

不分岐主系列表現のある既約成分に付随した L-factor

東北大理 渡部隆夫  
(Takao Watanabe)

Jacquet - Langlands が [8] において  $GL_2$  の保型表現論を展開した際に、その local theory の部分で、Whittaker 関数による "zeta - integral" を導入した。そして、L-factor  $L(s, \pi)$  をそれらの "greatest common divisor" として岩沢 - Tate の論法で構成し、関数方程式を証明した。ここでは、一般の unramified group  $G$  の不分岐主系列表現の constituent で Whittaker model を持つようなものに対して、同じ論法により L-factor を構成する。具体的に以下のことを行おう。

(I) regular unramified character  $\chi$  から誘導された不分岐主系列表現  $I(\chi)$  を既約分解し、それから Whittaker model  $Wh(\chi, \varphi)$  を持つ constituent を取り出す。

(II)  $G$  に対応する L-group  ${}^L G$  (finite Galois form) の有限次元既約表現の同値類  $\mathcal{R}({}^L G)$  の parametrization を与える。

(III)  $\gamma \in \mathcal{R}({}^L G)$ ,  $f \in Wh(\chi, \varphi)$ ,  $s \in \mathbb{C}$  に対して "zeta - integral"  $Z(s, \gamma, f)$  を定義し、それらの "G.C.D" として

$L$ -factor  $L(s, r, \chi)$  を構成する。

(IV)  $L(s, r, \chi)$  を Langlands によって定義された  $L$ -factor  $L(s, r, \text{Sp}(n))$  と比較する。

$G$  が split 群 (特に classical type) で,  $r$  が  $G$  の natural 表現のとま, (I), (III), (IV) は Rodier [10], [11] の中で考察されている。

記号:  $F$  を normalized valuation  $v_F$  を持つ non-archimedean local field とし,  $\varpi_F$  を  $F$  の prime element,  $e_F$  を  $F$  の剰余体の位数とする。  $G$  を  $F$  上定義された連結 reductive 代数群で,  $F$  上 quasi-split かつ  $F$  の不分岐拡大で split するものとする。  $G$  の minimal splitting field を  $E$  とおく。  $B$  を  $G$  の Borel 部分群,  $T$  を  $B$  に含まれる極大トーラス,  $S$  を  $T$  に含まれる極大  $F$ -split トーラスとし, これらはいずれも  $F$  上定義されているとする。  $G, B, \dots$  の  $F$  有理点のなす群は,  $G(F), B(F), \dots$  とおかれ, これらには,  $F$  上の誘導される位相を入れる。 また,  $X^*(S) = \text{Hom}(S, \mathbb{G}_m)$ ,  $X_*(S) = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, S)$  とし,  $\Phi = \Phi(G, S)$  を  $S$  に関する  $G$  の root system とする。  $B$  に関する  $\Phi$  の基を  $\Delta = \Delta(G, S)$  とし, したがって,  $C^+$  を  $V = X^*(S) \otimes \mathbb{R}$  の中の dominant Weyl chamber,  $W_H(S)$  を relative Weyl 群とする。  $T$  に対して同様に,  $X^*(T), X_*(T), \Phi(G, T)$  を定義

する。今、 $V$  の中の始点  $0$  の開半直線  $a$  で重の元を含まないものを root ray と呼ぶ、その全体を  $\mathcal{R}$  とかく。  $a \in \mathcal{R}$  に対して、 $a$  に含まれる non-divisible root (resp. non-multipliable root) を  $\sigma(a)$  (resp.  $\tau(a)$ ) とかく。  $\sigma(a) \neq \tau(a)$  のとき、 $a$  を plural と呼ぶ。  $\{\tau(a) \mid a \in \mathcal{R}\}$  は reduced root system で、これに対応する coroot system を  $\mathcal{R}^\vee$  とおき、 $\tau(a)$  に対応する coroot を  $a^\vee$  とかく。

### §1. 不分岐主系列表現の既約分解

$T_0$  を  $T(F)$  の極大コンパクト部分群とする。 unramified character  $\chi \in \text{Hom}(T(F)/T_0, \mathbb{C}^\times)$  に対して、 $\omega \in N_H(S)$  を  $\chi^\omega(t) = \chi(\omega^{-1}t\omega)$  で作用させる。ここで、 $\omega$  は  $\omega \in N_H(S)(F)$  ( $N_H(S)$  は  $S$  の  $H$  での normalizer) の中の代表元である。任意の  $\omega \in N_H(S)$ ,  $\omega \neq 1$  に対して、 $\chi^\omega \neq \chi$  なるのは、 $\chi$  は regular であるという。  $T(F)$  の unramified regular character の有る集合を  $\chi_{\text{reg}}(T)$  とする。さて、 $B$  の unipotent radical を  $U$  とするとき、 $\chi \in \text{Hom}(T(F)/T_0, \mathbb{C}^\times)$  を  $U(F)$  上 trivial とする。これによって、 $B(F)$  上の character に拡張する。そして、 $\chi$  による誘導表現  $I(\chi) = \text{Ind}_{B(F)}^{G(F)} \chi$  を考える。即ち、

$$I(\chi) = \left\{ f: G(F) \rightarrow \mathbb{C} ; \begin{array}{l} f \text{ is locally constant} \\ f(bg) = \delta_B \chi(b) f(g) \quad (\forall b \in B(F), \forall g \in G(F)) \end{array} \right\}$$

