数理解析研究所講究録
616巻 1987年 52-64

8. Einstein-Kähler metrics with positive Ricci curvature

阪大数養部 満渕 俊樹 (Toshiki Mabuchi)

§1. (X, ω_0) をコンパクト連結 n 次元 Kähler 多様体とする。そして、

$$\mathcal{K} := \{\text{all Kähler forms on } X \text{ cohomologous to } \omega_0\}$$

とおく。更に、各 $\omega\ (= \sqrt{-1}\sum g_{\alpha\bar\beta}\,dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta) \in \mathcal{K}$ に対し、$\mathrm{Ric}(\omega)$ (in the De Rham cohomology class $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$) を次の式で定める。

$$\mathrm{Ric}(\omega) := \sqrt{-1}\,\bar\partial\partial \log(\omega^n) = \sqrt{-1}\,\bar\partial\partial \log\det(g_{\alpha\bar\beta}).$$

このとき、$\omega \in \mathcal{K}$ に対し、次の重要な定義を想いおこせ。

定義: ω : Einstein-Kähler $\underset{\text{defn}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$.

ここで、$\mathrm{Ric}(\omega) = \mathrm{Ric}(c\omega)$ $({}^\forall c \in \mathbb{R}_+)$ なので、上の定義に於て、ω をその constant multiple で置きかえることによって、λ を次の3つの type に normalize することが出来る。

$$\lambda = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1.$$

よって、次の implication を得る。

$$\omega : \text{Einstein-Kähler} \Rightarrow \begin{cases} (\text{Case 1})\ \lambda = -1 & \Rightarrow \quad c_1(X)_{\mathbb{R}} < 0, \\ (\text{Case 2})\ \lambda = 0 & \Rightarrow \quad c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0, \\ (\text{Case 3})\ \lambda = 1 & \Rightarrow \quad c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0. \end{cases}$$

この逆の implication が成りたつのかどうかという事が問題となるが、これは Calabi 予想として良く知られている。

予想（Calabi）:

$$\begin{cases} ① \ c_1(X)_{\mathbb{R}} < 0 \Rightarrow \exists 1 \text{ Einstein-Kähler } \omega \text{ s.t. } Ric(\omega) = -\omega\ ? \\ ② \ c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow {}^{\forall}\text{Kähler class, } \exists 1 \text{ Einstein-Kähler } \omega \text{ in} \\ \qquad\qquad \text{the class s.t. } Ric(\omega) = 0 \quad ? \\ ③ \ c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0,\ h^0(X, \mathcal{O}(TX)) = 0 \Rightarrow \exists \text{ Einstein-Kähler } \omega \\ \qquad\qquad \text{s.t. } Ric(\omega) = \omega\ ? \end{cases}$$

この予想の ① は Aubin に、② は Yau によって解かれた。しかし、③ は今もって open problem である。以下、③ のみに焦点を合わせることにして、X を $c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$ をみたすコンパクト連結 n 次元複素多様体とする。よって $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$ を represent するような Kähler form ω_0 が必ず存在する。そして、

$$\mathcal{E} := \{\omega \in \mathcal{K} \mid Ric(\omega) = \omega\}$$

とおく。更に、

$$G := \mathrm{Aut}^0(X) = \left(\begin{array}{l}\text{the identity component of the group of} \\ \text{holomorphic automorphisms of } X\end{array}\right)$$

$$K := \mathrm{Isometry}^0(X, \omega) = \left(\begin{array}{l}\text{the identity component of the} \\ \text{group of isometries of } (X, \omega)\end{array}\right)$$

$$(\omega \in \mathcal{K})$$

とおいて次の問題を考える。

問題： $\mathcal{E}$ が nonempty となるための簡明な十分（又は必要十分）条件を求めよ。（Calabi は $H^0(X, \mathcal{O}(TX)) = \{0\}$ がそういった十分条件のひとつであろうと予想しているのである。）更に $\mathcal{E} \neq \phi$ のとき、$\mathcal{E}$ の構造を求めよ。

この問題に関し、知られている事を列挙する。

(I) 松島の定理：

$$\mathcal{E} \neq \phi \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}{}^\forall\omega \in \mathcal{E} \text{ に対し、} K_\omega \text{ は } G \text{ の maximal compact} \\ \text{subgroup。しかも } G \text{ は } K_\omega \text{ の complexification} \\ \text{となっている。特に } G \text{ は簡約代数群。}\end{array}\right.$$

G の maximal compact subgroup K をひとつ fix する。さて、$\mathcal{E} \neq \phi$ のとき、$\mathcal{E} \times G \ni (\omega, g) \mapsto g^*\omega \in \mathcal{E}$ によって、G は $\mathcal{E}$ に作用しているが、この定理から $\mathcal{E}$ の各 G-orbit は G/K に

