数理解析研究所講究録
617巻 1987年 160-175

保型形式の次元へのユニポテント共役類の寄与の消滅

九大教養 伊吹山 知義 (Tomoyoshi Ibukiyama)

一般の n について、$Sp(n,\mathbb{R})$ とその compact 実形 $Sp(n)$ の適当な「離散群」についての保型形式を比較することを目標に、次元比較については、central unipotent ではうまくゆくことを示すのが本稿の目的である。

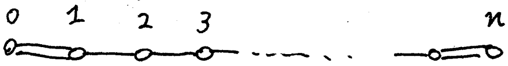
§1. 問題の設定と主定理

まず、我々の考えている「離散群」について解説しよう。$Sp(n,\mathbb{R})$ については次のようなものを考える。素数 p を1つ固定する。

$$U_p = Sp(n,\mathbb{Z}) \cap \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} \; \overbrace{\qquad\qquad}^{n} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & & * & & & \\ p* & \ddots & & & * & \\ p* & \cdots p* & * & & & \\ \hline & & & * & p* & p* \\ & p* & & & \ddots & p* \\ & & & * & & * \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}\, n \\ \\ \}\, n \end{array} \right\}$$

とおく。但し $*$ は任意の整数を（成分ごとに独立に）動くと

する。U_ϕ は $Sp(n,\mathbb{Q})$ の岩堀部分群と呼ばれる。さて、U_ϕ に属する weight k のジーゲル尖点形式を問題にしたいのであるが、$n=1$ の時と同様、new form のみを考えるのが重要である。このためには、$Sp(n,\mathbb{Q}) \supsetneq U \supset U_\phi$ となるようなすべての群 U が必要となる。Bruhat-Tits 理論によればこのような U の全体は $Sp(n,\mathbb{Q})$ の affine Weyl 群の Coxeter 部分群と一対一に対応している。言いかえると、$Sp(n,\mathbb{Q})$ の拡張された Dynkin 図形



の $n+1$ 個の頂点の集合を S_{aff} とすれば、S_{aff} の真部分集合と一対一に対応している。$\theta \subsetneq S_{aff}$ に対応する U を U_θ と書くことにする。$\theta=\phi$ ならば U_θ は岩堀部分群である。U_θ に属する weight k のジーゲル尖点形式の空間を $S_k(U_\theta)$ と書くことにする。

$Sp(n)$ については本稿では直接必要としないので概略を述べるにとどめる。p を前に固定した素数とし、B で、判別式が p の $\mathbb{Q}$ 上の定符号4元数環とする。左 B ベクトル空間 B^n 上には、正定値 B-エルミート計量が基底のとりかえを除いて、一意的に存在する。この計量に関する相似変換 (similitudes) のなす群を G とし、G_A を G のアデール化、G_v を G_A の v 成分とする。($v \leqq \infty$) G_p の minimal parahoric subgp

を1つ選んで $U'_{p,\phi}$ と書く。前と同様，$U'_{p,\phi}$ を含む G_p の部分群は，G_p の拡張 Dynkin 図形の頂点の集合 S'_{aff} の部分集合と1対1に対応する。$\theta \subset S'_{aff}$ について，対応する群を $U'_{p,\theta}$ と書き，G_A の部分群 U'_θ を

$$U'_\theta = G_\infty U'_{p,\theta} \prod_{q \neq p} U'_q$$

と定義する。但し，$U'_q = G_q \cap GL_n(\mathcal{O}_q)$，$\mathcal{O}$ は B の極大整数環とした。$\mathfrak{M}_\nu(U'_\theta)$ で，U'_θ に属し，かつ weight (i.e. G_∞ の表現) が Young 図形

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \cdots & \nu \\ \hline & & \\ \hline 1 & \cdots & \nu \\ \hline\end{array}\right\} n$$

