

## Jacobi 形式, Oda lifting, Maass space について

東大・教養 (学振・研究員)

菅野孝史 (Takashi Sugano)

このノートの目的は、符号  $(2, m+2)$  の直交群上の正則尖点形式の空間への 1 変数保型形式からの持ち上げ (Oda lifting) を、Jacobi 形式の言葉で言い換えることにある。このことから、Maass space と *lifting image* が一致することがわかる。更に持ち上げに伴う  $L$  関数の関係を求める。最後に、*image* を  $L$  関数の言葉で特徴付けるための 1 ステップに、ふれたい。

§ 1. Jacobi 形式の  $L$  関数

Jacobi 形式とは、Siegel 保型形式の様々な部分 Fourier 係数と同じ変換公式を満す保型形式のことである。ここでは、新谷先生により [14] で導入された用語、Hecke 環・ $L$  関数の定義を用いて、一番易しい場合 (本質的には 1 変数の保型形式の場合) に、 $L$  関数の解析接続・関数等式を調べる [一般的

な場合については Murase [09], [10] を参照されたい]。なお、この節の内容は、昨年度のシンポジウム報告集に書いた [16] §7 と殆んど重複しているが、記号の導入を兼ねて再記させてもらう。

1-1 Jacobi 形式の定義:  $m$  を非負整数、 $V_0 = \mathbb{Q}^m$ ,

$L_0 = \mathbb{Z}^m$  とする。  $\mathbb{Q}$  上の代数群  $H$  を、

$$H = H_{1,m} = \left\{ (u, v, z) \mid u, v \in V_0, z = {}^t z \in M_m(\mathbb{Q}) \right\}$$

$$(u, v, z)(u', v', z') = (u+u', v+v', z+z'+u {}^t v' + v' {}^t u)$$

により定義する。これには  $SL_2$  が、

$$g^{-1}(u, v, z)g = (u', v', z'), \quad (u', v') = (u, v)g, \quad z' = z - v {}^t u + v' {}^t u',$$

と作用している。この作用による  $H$  と  $SL_2$  の半直積を、

$$\underline{G} = \underline{G}_{1,m} = H_{1,m} \cdot SL_2 \quad \text{であらわす。これは、} Sp_{m+1} \text{ の部分群}$$

とみなせる。なお、 $\underline{G}$  の中心  $Z$  は、 $H$  の中心と一致し、

$$\{(0, 0, z) \mid z = {}^t z\} \quad \text{である。}$$

$$\text{さて } \underline{G}_\infty \text{ は、 } \underline{D} = \underline{D}_{1,m} = \{z = (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \mid \text{Im } z > 0\} \text{ による。}$$

$$(u, v, z)g \langle (z, w) \rangle = (g \langle z \rangle, w j(g, z)^{-1} + u g \langle z \rangle + v)$$

と作用している (ここで  $g \langle z \rangle, j(g, z)$  は  $SL_2(\mathbb{R})$  の上半平面への通常的作用及び保型因子)。  $m$  次正定値半整数対称行列  $S$  と、自然教長に対し、

$$J_{S,k}(g, z) = j(g, z)^k e^{-\frac{1}{2} S z} \left[ \frac{c}{j(g, z)} S[w] - \frac{2}{j(g, z)} S[u, w] - g \langle z \rangle S[u] \right]$$

$$(g = (u, v, z)g, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$$

は、 $\underline{G}_0 \times \mathcal{D}$  上の正則保型因子を与える。 $\underline{\Gamma} = \underline{G}(\mathbb{Z}) \times 1$ 。  
 $\underline{\Gamma}$  に関する weight  $k$ , index  $S$  の Jacobi (cusp) forms  
 の空間  $\mathcal{S}_{S,k}(\underline{\Gamma})$  を、

$\mathcal{S}_{S,k}(\underline{\Gamma}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} f(\gamma \langle z \rangle) = J_{S,k}(\gamma, z) f(z) \\ \text{holomorphic, cuspidal} \quad \forall \gamma \in \underline{\Gamma} \end{array} \right\}$   
 と定義する。各元は、

$$f(z, w) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}, \alpha \in L_0^* = (2S)^{-1}L_0 \\ a - S[\alpha] > 0}} a_f(a, \alpha) e[az + 2S(\alpha, w)]$$