G-equivariant に diffeomorphic であるということを示している。

(II) 二木の基本定理: $\omega \in \mathcal{K}$ 及び $Y \in H^0(X, \mathcal{O}(TX))$ に対し、$Y_{\mathbb{R}} := Y + \bar{Y}$ とおき、$\varphi_\omega(Y) \in \mathbb{R}$ を次の式で定める:

$$\varphi_\omega(Y) := \int_X (Y_{\mathbb{R}} f_\omega)\, \omega^n.$$

但し f_ω は $\mathrm{Ric}(\omega) = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} f_\omega$ なる式によって(up to an additive constant で)定まる X 上の実数値 C^∞ function。この時、

① 各 Y に対し、$\varphi_\omega(Y)$ は $\mathcal{K}$ の元 ω の選び方にはよらない。(故に $\varphi_\omega(Y)$ を単に $\varphi(Y)$ と書くことにする。)

② $\mathbb{R}$ を 1-dimensional abelian real Lie algebra と思うとき、$\varphi : H^0(X, \mathcal{O}(TX)) \to \mathbb{R}$ は Lie algebra homomorphism。

③ $\mathcal{E} \neq \phi$ のとき、φ は zero homomorphism。

二木の重要な related result としては "X として $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の適当な $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-bundle をとれば $c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$ かつ 2条件

i) $\mathrm{Aut}^0(X) =$ reductive,

ii) $\varphi \neq 0$ (よって $\mathcal{E} = \phi$)

を満たす" というのがあり、これは $\varphi : H^0(X, \mathcal{O}(TX)) \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{E} \neq \phi$ に対する意味のある obstruction になっているということを示している。

(III) 最近、坂根は Einstein-Kähler 計量をもつ non-homogeneous な X の例の series を見出した。また、小磯-坂根はその結果を少し一般化して、ある種の X に対しては $\mathcal{E} \neq \phi$ と $\varphi = 0$ が同値であることを示した。(我々は、彼らの定理の別証を彼らの例に於ける Einstein-Kähler metric の very explicit description を与えることによって得たが、これは §2 で、部分的に触れる。)

(IV) $\mathcal{E} \neq \phi$ の場合、$\mathcal{E}$ の構造については、X が Kähler C-space のときは、松島によって $\mathcal{E}$ は single G-orbit から成ることが知られていたが、最近、板東と筆者の共同研究で、これが一般の X に対して成り立つことがわかった。

定理: $\mathcal{E} \neq \phi$ のとき、$\mathcal{E}$ は single G-orbit から成る。更に、$\mathcal{E}$ に自然な metric を与える事ができて、$\mathcal{E}$ は対称空間 G/K に isometric。

この定理は"Aubin の方程式を逆向きに解く"ことにより、証明されるが、証明そのものは長くなるので割愛する。

§2. Very explicit description of Sakane's metric.

§1で列挙した(I)〜(IV)に於て、(II)を別の観点から見たものについては、筆者の論文"K-energy maps integrating Futaki invariants" Tôhoku Math. J. 38 (1986), 573-593 を参照して下さい。ここでは(III)の typical な例について、その Einstein-Kähler metric の explicit description を与える。(一般の example に於ても同様の metric を構成することが、我々の Koiso-Sakane's Theorem の別証の cricial な点である。) さて、

$$B = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \qquad E = \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1,-1)$$

とおく。但し、$\mathcal{O}(1,-1) := pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\otimes pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$。ここで、$\mathcal{O}$ は B 上の trivial line bundle, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の hyperplane bundle, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ は dual bundle $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))^*$ of $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, $pr_i : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は natural projection to the i-th factor とする。更に、

$$M := \mathbb{P}(E^*) = (E - \{\text{zero section}\})/\mathbb{C}^*$$

とおく。さて line bundle $L := \mathcal{O}(1,-1) \xrightarrow{\pi} B$ の natural fibre metric から induce される norm

$$\rho : L \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell \mapsto \rho(\ell) := \|\ell\|$$

は (up to constant multiple で) unique に定義される L 上の関数だが、L は更に次の様に、M の Zariski open dense subset と思える。

$$L \subset M = \mathbb{P}(E^*)$$
$$\ell \longmapsto 1 \oplus \ell \bmod \mathbb{C}^*.$$

故に、ρ を M の open subset L 上の関数と思うことにする。更に ρ の関数 $x = x(\rho)$ を次の式で定義する：

$$\rho^2 = \exp\left(-4\int_0^x \frac{(4-s^2)}{(7-s^2)(1-s^2)}\,ds\right).$$

さて、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(z_0 : z_1)\}$ 上の Fubini-Study form ω_0 で表わす：

$$\omega_0 = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log(1+|z|^2) \qquad \text{where } z := z_1/z_0.$$