であるような G_A 上の保型形式の空間をあらわす。

<u>予想</u> ([2],[3])

$$(*) \qquad \sum_{\theta \subsetneqq S_{aff}} (-1)^{\#(\theta)} \dim S_k(U_\theta) = \sum_{\theta \subsetneqq S'_{aff}} (-1)^{\#(\theta)} \dim \mathfrak{M}_{k-n-1}(U'_\theta)$$

for $k \geqq n+2$

この予想は，$n=1$ では Eichler による定理であり，$n=2$ では [1] で証明された。我々の目標はこれを $n \geqq 3$ に拡張

することである。ところで、周知のように、次元公式は群の共役類に関する適当な data の和で表わされている。$n=2$ では、これらの data を完全に explicit に計算してしまうことにより比較を行った（[1]）。しかしnが一般では explicit な計算は当面難しそうである。むしろ次元の計算と次元の比較は別の問題であるとの観点から、次元の比較についての一般論を追求する方が望ましいように思われる。Langlands は跡公式の比較について次のような哲学を述べている。まず $Sp(n,\mathbb{R})$ と $Sp(n)$ は共に $Sp(n,\mathbb{C})$ の実形である。$Sp(n,\mathbb{C})$ の元の共役類Cを1つ固定し、$Sp(n,\mathbb{R})$ 共役類でCに含まれるもの全体を C_1、$Sp(n)$ 共役類について同様のものを C_2 と書こう。C_1, C_2 を stable conjugacy class と呼ぶことにする。この時、大雑把に言って C_1 と C_2 の両方の群での跡公式への寄与は等しいであろうというのである。特に、$Sp(n)$ の元はすべて半単純であるから、$Sp(n,\mathbb{R})$ の半単純でない元、たとえばユニポテント元の(*)の左辺への寄与は0のはずである。この部分を調べるには(*)の左辺だけ考えればよい。もう少し正確に述べるために、Godement の公式を復習する。$\mathfrak{H}_n$ をn次のジーゲル上半空間とし、$\Gamma\subset Sp(n,\mathbb{R})$ を $vol(\Gamma\backslash\mathfrak{H}_n)<+\infty$ なる離散部分群とすると、

$k\geq 2n+1$ で次の公式がなりたつ（Godement）。

$$\dim S_k(U) = a_n(k) \int_{U \backslash \mathfrak{H}_n} \sum_{\gamma \in U} H_\gamma(k : Z)\, dZ$$

但し、$dZ = (\det Y)^{-n-1} \prod_{i \leq j} dx_{ij}\, dy_{ij}$,

$$H_\gamma(k : Z) = \det(CZ+D)^{-k} \det\left(\frac{\gamma \cdot Z - \bar{Z}}{2\sqrt{-1}}\right)^{-k} (\det Y)^k,$$

$$\left(\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)$$

$a_n(k)$ は、n と k のみによる定数で、Γ 函数で具体的にあらわされる。

次に、$Sp(n, \mathbb{Q})$ の元について、次の用語を導入する。

定義　$g \in Sp(n, \mathbb{Q})$ とする。適当な $h \in Sp(n, \mathbb{Q})$ と適当な対称行列 $X = {}^tX \in M_n(\mathbb{Q})$ について

$$h^{-1} g h = \begin{pmatrix} 1_n & X \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \quad (X \neq 0)$$

となるとき g を central unipotent と言う。言いかえると、g が $Sp(n, \mathbb{Q})$ のある maximal parabolic subgr. の unipotent radical の center に属するときに g を central unipotent と言うのである。

$Sp(n,\mathbb{Q})$ の central unipotent elements の全体の集合を $\mathcal{C}$ として、各 $\theta \subset S_{aff}$ に対して

$$\Pi(\theta) = U_\theta \cap \mathcal{C}$$

とおく。また、

$$I(k,\theta) = a_n(k) \int_{U_\theta \backslash \mathfrak{h}_n} \sum_{\gamma \in \Pi(\theta)} H_\gamma(k;Z)\, dZ$$