と Fourier 展開されることに注意しておく。

$\mu \in L_0^*/L_0$  に対し、

$$\theta_\mu(z, w) = \sum_{\eta \in L_0} e[zS[\eta + \mu] + 2S(\eta + \mu, w)]$$

とおく。 $\mathcal{S}_{S,k}(\underline{\Gamma})$  を、 $\{\theta_\mu(z, w) \mid \mu \in L_0^*/L_0\}$  を basis にし  
 て展開することによって、weight  $k - \frac{m}{2}$  のベクトル値尖点形  
 式が得られる。すなわち、

$$\mathcal{S}_{S,k}(\underline{\Gamma}) \cong \mathcal{S}_{k - \frac{m}{2}}(SL_2(\mathbb{Z}); U_S),$$

ここで右辺の  $U_S$  は  $\tau - \tau$  の変換公式からきまる  $|L_0^*/L_0|$  次  
 のユニタリ行列。

1-2 Hecke 環:  $p$  を素数とし、 $\underline{G}_p = \underline{G}_{\mathbb{Q}_p}$ ,  $\underline{K}_p = \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ ,  
 $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}_p}$  とおく。 $\chi = \prod_v \chi_v$  を  $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$  の指標で  $\chi_\infty(x) = e[x]$   
 と取るものとする。新谷先生により  $\underline{G}_p$  の Hecke 環が、

$$\underline{\mathcal{H}}_{S,p} = \left\{ \phi: \underline{G}_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{be } \underline{K}_p\text{-invariant} \\ \phi((0, 0, \beta)g) = \chi_p(\beta S \beta) \phi(g) \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p \setminus \text{supp } \phi = \text{compact} \end{array} \right\}$$

と定義されてくる (積は、 $Z_p \setminus \mathbb{Q}_p$  上の convolution)。

以下、" $L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$  が  $S$  に関し maximal integral lattice for  $\forall p$ " を仮定する。

$$L'_{0,p} = \{ x \in L_{0,p}^* \mid S[x] \in P^{-1}\mathbb{Z}_p \}$$

は、 $L_{0,p}$  を含み、 $L'_{0,p}/L_{0,p}$  は、有限体  $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$  上の vector space となるから、その次元を  $\partial_p$  とあらわす (殆んど  $p \neq 2$  は、 $\partial_p = 0$  である)。 $\nu_p$  は  $S$  の  $\mathbb{Q}_p$  上の Witt index,

$n_{0,p} = m - 2\nu_p$  とし、 $\mathcal{H}_{S,p}$  の特別元  $\phi_{0,p}, \phi_{1,p}$  を

$$\begin{cases} \phi_{0,p} : (0, y, 0) (y \in L'_{0,p}) \text{ の値} = p^{-\partial_p}, \text{ supp} = \mathbb{Z}_p \times_{\mathbb{Z}_p} \{ (0, y, 0) \mid y \in L'_{0,p} \} \times_{\mathbb{Z}_p} \\ \phi_{1,p} : \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \text{ の値} = 1, \text{ supp} = \mathbb{Z}_p \times_{\mathbb{Z}_p} (P \ P^{-1}) \times_{\mathbb{Z}_p} \end{cases}$$

と定義する。容易に、

$$\begin{aligned} \phi_{0,p} * \phi_{1,p} &= \phi_{1,p} * \phi_{0,p} = \phi_{1,p}, \\ \phi_{0,p} &= 1 \text{ if } \partial_p = 0, \quad \phi_{0,p}^2 = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial_p = 1 \\ (1-P^{-1})\phi_{0,p} + P^{-1} & \text{if } \partial_p = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

この2元で生成される  $\mathcal{H}_{S,p}$  の subalgebra を  $\mathcal{H}'_{S,p}$  とおく。

$\lambda_p \in \text{Hom}(\mathcal{H}'_{S,p}, \mathbb{C})$  の L 関数を、

$$\begin{aligned} L_p(\lambda_p; s) &= \left\{ 1 - (\lambda_p(\phi_{1,p}) P^{-(1+\frac{m}{2})} P^{-n_{0,p}/2 + \partial_p} + P^{+(n_{0,p}/2)} P^{-s} + \lambda_p(\phi_{0,p})^{-1} P^{-2s})^{-1} \right. \\ &\quad \times \begin{cases} (1 - \chi_S(p) P^{-s})^{-1} & \text{if } m = \text{偶} \\ 1 & \text{if } m = \text{奇} \end{cases} \\ &\quad \times \begin{cases} 1 & (n_{0,p}, \partial_p) = (2, 1) \text{ or } \partial_p = 0 \\ 1 + p^{s/2 - s} & (n_{0,p}, \partial_p) = (1, 1) \\ 1 - p^{s/2 - s} & = (3, 1) \\ (1 + p^{s/2 - s})(1 - p^{s/2 - s}) & = (3, 2) \\ (1 + p^{s-1})(1 + p^{-s}) & = (2, 2) \\ (1 - p^{s-1})(1 - p^{-s}) & = (4, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

