数理解析研究所講究録
617巻 1987年 103-113

Cuspidal automorphic representation に関する Garrett の triple L-function の関数等式について

京大理　池田 保
(Tamotsu Ikeda)

P. B. Garrett [1], [2] は総実代数体上の weight の等しい 'new form' の3つ組に関する triple L-function の解析接続と関数等式を与えた。本稿では彼の結果を拡張し、GL_2 の任意の cuspidal automorphic representation の3つ組に関する triple L-function の解析接続と関数等式を与える。詳しくは現在準備中の論文を参照していただきたい。

§1. 代数的準備

k を体とする。k 上定義された次のような代数群を考える。

$$H = GSp_3, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H \;:\; C = 0_3 \right\}.$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_3 & D \end{pmatrix} \in P \;;\; A = D = \mathbb{1}_3 \right\}$$

$$G = \{ (g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}) \in (GL_2)^3 : \det g^{(1)} = \det g^{(2)} = \det g^{(3)} \}.$$

Z を G の center における単位元の連結成分とする。G の H へのうめこみ ι を、

$$\iota\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & & b_1 & & \\ & a_2 & & & b_2 & \\ & & a_3 & & & b_3 \\ \hline c_1 & & & d_1 & & \\ & c_2 & & & d_2 & \\ & & c_3 & & & d_3 \end{array}\right).$$

と定義する。

P の rational character χ_0, χ_1 を

$$\chi_0\left(\begin{pmatrix} mA & * \\ 0_3 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}\right) = m, \qquad \chi_1\left(\begin{pmatrix} mA & * \\ 0_3 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}\right) = \det A.$$

と定義する。P の modulus character δ は $\chi_0^6 \chi_1^4$ で与えられる。

§2. Eisenstein series.

k を global field とする。k の各素点 v に対して、H_v の極大 compact 部分群 K_v を、

v が non-archimedean の時、$K_v = GSp_3(\mathcal{O}_v)$,

v が real の時、$K_v = GSp_3(\mathbb{R}) \cap O_6$.

v が complex の時．$K_v = GSp_3(\mathbb{C}) \cap U_6$
と定義する。$K = \prod_v K_v$ とおく．この時．$H_v = P_v K_v$, $H(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K$．がなりたつ。

ω を $\mathbb{A}^\times/k^\times$ の任意の quasi-character とする時．$I(\omega, s)$ を．$H(\mathbb{A})$ 上の $\mathbb{C}$-valued function f で次の 1), 2) を満たすもののなすベクトル空間とする。

1) f は右 K 有限．

2) 任意の $p \in P(\mathbb{A})$ に対して

$$f(ph) = \omega(\chi_0\chi_1(p))\,|\delta(p)|_{\mathbb{A}}^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}\, f(h).$$

また．$\tilde{I}(\omega, s)$ を 1), $\tilde{2}$) をみたすもののなすベクトル空間とする。

$\tilde{2}$) 任意の $p \in P(\mathbb{A})$ に対して

$$f(ph) = \omega(\chi_0^{-2}\chi_1^{-1}(p))\,|\delta(p)|_{\mathbb{A}}^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}\, f(h).$$

k の各素点 v に対して．上の定義において $\mathbb{A}^\times/k^\times$, ω, $H(\mathbb{A})$, $P(\mathbb{A})$, K をそれぞれ $k_v^\times$, ω_v, H_v, P_v, K_v でおきかえて得られるものを $I(\omega_v, s)_v$, $\tilde{I}(\omega_v, s)_v$ とする。この時．

$$I(\omega, s) = \bigotimes_v{}' I(\omega_v, s)_v, \qquad \tilde{I}(\omega, s) = \bigotimes_v{}' \tilde{I}(\omega_v, s)_v$$

がなりたつ。

$C(K, \omega)$ を K 上の右有限な $\mathbb{C}$-valued function f で、任意の $p \in P(\mathbb{A}) \cap K$ に対して

$$f(pk) = \omega(\chi_0 \chi_1(p)) f(k)$$

をみたすもののなすベクトル空間とすると、K への制限により、$I(\omega, s) \simeq C(K, \omega)$.　$\tilde{C}(K, \omega)$ も同様に定義すれば、$\tilde{I}(\omega, s) \simeq \tilde{C}(K, \omega)$.

$I_{w_3} : I(\omega, s) \longrightarrow \tilde{I}(\omega, 1-s)$ を次のように定義する。$f \in I(\omega, s)$ に対して、

$$I_{w_3} f(h) = \int_{U(\mathbb{A})} f(w_3 u h)\, du.$$

ただし、$w_3 = \begin{pmatrix} 0_3 & 1_3 \\ -1_3 & 0_3 \end{pmatrix}$.　$U(\mathbb{A})$ の Haar measure du は $\mathrm{Vol}\,(U(\mathbb{A})/U(k)) = 1$ となるよう定める。

この積分は $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ の時、絶対収束し、I_{w_3} は $C(K, \omega) \to \tilde{C}(K, \omega)$ という operator とみて全 s-平面に解析接続できる。

また、k の各素点 v に対して $I_{w_{3,v}}$ を同様の積分で定義すれば、$I_{w_3} = \bigotimes_v' I_{w_{3,v}}$ がなりたつようにできる。

$f \in I(\omega, s)$ または $f \in \tilde{I}(\omega, s)$ の時、Eisenstein series $E(h; f)$ は $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ の時、絶対収束する級数

$$E(h;f) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash H(k)} f(\gamma h).$$

で定義され．全s-平面に解析接続される。また次の関数等式がなりたつ。

$f \in I(\omega, s)$ に対して，$E(h; I_{\omega, s} f) = E(h; f)$.