とおく。

主定理

任意の $n \geqq 1$, $k \geqq 2n+1$ 及び $\theta \subsetneqq S_{aff}$ に対して、$I(k,\theta)$ は収束し、各 (n,k) の組に対して、

$$\sum_{\theta \subsetneqq S_{aff}} (-1)^{\#(\theta)} I(k,\theta) = 0$$

となる。すなわち、central unipotent elements の (*) の左辺への寄与は消滅する。

次に何故 $\mathcal{C}$ のみを問題にするのかを述べ、系を1つ述べる。上の主定理では、$I_n(k,\theta)$ 自身は通常 0 ではなく、(すなわち各 $\dim S_k(U_\theta)$ への central unipotent の寄与は 0 ではなく) 交代和をとってはじめて 0 になるという点がポイントである。

しかし、この元以外のユニポテント元や、"hyperbolic" な元については、多くの人によって次のことが予想されている。

予想　U の "hyperbolic" な元と central でない unipotent 元の $\dim S_k(U)$ への寄与は消滅する。

この予想を仮定すれば、我々の主定理はもう少しすっきりした形の系を導く。$N \geqq 3$ なる自然数 N で $p \nmid N$ なるものをとる。(*) の両辺を "level N" で考えよう。すなわち、

$$\Gamma_p(N) = \{ g \in S_p(n, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]) \ ; \ g \equiv 1_{2n} \ \mathrm{mod.}\ N \}$$

とおき、$U_\theta(N) = U_\theta \cap \Gamma_p(N)$ とする。また $U'_\theta \subset G_A$ の ℓ 成分を $\ell \mid N$ については "level N" の主合同部分群におきかえたものを $U'_\theta(N)$ とする。このとき、

系．　上の予想のもとで

$$\sum_{\theta \subsetneqq S_{\mathrm{aff}}} (-1)^{\#(\theta)} \dim S_k(U_\theta(N)) = \sum_{\theta \subsetneqq S'_{\mathrm{aff}}} (-1)^{\#(\theta)} \dim \mathcal{M}_{k-n-1}(U'_\theta(N))$$

である。

ここで（pと無関係な）level をつけた理由は、楕円元の寄与を考えないですむからである。また、単位元の寄与は、主定理とは別種の計算で、一致することがわかっている([3])。

次節以下で証明の概要を述べる。証明は $I_n(\mathfrak{k},\theta)$ の収束と $I_n(\mathfrak{k},\theta)$ が何によって決まるかを述べる「解析的」部分と、交代和の消滅を述べる「群論的」部分にわかれる。

§2. 解析的公式

$Sp(n,\mathbb{Z})$ ないし主合同部分群については、central unip. の寄与を cone のゼータ函数の特殊値で表わすという Shintani [4] の公式が存在する。この公式を我々の U_θ の場合に書き変えることがまず必要になる。証明の構造は大部分同じであるが、U_θ は cusp が複雑であるので、いくつかの点で修正が必要であった。ここでは結果のみ述べる。$U\subset Sp(n,\mathbb{Q})$ を離散群とする。$1\leq r\leq n$ について $Sp(n,\mathbb{Q})$ の maximal parabolic subgroup $G_{n,r}$ を

$$G_{n,r}=\left\{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} & \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ 0 & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ \hline 0 & 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{array}\right)\in Sp(n,\mathbb{Q}) \end{array}\right\}$$

と定義する。これは $(n-r)(n-r+1)/2$ 次元の cusp と対応する。cusp ごとにユニポテント元をわけるために、

$$Sp(n,\mathbb{Q}) = \coprod_i U w_i G_{n,r} \quad (\text{disjoint})$$

と double coset 分解する。

$$\mathcal{S}_r = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1_r & 0 & x & 0 \\ 0 & 1_{n-r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-r} \end{array} \right) ; \quad x = {}^t x \in M_r(\mathbb{Q}) \right\}$$