と定義する。ここで  $\chi_S$  は、 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m/2} \det S}) / \mathbb{Q}$  に対応する Dirichlet 指標。

1-3 L関数 :  $\mathcal{O}_{S,k}(\Gamma)$  の元を、 $\mathbb{C}_A$  上の関数とみる。

convolution で、 $\otimes_{p < \infty} \chi'_{s,p}$  が (Petersson 内積に関し) 正規可換に作用している。今、同時固有関数  $f \in \mathcal{O}_{S,k}(\Gamma)$  :

$$f * \phi = \lambda_f(\phi) f \quad \forall \phi \in \otimes_p \chi'_{s,p} \quad \text{に対し}$$

$$\zeta(f; \lambda) = \prod_p L_p(\lambda_f; \lambda) \times \Gamma(1+k-\frac{m+2}{2}) \times \begin{cases} 2^{-\lambda} \pi^{-\frac{3}{2}\lambda} (\det 2S)^{\lambda} & m=\text{偶} \\ (2\pi)^{-\lambda} (2^{-1} \det 2S)^{\lambda} & m=\text{奇} \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} \Gamma(\frac{\lambda+1}{2}) & \text{if } m \equiv 0 \pmod{4} \\ \Gamma(\frac{\lambda}{2}) & \text{if } m \equiv 2 \pmod{4} \\ 1 & \text{if } m \equiv \text{奇} \end{cases} \quad \text{とおく。}$$

この L 関数に対し、次の定理が成立する。

Theorem 1  $k > \frac{m+1}{2}$  とする。  $\zeta(f; \lambda)$  は全  $\lambda$  平面に解析接続され関数等式

$$\zeta(f; \lambda) = \begin{cases} -1 & \text{if } m \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod{8} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \zeta(f; 1-\lambda)$$

をみたす。更に、 $m \not\equiv 6 \pmod{8}$  ならば  $\zeta(f; \lambda)$  は entire であり、 $m \equiv 6 \pmod{8}$  のときは  $\lambda = 0, 1$  で possible simple pole を持つのみである。

## § 2. Oda lifting と Maass space

この節では、Oda [11] で構成される elliptic modular から直交群上の保型形式への lifting を、前節の Jacobi 形式

の言葉を使って言い換える。こうするメリットのひとつは、original versionでは一般には成立しない、*lifting* の単射性が成立することにある。また、Fourier係数を見ると、2次 Siegel の場合の Maass space と同様、部分 Fourier 係数からの持ち上げとなっており、ここがわかる。

2-1 Oda lifting :  $L_0, V_0, S$  等は前節の通りとし、

$$L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_0 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & -2S^{-1} \\ & & \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_1 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_1 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} & & \\ & & Q_1^{-1} \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{とおく。}$$

$G$  を  $\mathbb{Q}$  の直交群  $O(\mathbb{Q})$ ,  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^{m+2} \mid Q_1[\operatorname{Im} z] > 0\}$  とする。 $\mathcal{D}$  は2個の連結成分を持つが、 $z_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$  を含む方を  $\mathcal{D}^+$  と書く。 $G_\infty$  は  $\mathcal{D}^+$  に、

$$g \cdot \widehat{z} = \widehat{g(z)} \cdot J(g, z) \quad \left( \widehat{z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Q_1[z] \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, J(g, z) \in \mathbb{C}^\times \right)$$

と作用し、 $J(g, z)$  は  $G_\infty \times \mathcal{D}^+$  上の  $z \mapsto$  の正則保型因子。

$$\Gamma = G \cap GL(m+4, \mathbb{Z}) \supset \Gamma^* = \{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma-1)L^* \subset L\}$$

とおき、 $S_k(\Gamma), S_k(\Gamma^*)$  とそれぞれ  $\Gamma, \Gamma^*$  に関する weight  $k$  の正則尖点形式の空間をあらわす。各  $F \in S_k(\Gamma^*)$