このとき、$\theta := 2(pr_1{}^*\omega_0 + pr_2{}^*\omega_0)$ は B 上の Einstein-Kähler form。故に、

$$\eta := \sqrt{-1}\,(7-x^2)(1-x^2)(\pi^*\theta)^2 \wedge \partial\rho \wedge \bar\partial\rho/\rho^2$$

は L 上の volume form であるが、これが natural に M 上の volume form に extend する。そして、

$$\omega := \sqrt{-1}\,\bar\partial\partial \log \eta$$

が、求めるべき、M 上の Einstein-Kähler form となっている。もちろん、M が Kähler C-space とはならないことは坂根によって確かめられている。（ω が確かに Einstein-Kähler form となっていることは、ω^3 が η の定数倍になっていることが計算で容易に check できることより o.K.）

§3、 Moment map.

(§1とは無関係に)この§3では、(X, ω_0)をコンパクトKähler多様体とし、Gを$\mathrm{Aut}^0(X)$のcomplex Lie subgroupとする。X上の実数値C^∞関数$\psi \in C^\infty(X)_{\mathbb{R}}$に対し、

$$\omega_0(\psi) := \omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\psi$$

とおく。$\mathcal{K} := \{\text{all Kähler forms on } X \text{ cohomologous to } \omega_0\}$に対して、更に、

$$\widetilde{\mathcal{K}} := \{\psi \in C^\infty(X)_{\mathbb{R}} \mid \omega_0(\psi) \in \mathcal{K}\}$$

とおく。このとき $\omega_0 : \widetilde{\mathcal{K}} \ni \psi \mapsto \omega_0(\psi) \in \mathcal{K}$ はsurjective map with fibre $\cong \mathbb{R}$ となっていることに注意せよ。さて、Gは$\mathcal{K}$に右から

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{K} \times G &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (\omega, g) &\longmapsto g^*\omega \end{aligned}$$

によって作用するが、今、

(*)　作用μは$\widetilde{\mathcal{K}}$へのGの作用にliftする

と仮定する。即ちGの$\widetilde{\mathcal{K}}$への右作用$\tilde{\mu} : \widetilde{\mathcal{K}} \times G \to \widetilde{\mathcal{K}}$が存在し

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{K}} \times G & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \widetilde{\mathcal{K}} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \omega_0} \\ \mathcal{K} \times G & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{K} \end{array}$$

が commute、しかも

$$\tilde{\mu}(\psi_1, g) - \tilde{\mu}(\psi_2, g) = g^*(\psi_1 - \psi_2), \qquad {}^\forall(\psi_1, \psi_2, g) \in \hat{\mathcal{K}} \times \hat{\mathcal{K}} \times G,$$

を満たす。

Remark 1. たとえば、ある (holomorphic) line bundle L on X が存在して、2条件

(i) ω_0 represents $\alpha c_1(L)_{\mathbb{R}}$ for some constant $\alpha \in \mathbb{R}^*$;

(ii) the G-action on X lifts to a linear G-action on L

を満たすとき、上の (*) は常に満たされている。(もし (i) が成りたち G が linear algebraic なら (ii) は自動的に成りたつ。) 注意すべきは ω_0 represents $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$ のときで、このときは如何なる G に対しても (*) は常に満たされている。

さて §1 の (II) のある意味の一般化として、次のような定義をする。(一般化になっているという事の詳細な説明は、ここでは省略する。)

定義: 任意の $Y \in \mathfrak{g}\,(\subset H^0(X, \mathcal{O}(TX)))$ に対し、$Y_{\mathbb{R}} := Y + \bar{Y}$ を対応する real vector field on X とする。そして、

$$\gamma_t := \exp(tY_{\mathbb{R}}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

とおく。更に、各 $\psi \in \hat{\mathcal{K}}$ に対し、実数 $b_\psi(Y) \in \mathbb{R}$ を

$$\text{ち}_{\psi}(Y) := \frac{-1}{2}\int_X \frac{d}{dt}\left(\tilde{\mu}(\psi, \psi_t)\right)\Big|_{t=0} \omega(\psi)^n \Big/ \int_X \omega_0{}^n$$

で定義する。ところで、各 Y に対し、$\text{ち}_{\psi}(Y)$ の値は、$\psi \in \tilde{\mathcal{K}}$ の選び方によらないので、subscript の ψ を省いて単に $\text{ち}(Y)$ と書く。このとき $\text{ち}: \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ は Lie algebra homomorphism をなす。

Remark 2. ω_0 が $2\pi\, c_1(X)_{\mathbb{R}}$ を represent する場合は、$G = \mathrm{Aut}^0(X)$ とすると、上の ち と、§1,(II) の φ は constant multiple を除いて一致する。