§3. Rankin-Selberg convolutions

kを global field，π_i $(i=1,2,3)$ を$GL_2(\mathbb{A})$の cuspidal automorphic representation，φ_i を π_i に属する cusp form，ω_i を π_i の central quasi-character，$\omega = \omega_1\omega_2\omega_3$ とする。

$\mathbb{A}/k$ の additive character ψ を固定する。π_i の ψ に関する Whittaker model を $\mathcal{W}(\pi_i, \psi)$ とする。

φ_i はある $W_i \in \mathcal{W}(\pi_i, \psi)$ を用いて

$$\varphi_i(g) = \sum_{\alpha \in k^\times} W_i\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right).$$

と展開される。

$f \in I(\omega, s)$ または $f \in \tilde{I}(\omega, s)$ に対して Rankin-Selberg 型の積分

$$\int_{Z(\mathbb{A})G(k)\backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g)\,;f)\prod_{i=1}^{3}\varphi_i(g^{(i)})\,dg \qquad (2.1)$$

を考える。

Lemma. 1. $P(k)\backslash H(k)/\iota(G(k))$ の完全代表系として次の5個がとれる。

$$\eta_0=\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{array}\right),\qquad \eta_1=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & -1 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 1 \end{array}\right),$$

$$\eta_2=\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right),\qquad \eta_3=\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ \hline 1 & & 1 & & & \\ & & & -1 & & 1 \\ & & & & 1 & \end{array}\right),\qquad \eta_4=\mathbb{1}_6.$$

$R_j=\iota^{-1}(\eta_j^{-1}P\eta_j)$, $(0\leq j\leq 4)$. とおけば. $j=1,2,3,4$ の時. R_j は G のある proper parabolic subgroup の unipotent radical を正規部分群にもつ.

この Lemma により. $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ ならば.

$$(2.1)=\int_{Z(\mathbb{A})N_0(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(\eta_0\,\iota(g))\prod_{i=1}^{3}W_i(g^{(i)})\,dg$$

がなりたつことが証明できる。ここで.

$$N_0=\left\{\left(\begin{pmatrix}1&n_1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&n_2\\0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&n_3\\0&1\end{pmatrix}\right)\in G\ ;\ n_1+n_2+n_3=0\right\}.$$

$f=\prod_v f_v$, $W_i=\prod_v W_{i,v}$ であれば、この積分は次の無限積に等しい。

$$\prod_v \int_{Z_v N_{0,v}\backslash G_v} f_v(\eta_0 \iota(g_v)) \prod_{i=1}^{3} W_{i,v}(g_v^{(i)})\, dg_v .$$

v が non-archimedean で、$\pi_{i,v}$ がすべて class 1 の時、ϖ_v を k_v の素元，q_v を剰余体の位数とし、$f_v \in I(\omega_v, s)_v$, $W_{i,v} \in \mathcal{W}(\pi_{i,v}, \psi)$ を $f_v|_{K_v} \equiv 1$, $W_{i,v}|_{GL_2(\mathcal{O}_v)} \equiv 1$ ととる時、

$$\int_{Z_v N_{0,v}\backslash G_v} f_v(\eta_0 \iota(g_v)) \prod_{i=1}^{3} W_{i,v}(g_v^{(i)})\, dg_v$$

$$= (1-\omega_v(\varpi_v) q^{-2s-1})(1-\omega_v^2(\varpi_v) q^{-4s})\, L(s, \pi_1\times\pi_2\times\pi_3)_v$$

ここで、$L(s, \pi_1\times\pi_2\times\pi_3)_v$ は、$\pi_{i,v}=\pi(\mu_i, \nu_i)$, μ_i, ν_i は $k_v^\times$ の unramified character、とする時、

$$\underbrace{(1-\mu_1\mu_2\mu_3(\varpi_v)\, q^{-s})^{-1} \cdots\cdots (1-\nu_1\nu_2\nu_3(\varpi_v)\, q^{-s})^{-1}}_{8\text{個}}$$

で与えられる。

注意. Garrett は同様の結果を $GL_2(k)$ の cusp form $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ に対してだけでなく、次の場合にも得ている。

1) $GL_2(F)$ の cusp form φ_1 と $GL_2(k)$ の cusp form φ_2. ここで F は k の総実な 2 次拡大.

2) $GL_2(K)$ の cusp form φ_1. ここで K は k の総実な 3 次拡大.