は、 $F(z) = \sum_{\nu \in L_1^*} a_F(\nu) e[Q_1(\nu, z)]$  と各連結成分上 Fourier 展開される。

上半平面の点  $z = x + iy$  に対し

$$Q_z = xQ + iyR, \quad R = \begin{pmatrix} 1_2 & & \\ & 2S & \\ & & 1_2 \end{pmatrix} \quad \text{とおき、}$$

$V_\infty$  上の急減少関数  $f_z$  を.

$$f_z(v) = Q(\tilde{z}_0, v)^k \in [Q_z[D]] \quad \tau \text{ 定める.}$$

最後に, *lifting* を定義する  $\tau$ - $\rho$  関数を.

$$\theta((z, w), g) = \sum_{\mu \in L^*/L} \theta(z, g; \mu) \theta_{\pi(\mu)}(z, w) \quad \text{とおく.}$$

$$= \tau \quad (z, w) \in \underline{D}_{1, m}, \quad g \in G_\infty \quad \tau,$$

$$\theta(z, g; \mu) = y^{\frac{m+2}{2}} \sum_{\tilde{z} \in L} f_z(g^{-1}(\tilde{z} + \mu)) \quad ,$$

$\pi$  は  $V$  の元の  $V_0$ -成分を対応させる mapping.

Oda [11] の主結果は. 次のように言い直される.

Theorem (Oda)  $k > 2m+4$  とする.

(i)  $f \in \mathcal{G}_{S, k}(\Gamma)$  のとき,

$$\rho f(g) \equiv \int_{\Gamma \setminus \underline{D}} \overline{\theta(z, g)} f(z) y^{k-2} dx dy du dv$$

$$\in S_k(\Gamma^*) \quad (z = (x+iy), u(x+iy)+v)$$

逆に,  $F \in S_k(\Gamma^*)$  のとき,

$$\rho F(z) \equiv \int_{\Gamma^* \setminus G_\infty} \theta(z, g) F(g) dg \in \mathcal{G}_{S, k}(\Gamma).$$

(ii)  $\rho F(z, w)$  は (up to non-zero constant  $\tau$ )

$$\sum_{\substack{\tilde{z} \in L^*/\Gamma^* \\ Q[\tilde{z}] > 0}} \theta_{\pi(\tilde{z})}(z) \in [\frac{1}{2}Q[\tilde{z}]z] \int_{\Gamma_{\tilde{z}}^* \setminus X_{\tilde{z}}} F(x) Q(\tilde{x}, \tilde{z})^{k-(m+2)} \omega(x)$$

と Fourier 展開される.  $\tau = \tau, X_{\tilde{z}} = G_{\tilde{z}}/G_{\tilde{z}} \cap U_\infty \subset \mathcal{D}$ ,

$\omega$  は  $\mathcal{D}$  上の holomorphic  $(m+2)$  form の  $X_{\tilde{z}}$  への引き

戻し,  $U_\infty = \{g \in G_\infty \mid g\langle \tilde{z}_0 \rangle = \tilde{z}_0\}$ .

(iii)  $\mathcal{L}f(z)$  ( $z \in \mathcal{D}^+$ ) は (up to non-zero constant  $\tau$ )

$$\sum_{\substack{\nu = \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} \in L_1^* \\ \sqrt{-1}\nu \in \mathcal{D}^+}} \left\{ \sum_{\substack{r > 0 \\ r^{-1}\nu \in L_1^*}} r^{k-1} a_f(mn/r^2, \alpha r^{-1}) \right\} \in [Q, (\nu, z)]$$

と Fourier 展開される。

Remark • (i) の定義より、 $\rho$  と  $\mathcal{L}$  は、Petersson 内積に関し、互いに他の adjoint になっている。

• (iii) より特に、(original version とは異なり)  $\mathcal{L}$  は injective となっている。

• もうひとつの maximal parabolic subgroup による部分 Fourier 係数は、記号の違いを除き、 $\Theta_{S, k}(\Gamma)$  の元である。直接 (iii) が  $S_k(\Gamma^*)$  に属することを示すこともできる。(cf. [08], [16])

2-2 Maass space : 2次 Siegel の場合にならぬ、

$S_k(\Gamma^*)$  の Maass space  $S_k(\Gamma^*)^{(M)}$  を、

$$S_k(\Gamma^*)^{(M)} = \left\{ F \in S_k(\Gamma^*) \mid a_F \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ r^2 m, r^2 n \in \mathbb{Z}, \alpha r^{-1} \in L_0^*}} r^{k-1} a_F \begin{pmatrix} mn/r^2 \\ \alpha r^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と定義する (original case [08],  $SU(2,2)$  case [06] [03] [17])。

