, noncompact locally compact groups, Rocky Maunt. J. Math., 6(1978), 683-741

[20] D.Poguntke, Nilpotente Liesche Gruupen haben symmetrishe Gruppen-algebren, Math. Ann., 227(1977), 51-59.

[21] ___________, Nichtsymmetrishe sechsdimensionale Lieshe Gruppen, J.Reine Angew. Math., 306(1979), 154-176.

[22] ___________, Symmetry and nonsymmetry for a class of exponential Lie group, J. Reine Angew. Math., 306(1980).

[23] __________, Operator of finite rank in unitary representaitons of exponential solvable Lie groups, Math. Ann., 259(1982), 371-383.

[24] __________, Algebraically irreducible representations of L^1-algebras of exponential Lie groups, Duke Math. J., 50(1983), 1077-1106.

[25] __________, Auflosbare Liesche Gruppen mit symmetrishen L^1-algebren, J. Reine Angew. Math., 358(1985), 20-42.

[26] L.Pukanszky, On the unitary representations of exponential groups, J. Funct. Anal., 2(1968), 73-118.

[27] S.Shirali and J.W.M.Ford, Symmetry in complex involutory Banach algebras II, Duk Math. J., 37(1970), 275-

280.

[28] G.van Dijk, On symmetry of group algebras of motion groups, Math. Ann., 179(1969), 219-226.