§ 4. 主定理.

k_v を local field, ψ_v を k_v の additive character, $\pi_{i,v}$ $(i=1,2,3)$ を $GL_2(k_v)$ の既約な admissible representation, とする。

$f_v \in I(\omega_v, s)_v$, $W_{i,v} \in \mathcal{W}(\pi_{i,v}, \psi_v)$ に対して

$$\Psi_s(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) = \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} f_v(\eta_0 \iota(g_v)) \prod_{i=1}^{3} W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

$$\tilde{\Psi}_s(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) = \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} I_{\omega_{3,v}} f_v(\eta_0 \iota(g_v)) \prod_{i=1}^{3} W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

と定義する。

定理 1. $\Psi_s(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})$, $\tilde{\Psi}_s(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})$ は $C(K_v, \omega_v) \times \prod_{i=1}^{3} \mathcal{W}(\pi_{i,v}, \psi_v)$ の上の 4 重線型形式として全 s-平面に meromorphic に解析接続される。$\pi_{1,v}$, $\pi_{2,v}$, $\pi_{3,v}$, ψ_v のみに依存する s の有理型関数 $\varepsilon'(s, \pi_{1,v}, \pi_{2,v}, \pi_{3,v}, \psi_v)$ があって

$$\widetilde{\Psi}_s(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) = \varepsilon'(2s-2, \omega_v, \psi_v)^{-1}\varepsilon'(4s-3, \omega_v^2, \psi_v)^{-1}$$
$$\times\, \varepsilon'(s, \pi_{1,v}\times\pi_{2,v}\times\pi_{3,v}, \psi_v)$$
$$\times\, \Psi_s(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})$$

がなりたつ.

ここで 右辺の最初の2つのε'は $k_v^\times$ のquasi-character に対するε'因子で. χを$k_v^\times$ のquasi-character とする時. k_v上の任意の Schwartz-Bruhat function Φに対して

$$\int_{k_v^\times}\hat{\Phi}(x)\chi^{-1}(x)|x|_v^{1-s}d^\times x = \varepsilon'(s, \chi, \psi_v)\int_{k_v^\times}\Phi(x)\chi(x)|x|_v^{s}d^\times x.$$

がなりたつものとして定義される。ただし. $\hat{\Phi}$はΦのψ_vに関する Fourier 変換.

定理2. $k_v^\times$ の quasi-character μ_v, ν_v があって. $\pi_{1,v}$ が$\pi(\mu_v, \nu_v)$の subquotient になっている時.

$$\varepsilon'(s, \pi_{1,v}\times\pi_{2,v}\times\pi_{3,v}, \psi_v) = \varepsilon'(s, (\mu_v\otimes\pi_{2,v})\times\pi_{3,v}, \psi_v)$$
$$\times\,\varepsilon'(s, (\nu_v\otimes\pi_{2,v})\times\pi_{3,v}, \psi_v).$$

がなりたつ. ここで右辺のε'は Jacquet [3] の定義した GL_2

$\times GL_2$ の ε' 因子。

k を global field, π_i を $GL_2(\mathbb{A})$ の既約な cuspidal automorphic representation とする。

k の素点の有限集合 S を.

1) S は archimedean place をすべて含む.
2) $v \notin S$ ならば. $\pi_{i,v}$ は class 1.
3) $v \notin S$ ならば. ψ_v は order 0.

が満たされるように定める。

$L_S(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3) = \prod_{v \notin S} L(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)_v$ と定義する。

π_i の contragredient representation を $\tilde{\pi}_i$ とする。

定理3. $L_S(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)$ は全 s-平面に有理型関数として解析接続され. 次の関数等式をみたす。

$$L_S(1-s, \tilde{\pi}_1 \times \tilde{\pi}_2 \times \tilde{\pi}_3) \prod_{v \in S} \varepsilon'(s, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v)$$

$$= L_S(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3).$$

例 $k_v = \mathbb{R}$. $\psi_v(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$. $\pi_{i,v}$ を weight k_i の holomorphic cusp form から生成される automorphic representation の $\mathbb{R}$-component とすると.

$$\mathcal{E}'(s, \pi_{1,v}\times\pi_{2,v}\times\pi_{3,v}, \psi_v) = (-1)^{k_1+k_2+k_3+1}(2\pi)^{8s-8-4(k_1+k_2+k_3)}$$

$$\times\frac{\Gamma(k_1+k_2+k_3-2-s)\,\Gamma(k_2+k_3-1-s)\,\Gamma(k_1+k_3-1-s)\,\Gamma(k_1+k_2-1-s)}{\Gamma(s)\,\Gamma(s+1-k_1)\,\Gamma(s+1-k_2)\,\Gamma(s+1-k_3)}.$$

References.

1. P. B. Garrett, Decomposition of Eisenstein series; Rankin triple products, Univ. of Minesota Math. Report.

2. ———, Integral representation of certain L-functions, attached to one, two, and three modular forms, to appear.

3. H. Jacquet, Automorphic forms on GL_2. II, LN 278

4. R. P. Langlands, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, LN 544.

5. I. I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, L-functions for classical groups, to appear.

6. T. Satoh, Some remarks on special values of triple L-functions, to appear.

7. T. Ikeda, in preparation.