また、形式的にはこれより大きい空間  $S_k(\Gamma^*)^{(F)}$  を、

$$S_k(\Gamma^*)^{(F)} = \left\{ F \in S_k(\Gamma^*) \mid a_F(l \cdot \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix}) = a_F(l \cdot \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \forall \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} : \text{primitive} \right\}$$

と定義。  $S_k(\Gamma)^{(M)} = S_k(\Gamma^*)^{(M)} \cap S_k(\Gamma)$ ,  $S_k(\Gamma)^{(F)} = S_k(\Gamma^*)^{(F)} \cap S_k(\Gamma)$ 。

Proposition  $k > 2m+4$  とする.

$$\begin{array}{ccc}
 S_k(\Gamma^*)^{(M)} & \xrightarrow[\cong]{\simeq} & \mathcal{O}_{S,k}(\Gamma) \\
 \cup & & \cup \\
 S_k(\Gamma)^{(M)} & \cong & \mathcal{O}_{S,k}^+(\Gamma) = \{f \in \mathcal{O}_{S,k}(\Gamma) \mid f * \phi_{0,p} = f \quad \forall p\}
 \end{array}$$

§ 3. 直交群の L 関数

この節では、 $S_k(\Gamma)$  の L 関数を定義するとともに、Eisenstein 級数を用いた積分表示を与える。特に  $S_k(\Gamma)^{(F)}$  の元に対しは、L 関数の関数等式を求める。

3-1 local L 関数の定義 :  $G_p = G_{\mathbb{Q}_p} \supset U_p = G_{\mathbb{Z}_p}$

$G_p$  と  $U_p$  の組で決まる Hecke 環  $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(G_p, U_p)$  について

Satake 同型 ([13]) が成立する。

$$\Phi : \mathcal{H}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \dots, X_{\nu_p+2}^{\pm}]^W$$

(  $\nu_p$  は §1 で述べた  $E$  の  $\mathbb{Q}_p$  上の Witt index,  $W$  は Weyl 群. )

$\lambda_p \in \text{Hom}(\mathcal{H}_p, \mathbb{C})$  に対し、その local L 関数を定義する。

$$L_p(\lambda_p; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_p \left( \Phi^{-1} \left( \prod_{j=1}^{\nu_p+2} (1 - X_j p^{-\lambda})(1 - X_j^{-1} p^{-\lambda}) \right) \right)^{-1}$$

$$\times \begin{cases} 1 & \text{if } (n_{0,p}, d_p) = (0,0), (1,0) \\ (1-p^{-2\lambda})^{-1} & = (2,0) \\ (1-p^{-\lambda})^{-1} & = (2,1) \\ (1-p^{-\lambda})^{-1} (1+p^{1-\lambda}) & = (2,2) \\ (1-p^{-\lambda})^{-1} (1-p^{-1-\lambda})^{-1} & = (4,2) \\ (1+p^{-\frac{1}{2}-\lambda}) & = (1,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-\lambda})^{-1} & = (3,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-\lambda})^{-1} (1+p^{\frac{1}{2}-\lambda}) & = (3,2) \end{cases}$$

ここで、 $\omega_p, \partial_p$  は §1 で定義したものを。

Remark  $\partial_p \neq 0$  なる有限個の  $p$  については、[15] で与えた定義と少し異なる場合がある ( $\lambda_p$  による違い)。

3-2 local Whittaker 関数 :  $\xi \in V_{1,p}$  に対し、

$$\mathcal{W}_\xi \equiv \left\{ W: G_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} W(\pi(x)(1, h)g) = \chi_p(Q, (\xi, x)) W(g) \\ \forall x \in V_{1,p}, \forall g \in G_p, \forall u \in U_p, \forall h \in H(\xi)_p \cap U_p \end{array} \right\}$$

とおく。但し、 $\pi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -xQ_1 & -\frac{1}{2}Q_1[x] \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{Q}_p^\times, h \in O(\mathbb{Q}_p)$  に対し、 $(t, h) = \begin{pmatrix} t & & \\ & h & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix}$  とおいた。また、 $H(\xi)$  は  $\xi$  を固定する  $O(\mathbb{Q}_1)$  の元全体。