以下、簡単の為、G を簡約代数群とし、しかもその maximal compact subgroup K で

$$K \subset \mathrm{Isometry}^0(X, \omega_0)$$

をみたすものが存在したとする。$\mathfrak{k}$ を K の Lie algebra とする。各 $Y \in \mathfrak{k}\ (\subset H^0(X, \mathcal{O}(TX)))$ に対し、$u_Y \in C^\infty(X)_{\mathbb{R}}$ を

$$i(Y_{\mathbb{R}})\omega_0 = du_Y$$

で (up to an additive constant に) 定める。この時、K は $\mathfrak{k}^*$ に coadjoint action によって作用しているが、C^∞ 写像

$$m: X \to \mathfrak{k}^*$$

は次の2条件を満たすとき moment map と呼ばれる。

$$\begin{cases} \text{(i)} & m \text{ は } K\text{-equivariant}; \\ \text{(ii)} & \langle m(x), Y \rangle = u_Y(x), \qquad \forall x \in X,\ \forall Y \in H^0(X, \mathcal{O}(TX)). \end{cases}$$

しかし、この2条件では m は unique には定まらない。つまり $\mathfrak{k}$ の center の部分で ambiguity が出てくるからである。特に $K = S^1 \times \cdots \times S^1$ のような type の群であるときは translation の ambiguity が完ペキに出てきてしまう。そこで更に各 u_Y に次のような normalizing condition を付け加える。

$$\text{(iii)} \quad \int_X u_Y \,\omega_0^n \Big/ \int_X \omega_0^n = \mathfrak{z}(Y/\sqrt{-1}), \quad \forall Y \in \mathfrak{k}.$$

そうすると、如何なる場合でも m は unique に定まってしまう。この $m : X \to \mathfrak{k}^*$ を"厳密な意味での moment map"と呼ぶことにする。この"厳密な意味での moment map"を定義した意味と、我々の §1 で取り上げた(II), (III) との関連を、以下いくつかの Remark に書き示すことによって本稿を終ることにする。

Remark 3. 上の (ii) と (iii) の2条件をあわせると、自動的に (i) が出てくる。

以下、簡単の為 $K \cong \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{r\text{個}}$ の場合を考える。

Remark 4. $d\nu$ を Duistermaat-Heckman's measure on $\mathfrak{k}^*$ とする。即ち $d\nu$ を push down of ω^n to Image m by m とする。このとき上の (iii) 式は、

$$\mathfrak{k} \ni Y \longmapsto \mathfrak{h}(Y/\sqrt{-1}) \in \mathbb{R}$$

が Image m の Duistermaat-Heckman's measure $d\nu$ に関する barycenter とみなすことが出来るという事を示している。

Remark 5. X が r 次元 toric variety、即ち $G = (\mathbb{C}^*)^r$ の G-equivariant smooth compactification であった時、上の $d\nu$ は $\mathfrak{k}^* (\cong \mathbb{R}^r)$ の (Euclidean space としての) standard measure となっている。ここで、$G = \{(t_1, t_2, \cdots, t_r) \mid t_i \in \mathbb{C}^*, \forall i\}$ と書くとき $\mathfrak{k} = \sqrt{-1} \sum \mathbb{R}\, t_i\, \partial/\partial t_i$ と考えられるから

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{k}^* & \cong & \mathbb{R}^r \\ \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum a_i\, dt_i/t_i & \leftrightarrow & (a_1, \cdots, a_r) \end{array}$$

と同一視されるわけである。また、更に holomorphic line bundle L が存在して ω_0 represents $2\pi c_1(L)$ となっている時は、厳密な意味での moment map $m : X \to \mathfrak{k}^* (= \mathbb{R}^r)$ の image は integral points $\in \mathbb{Z}^r (\subset \mathbb{R}^r)$ を vertices とする compact convex polytope。しかも、この polytope は toric variety X とその上の line bundle L に associate して代数幾何学的に定義される convex polytope with integral vertices と一致する。

Remark 6. 坂根(resp. 坂根－小磯)の examples (§1の(III)参照)に於て、考えているKähler manifoldsには $\mathbb{C}^*$ が natural に作用しているが(例えば§2の場合なら line bundle L の自然な $\mathbb{C}^*$-action から induce される M 上の $\mathbb{C}^*$-action を考えよ)、$G=\mathbb{C}^*$ から $K=S^1$ とした時、厳密な意味での moment map の image は、$\mathbb{R}$ の中の $[-1,1]$ (resp. $[-n_1, n_2]$, $\exists n_1, \exists n_2 \in \mathbb{Z}_+$) という閉区間になる。しかも、彼らが公式として示した φ に関する計算式は、実は Duistermaat-Heckman's measure に関する $[-1,1]$ (resp. $[-n_1, n_2]$) の barycenter を出しているに他ならないことがわかる。(もちろん§1,(II)を見るまでもなく、φ それにち (cf. Remark 2) を具体的に計算する事は我々の研究にとっては非常に重要なものである。)