とおき、

$$\mathcal{S}_r' = \{ g \in \mathcal{S}_r : \det x \neq 0 \} \text{ とする。}$$

$$\Pi_r = \{ \gamma \in U ; g^{-1}\gamma g \in \mathcal{S}_r' \text{ for some } g \in Sp(n,\mathbb{Q}) \}.$$

$$\Pi_{r,i} = \{ \gamma \in U : \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 \in U \cap w_i \mathcal{S}_r' w_i^{-1} \text{ for some } \gamma_0 \in U \}$$

とする。U の central unipotent elements は Π_r $(r=1,\cdots,n)$ の disjoint union であり、各 Π_r は $\Pi_{r,i}$ の disjoint union であることが簡単な計算により示される。$\dim S_k(U)$ への central unipotent の寄与を細分して、

$$I_{r,i} = a_n(k) \int_{U\backslash \mathfrak{H}_n} \sum_{\gamma \in \Pi_{r,i}} H_\gamma(k;Z)\, dZ$$

とおこう。

<u>公式</u>　Uが十分よい群とする。このとき，$I_{r,i}$ は $k \geqq 2n+1$ で収束して，しかも n, k, r 及び，群 $w_i^{-1}Uw_i \cap G_{n,r}$ のみによる。すなわち，Uが異っても $w_i^{-1}Uw_i \cap G_{n,r}$ が一致する限りは $I_{r,i}$ は一致する。

ここで「十分よい群」というのは，Uから決まる何種類かの離散群の Levi 分解がその離散群内で実現できるという条件なのだが，ここでは詳しくは述べない。$U=U_\theta$ ならばこの条件は満足している。また，公式をもっと具体的な volume や積分，ないし cone の zeta 函数の特殊値で書くことができるが，記号がかなり複雑になるので，紙数の関係でここでは割愛する。我々の目的のためには，上の事実だけで十分だからである。なお Shintani [4] では $k \geqq 2n+3$ と仮定されているが，その証明の評価をよくみると $k \geqq 2n+1$ でよいことがわかる。

§3. 群論

前述の公式によれば，主定理は次のような群論的な定理に帰着する。$1 \leqq r \leqq n$ なる r を固定し，各 $\theta \subsetneqq S_{aff}$ に対して $d(\theta) = \#(U_\theta \backslash Sp(n,\mathbb{Q})/G_{n,r})$ とおく。

$\Lambda = \{ (\theta, i) \ ; \ \theta \subsetneqq S_{aff}, \ 1 \leqq i \leqq d(\theta) \}$ とおく。

定理 1

$U_\theta \backslash Sp(n,\mathbb{Q}) / G_{n,r}$ $(\theta \subsetneqq S_{aff})$ の代表元
$\{ w_{i,\theta} : i = 1, \cdots, d(\theta) \}$ を(各 $\theta \subsetneqq S_{aff}$ に対して一斉に)
適当にとれば、Λ の次のような disjoint union への
分解が存在する。

$$\Lambda = \coprod_{\ell} \Lambda_\ell \quad (\text{disjoint})$$

$$\Lambda_\ell = \{ (\theta, i), (\theta', j) \} \text{ で}$$

$$\#(\theta) = \#(\theta') + 1 \quad \text{かつ}$$

$$w_{i,\theta}^{-1} U_\theta w_{i,\theta} \cap G_{n,r} = w_{j,\theta'}^{-1} U_{\theta'} w_{j,\theta'} \cap G_{n,r}$$

この定理は純粋の群論であるのである程度代数群の一般論が適用できる。逆に言えば、代数群の一定理とみなしても、独自の面白さがあると思う。この定理を証明するためには、cusp の代表 w (i.e. $U_\theta \backslash Sp(n,\mathbb{Q})/G_{n,r}$ の代表)を具体的にとり $w^{-1} U_\theta w \cap G_{n,r}$ についての情報を得ることが必要になる。もし、$U_\theta \subset Sp(n,\mathbb{Z})$ ならば、$U_\theta \backslash Sp(n,\mathbb{Q})/G_{n,r}$ は、$Sp(n,\mathbb{Q})$ の (affine でない) Weyl 群 W の、適当な2つの Coxeter subgp. W_θ (θ のみによる) と W_r (r のみによる)