$\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_{1,p}^*$ ,  $Q_1[\xi] \neq 0$  とする。任意の  $x \in V_{1,p}$  に対し、 $(p^{-1}, 1)\pi(x)\xi \in L_{1,p}^*$  するとき、 $\xi$  を  $(p^{-1})$  reduced と呼ぶことにする。以下これを仮定し、§2 で定義した  $S_k(\Gamma)^{(M)}$ ,  $S_k(\Gamma)^{(F)}$  の local version にあたるものを導入しておく。

$$\mathcal{W}_\xi^{(F)} \equiv \left\{ W \in \mathcal{W}_\xi \mid W((1, h)g) = W(g) \quad \forall h \in H(\xi) \right\}$$

$$\mathcal{W}_\xi^{(M)} \equiv \left\{ W \in \mathcal{W}_\xi^{(F)} \mid \begin{array}{l} W((p^{n+l}, M_n)) = W((p^{n+l}, M_{n+1})) \\ = p^{-l} W((p^n, M_n)) \quad \forall n, l \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{但し } M_n = \begin{pmatrix} p^{-n} & & \\ & 1 & \\ & & p^n \end{pmatrix}$$

これらは全て  $\chi_p$ -stable である。

Theorem 2  $W \in \mathcal{W}_\xi$ ,  $\phi' * W * \phi = \lambda(\phi') \lambda_p(\phi) W$

for  $\forall \phi \in \mathcal{H}_p, \forall \phi' \in \mathcal{H}(H(\xi)_p, H(\xi)_p \cap U_p)$  とする。このとき、

$$\int_{\mathbb{Q}_p^x} W((t, 1)) |t|_p^{\lambda - \frac{m+2}{2}} d^x t$$

$$= L_p(\lambda; \lambda) \cdot L_p(\lambda'; \lambda + \frac{1}{2})^{-1} \times \begin{cases} 1 & m = \text{奇} \\ (1-p^{-2\lambda})^{-1} & m = \text{偶} \end{cases} \cdot W(1)$$

3-3  $O(1, m+2)$  上の Eisenstein 級数 :  $\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1^*$ ,  
 $\mathbb{Q}_1[\xi] > 0$  とする.  $\xi$  は全  $z$  の  $p$ - $\tau$  reduced としよう.

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t(S\alpha) & a \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -2\underline{\Sigma} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad \text{とおく.}$$

$G'$  を  $\mathcal{Q}'$  の直交群,  $P'$  を  $G'$  の上三角 parabolic subgroup とする.  $H(\mathbb{Z})$  を  $O(\underline{\Sigma})$  と同一視しておく.

$$f: H(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}} \backslash H(\mathbb{Z})_A / H(\mathbb{Z})_{\infty} \prod_p (H(\mathbb{Z})_p \cap U_p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が,  $\otimes_p \chi(H(\mathbb{Z})_p, H(\mathbb{Z})_p \cap U_p)$  の同時固有関数:  $f * \phi' = \lambda(\phi') f$  としよう. Eisenstein 級数を,

$$E(g, \lambda; f) \equiv \sum_{\gamma \in P'_{\mathbb{Q}} \backslash G'_{\mathbb{Q}}} f(\beta(\gamma g)) |\alpha(\gamma g)|_A^{\lambda + \frac{m+1}{2}} \quad \text{と定義.}$$

$$\text{ここで, } G'_A \ni g \text{ を } g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & * & * \\ 0 & \beta(g) & * \\ 0 & 0 & \alpha(g)^{-1} \end{pmatrix} \prod_{\nu} \mu_{\nu} \quad \text{と}$$

岩沢分解した.

Eisenstein 級数の一般論より (cf. [02], [04], [05], [07])

$E(g, \lambda; f)$  は全  $\lambda$ -平面に解析接続さし, 関数等式

$$E(g, \lambda; f) = \frac{\xi(f; \lambda)}{\xi(f; \lambda+1)} \mu(\lambda) \times \begin{cases} 1 & m+1 = \text{偶} \\ \frac{\xi(2\lambda)}{\xi(2\lambda+1)} & m+1 = \text{奇} \end{cases}$$

$$\times E(g, -\lambda; f) \quad \text{をみたす.}$$

ここで、 $\mu(\lambda)$  は、 $\mu(\lambda)\mu(-\lambda) = 1$  をみたす (具体的にわかる)  $\lambda$  の有理式であり、

$$\zeta(f; \lambda) = \prod_p L_p(\lambda_p; \lambda) \times \begin{cases} (2\pi)^{-n\lambda} (2^{-1} \det 2\underline{S})^{A/2} & m=\text{奇} \\ (2\pi)^{-n\lambda} (\det 2\underline{S})^{A/2} & m=\text{偶} \end{cases}$$

$$n = \left[ \frac{m+1}{2} \right] \times \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(\lambda - n + \frac{1}{2} + 2j) & m=\text{奇} \\ \prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda - n + 1 + 2j) \prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda + 2j) & m=\text{偶} \\ \prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\lambda - n + 1 + 2j) \prod_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(\lambda + 2j + 1) & \begin{matrix} n=\text{偶} \\ m=\text{偶} \\ n=\text{奇} \end{matrix} \end{cases}$$

3-4  $S_k(\Gamma)$  の L 関数 :  $G_A = G_{\mathbb{Q}} G_{\infty} \prod_p U_p^*$

( $U_p^* = \{u \in U_p \mid (u-1)L^* \subset L\}$ ) が成立するから、 $S_k(\Gamma)$ ,  $S_k(\Gamma^*)$  とともに  $G_A$  上の関数とみればよい。今、 $F \in S_k(\Gamma)$  が、 $\otimes_p \mathcal{L}_p$  の同時固有関数としよう。F の L 関数を次のように定義する。  $\nu = \left[ \frac{m}{2} \right]$ ,

$$\zeta(F; \lambda) \stackrel{\sim}{=} (2\pi)^{-(\nu+2)\lambda} \begin{cases} (2^{-1} \det 2S)^{A/2} & m=\text{奇} \\ (\det 2S)^{A/2} & m=\text{偶} \end{cases}$$

$$\times \Gamma(4+k-\frac{m}{2}-1) \Gamma(\lambda + \frac{m}{2}) \begin{cases} \prod_{j=0}^{\nu} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2} - \nu + 2j) & m=\text{奇} \\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\lambda - \nu + 2j) \prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\lambda + 2j - 1) & \begin{matrix} m=\text{偶} \\ \nu=\text{偶} \end{matrix} \\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\lambda - \nu + 2j) \prod_{j=0}^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\lambda + 2j) & \begin{matrix} m=\text{偶} \\ \nu=\text{奇} \end{matrix} \end{cases}$$

$$\times \prod_p L_p(\lambda_p; \lambda)$$

各  $\xi \in V_{1, \mathbb{Q}}$  に対し、

$$F_{\xi}(g) = \int_{V_{1, \mathbb{Q}} \setminus V_{1, A}} F(n(x)g) \chi(-Q_1(\xi, x)) dx$$

とおく。今  $\xi$  が全ての  $p$  で reduced だとし、 $f$  を前項のよう

に与る。さらに、

$$W_{F, \xi, f}(g) = \int_{H(\mathbb{Z})_0 \backslash H(\mathbb{Z})_A} F_{\xi}((1, h)g) f(h) dh \quad \text{とおく.}$$

Theorem 3 以上の状況で、次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \int_{G'_0 \backslash G'_A} E^*(g', \lambda - \frac{1}{2}; f) F(g'g_0) dg' \\ &= c \cdot \lambda^*(\lambda)^{-1} \xi(F; \lambda) W_{F, \xi, f}(g_0) \end{aligned}$$

ここで、 $c$  は non-zero constant,  $g_0 \in G'_0$  は  $\xi$  に依存する元,  $\lambda^*(\lambda)$  は、具体的にわかる  $\lambda$  の  $q$  項式,  $\xi$  は

$$E^*(g', \lambda; f) = \xi(f; \lambda + 1) \begin{cases} \xi(2\lambda + 1) & m = \text{偶} \\ 1 & m = \text{奇} \end{cases} E(g', \lambda; f).$$

Remark  $E^*$  の解析的性質より、 $W_{F, \xi, f}(g_0) \neq 0$  なる条件下で、 $\xi(F; \lambda)$  の解析接続が言えたことになる。しかし、関数等式については、 $\xi(f; \lambda)$  のそれが障害となり、一般には難しい。

Corollary  $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$  が Hecke eigen とする。このとき、 $\xi(F; \lambda)$  は全  $\lambda$ -平面に解析接続され、関数等式

$$\xi(F; \lambda) = \begin{cases} -1 & \text{if } m \equiv 5, 7 \pmod{8} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \xi(F; 1 - \lambda)$$

をみたす。possible pole は、 $\lambda = -\frac{m}{2} + j$  ( $0 \leq j \leq m+1$ ) のみであり、そのうち最大の  $\frac{m}{2} + 1$  については高々 simple である。