による double coset の集合 $W_\theta \backslash W / W_r$ と bijective になる。$U_\theta \not\triangleleft Sp(n,\mathbb{Z})$ の時も、W_θ として Coxeter subgp ではない W の部分群をとれば同様のことがなりたつが、これは少々扱いにくい。しかしいずれにしても $U_\theta \backslash Sp(n,\mathbb{Q}) / G_{n,r}$ の代表は W の元（つまり $Sp(n,\mathbb{Q})$ の max. split torus の normalizer の元）から選ぶことができる。以下でこれを具体的に記述しておく。

$$T = \left\{ t = \left(\begin{array}{ccc|ccc} t_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & t_n & & & \\ \hline & & & t_1^{-1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & t_n^{-1} \end{array} \right) \in Sp(n,\mathbb{Q}) \,;\, \begin{array}{l} t_i \in \mathbb{Q} \\ i = 1 \sim n \end{array} \right\}$$

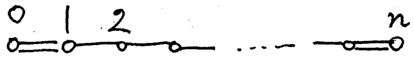
とおき、T の character gp $X^*(T)$ の元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を、$\lambda_i(t) = t_i$ で定義する。W は、$2n$ 個の元からなる集合 $\{\pm\lambda_i \,;\, i = 1 \sim n\}$ 上に忠実に作用し、この作用で、

$$w(\pm\lambda_i) = \pm\varepsilon_i \lambda_{\sigma(i)} \quad (\text{複号同順},\ \sigma \in \mathfrak{S}_n \ (n\text{次対称群}))$$
$$\varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ i = 1, \cdots, n$$

なる形の置換全体と同一視される。前述の W_r は、この置換のうちで $\sigma(i) \in \{1, \cdots, r\}$ for all $i = 1 \sim r$ となる形のもの全体と対応している。よって W/W_r の1つの coset では、集合 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ の image は同じであり、

$$W/W_r \underset{(\text{bijective})}{\cong} \left\{ \{\varepsilon_1\lambda_{i_1}, \varepsilon_2\lambda_{i_2}, \cdots, \varepsilon_r\lambda_{i_r}\} \,;\, \begin{array}{l} \varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1 \sim r \\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n \end{array} \right\}$$

となる。W/W_r の元を次のようなDynkin図形上の「絵」で表わす。Dynkin図形の頂点に



と番号をつけ、1〜n 番目の頂点に＋または－符号を全体で r 個つける。（0番目には何もつけない。）符号のついた番号を $i_1, \cdots i_r$, それぞれの符号を $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ $(=\pm 1)$ とするとき、この絵を $\{\varepsilon_1\lambda_1, \cdots, \varepsilon_r\lambda_r\}$ に対応する W/W_r の元と対応させる。

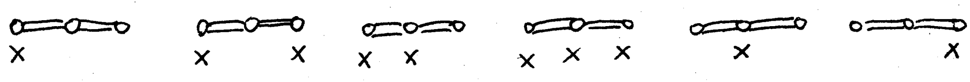
（例） $n=2$, $r=1$ ならば

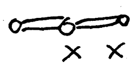
の4通りある。

また、W/W_r の各元について、W の代表元を1つずつかってに指定しておく。

次に $\theta \subsetneqq S_{aff}$ を考える。θ を、Dynkin図形の頂点のうち θ に含まれないものの下に×をつけることによりあらわす。

（例） $n=2$ では



 の7通り.