#### § 4. Maass space の L 関数

この節では、§ 1 でみた Jacobi 形式が Hecke eigen のとき、Oda lifting で持ち上げたものが再び Hecke eigen となること及びその関係を求める。応用として Maass space について、前節 Corollary より詳しい情報が得られる。最後に、 $S_k(\Gamma)^{(F)}$  に於ける Maass space の特徴付けを行う。

Theorem 4  $k > 2m+4$  とする ( $\nu = [\frac{m}{2}]$ )。

$f \in \mathcal{O}_{S,k}^+(\Gamma)$  が  $\otimes_p \mathcal{H}_{S,p}'$ -eigen ならば、 $lf$  は  $\otimes_p \mathcal{H}_p$ -eigen であり、次式が成立する。

$$\zeta(lf; \lambda) = c \cdot \zeta(f; \lambda) \times \begin{cases} \prod_{j=0}^{\nu} \zeta(\lambda + \frac{1}{2} + j) \zeta(\lambda - \frac{1}{2} - j) \prod_{j=0}^{2\nu} (\lambda - \frac{1}{2} - \nu + j) & m = \text{奇} \\ \prod_{j=0}^{2\nu} \zeta(\lambda - \nu + j) \prod_{j=0}^{2\nu-1} (\lambda - \nu + j) & m = \text{偶} \end{cases}$$

(cf.  $Sp(2, \mathbb{R}) \dots [01]$ ,  $SU(2, 2) \dots [03]$ )

Corollary 上と同じ状況に於て、 $\zeta(lf; \lambda)$  は、

$m \neq 6$  (8) ならば高々 simple pole を持つのみであり、 $m \equiv 6$  (8) の場合は、 $\lambda = 0, 1$  で高々 2 位である他では simple pole のみである。

さて、 $E^*(g', \lambda; 1)$  の  $\lambda = \frac{m+1}{2}$  での留数が定数となること及び、 $L$  の adjoint map  $\rho$  の表示 (Theorem Oda (ii)) を使えば、Oda [12] と平行な議論によつて次の定理が証明される。

Theorem 5  $k > 2m+4$ ,  $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$  とする.

$F \in S_k(\Gamma)^{(M)} \iff \exists (F; \lambda)$  が  $\lambda = \frac{m+2}{2}$  での simple pole をもつ.

Remark  $Sp(2, \mathbb{R}) \sim SO(2, 3)$  (cf. [12]),  $SU(2, 2) \sim SO(2, 4)$  (cf. [16]) の場合の例から考えると、上の定理は  $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$  の仮定をなくしても成立することが期待される。

#### References

- [01] A. N. Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture , Inv. Math. 53 (1979), 267-280.
- [02] J. Arthur : Eisenstein series and the trace formula , Proc. Symp. Pure Math. vol.33 (1979), part 1, 253-274.
- [03] V. Gricenko : Maass space for  $SU(2, 2)$ , Hecke algebra and zeta function, in Russian, (preprint).
- [04] Harish-chandra : Automorphic forms on semi-simple Lie groups , Lecture Note in Math. 62, Springer, 1968.
- [05] V. L. Kalinin : Eisenstein series on the symplectic group, Math. USSR-Sb. 32 (1977), 449-476.
- [06] H. Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two , Invent. Math. 69 (1982), 217-227.
- [07] R. P. Langlands : On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Note in Math. 544, Springer, 1976.

- [08] H. Maass : Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III, Invent. Math. 52 (1979), 95-104, 53 (1979), 249-253, 53 (1979), 255-265.
- [09] A. Murase : Jacobi forms に付随するL関数について, 数理解析研究所講究録 583.
- [10] A. Murase : L-functions attached to Jacobi forms of degree  $n$  (preprint).
- [11] T. Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature  $(2, n-2)$ , Math. Ann. 231 (1977), 97-144.
- [12] T. Oda : On the poles of Andrianov L-functions, Math. Ann. 256 (1981), 323-340.
- [13] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over  $p$ -adic fields, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 18 (1963).
- [14] Shintani : unpublished notes.
- [15] T. Sugano : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on  $SO(2, q)$ , Advanced Studies in Pure Math. vol. 7, Kinokuniya, 1985, 333-362.
- [16] T. Sugano: 符号  $(2, 2)$  のユニタリ群のL関数について, 数理解析研究所講究録 583.
- [17] T. Sugano : On the L-functions associated with hermitian modular forms of genus 2 (preprint).