S_{aff} の連続した頂点の集合 $\{t, t+1, \cdots, t+s\}$ $(t \geq 1)$ で $t=1$ または $t-1$ が×であり、かつ $t+s$ が×または n で

しかも $t+s$ 以外は皆 × でないとき「ブロック」と呼ぶことにする。但し S_{aff} を $\{0, 1, \cdots, n\}$ と同一視した。以上の準備のもとで

定理2

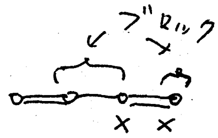
各 r と $\Theta \subsetneq S_{aff}$ について $U_\Theta \backslash Sp(n, \mathbb{Q})/G_{n,r}$ の代表は、次の条件をみたす r 個の符号の絵と1対1に対応する。

(1) 符号に + が1つでもあるときは、各ブロック $\{t, t+1, \cdots, s\}$ で $\{t, \cdots, t+t_1\}$ で符号が +, $\{t+t_1+1, \cdots, t+t_2\}$ で符号が − $\{t+t_2+1, \cdots, s\}$ で符号なしとなっている。

(2) 符号がすべてマイナスの時は、各ブロックで $\{t, t+1, \cdots, t+t_1\}$ は符号なし、$\{t+t_1+1, \cdots, s\}$ は符号が − となる。

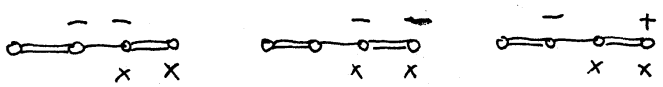
(3) $\Theta \ni 0$ ならば 1を含むブロックの符号は − か ϕ のみ

(4) $\Theta \ni n$ ならば n を含むブロックの符号は + か ϕ のみ

(例) $n=3$, $r=2$, $\Theta=\{0, 1\}$ なら 

で

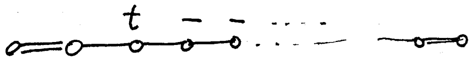
cusp の代表は



で与えられる。

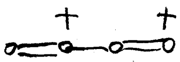
この定理2から定理1を導くには、W/W_r の元、すなわち「絵」を固定して、θ を動かせばよい。ここでは何と何を比較して pair Λ_ℓ を作るかのみを述べよう。

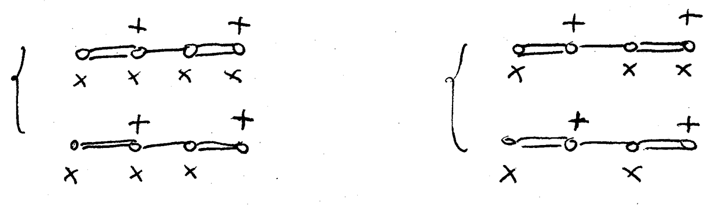
① 絵の符号がマイナスのみとする。



−のうちで番号が最小のものを $t+1$ とする。この絵が U_θ の cusp の（定理2における）代表になるとする。$\theta \ni t$ または $\theta \not\ni t$ に応じて $\theta' = \theta - \{t\}$ または $\theta' = \theta \cup \{t\}$ とすると、上の絵は $U_{\theta'}$ の cusp の代表でもあり、この2つが定理1の pair をなす。

② 絵の符号にプラスが含まれるとき、＋のうちで最大の番号を t とする。この絵が U_θ の cusp の代表なら、θ' を①と同様に定義するとき、$U_{\theta'}$ の cusp の代表でもある。この2つを pair にすればよい。

例  なら次の pair ができる。



以上のすべてを任意の reductive な代数群に拡張できるのではないかと考えている。主要項については [3] を参照。

Reference（引用したもののみにとどめた）

[1] Hashimoto-Ibukiyama, On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2, \mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (II), Advanced Studies in pure Math. vol. 7 (1985)

[2] Ibukiyama, On symplectic Euler factors of genus two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Vol. 30 No. 3 (1984)

[3] Ibukiyama, On automorphic forms of $Sp(2, \mathbb{R})$ and its compact form $Sp(2)$, Semi. Théorie nombres. Paris (Birkhäuser 1984)

[4] T. Shintani, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Vol. 22 No. 1 (1975), 25 — 65.