(ここで  $\delta_B^2$  は  $B(F)$  の modulus character) で,  $G(F)$  は  $\Gamma(\lambda)$  上右移動で作用する。  $\Gamma(\lambda)$  は  $G(F)$  の admissible 表現で, Jordan-Hölder 列を持つことが知られている。  $\Gamma(\lambda)$  の constituent 全体の集合を  $JH(\lambda)$  とおく。ここでは,  $\Gamma(\lambda) : \chi \leftarrow \chi_{\text{reg}}(T)$  の既約分解を与える。まず, 次の事実が良く知られている。

$\chi \leftarrow \chi_{\text{reg}}(T)$  のとき

$$(1.1) \quad \dim \text{Hom}_{G(F)}(\Gamma(\lambda), \Gamma(\lambda^\nu)) = 1 \quad (\forall \nu \in \nu_G(s))$$

(1.2)  $\Gamma(\lambda)$  の任意の constituent は重複度 1 を持つ。

$$(1.3) \quad JH(\lambda) = JH(\lambda^\nu) \quad (\forall \nu \in \nu_G(s))$$

(1.4)  $\Gamma(\lambda)$  の既約 subrepresentation は unique に決まる。

次に, Casselman による既約性の判定条件を述べる。  $a \in \mathfrak{a}$  に対して,  $\alpha \in \mathfrak{a}(G, T) : \alpha|_s = \sigma(a)$  なる absolute root  $\alpha$  をとり,  $\Gamma_\alpha = \{ \tau \in \text{Gal}(E/F) \mid \tau(\alpha) = \alpha \}$ ,  $\mathcal{L}(a) = (\text{Gal}(E/F); \Gamma_\alpha)$  とおく。  $\mathcal{L}(a)$  は  $\alpha$  の取り方に依存しない。更に,  $a$  が plural のとき,  $\varepsilon(a) = (\mathcal{L}(a)/2) + \pi(\log 2_F)^{-1} \sqrt{-1}$  とおく。

( $a$  が plural のとき,  $\mathcal{L}(a)$  は必ず偶数になる。) すると,

$\chi \leftarrow \chi_{\text{reg}}(T)$  に対して,

$$H(\chi) = \left\{ a^\nu \in \mathfrak{a}^\nu ; \begin{array}{l} a : \text{plural のとき} \quad \chi \circ a^\nu = 1 \cdot |_F^{\mathcal{L}(a)} \text{ or } 1 \cdot |_F^{\varepsilon(a)} \\ a : \text{non-plural のとき} \quad \chi \circ a^\nu = 1 \cdot |_F^{\mathcal{L}(a)} \end{array} \right\}$$

とおく。このとき,

Theorem (Casselman)  $\chi \in X_{\text{reg}}(T)$  に対して,  $\Gamma(\chi)$  が既約であるための必要十分条件は,  $H(\chi) = \phi$  となることである。

かいてる。従って,  $H(\chi) \neq \phi$  の場合が問題となる。今, 次のような集合を考える。

$$C(\chi) = \left\{ V - \bigcup_{\alpha \in H(\chi)} \text{Ker } \alpha^\vee \text{ の連結成分 } \right\}$$

ここで,  $\alpha^\vee$  は pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s : X^+(S) \times X_+(S) \rightarrow \mathbb{Z}$

により,  $V$  上の linear functional とみることに注意する。

よって, map  $P : C(\chi) \rightarrow \Gamma H(\chi)$  を以下のように定義する。

$D \in C(\chi)$  に対して,  $\omega \in \omega_H(S)$  を  $\omega \cdot C \subset D$  となる

ようにとり,  $P(D)$  を  $\Gamma(\chi^\vee)$  の既約 subrepresentation とする。

(1.3), (1.4) より, これは unique に定まり,  $\Gamma H(\chi)$  に属す。

更に,  $P(D)$  は  $\omega$  の取り方に依存しないことが証明できる。

これについて, 次のかいてる。

Theorem A (i)  $P$  は全単射である。

(ii)  $H(\chi)$  の元の  $\mathbb{Z}$ -係数一次結合で表わせる  $\mathbb{Z}^\vee$  の元の集合を

$\langle H(\chi) \rangle$  とおけば,  $\langle H(\chi) \rangle$  は  $\mathbb{Z}^\vee$  の subsystem で, 適当な order

で,  $H(\chi)$  は  $\langle H(\chi) \rangle$  の基となる。特に  $H(\chi)$  の元は, 1次独立

だから,  $|\Gamma H(\chi)| = 2^{|\langle H(\chi) \rangle|}$ ,  $|H(\chi)| \leq (\chi \text{ の semi-simple F-rank})$

が成り立つ。

(iii)  $D_X = \bigcap_{\alpha \in H(X)} (\alpha^\vee)^{-1}(\mathbb{R}_+) \in C(X)$  とおく。このとき、 $P(D)$  が Whittaker model を持つための必要十分条件は、 $D = D_X$  となることである。

## §.2 ${}^L\Gamma$ の有限次元既約表現の分類

$(G, B, T)$  に対する based root datum の dual に対する  $\mathbb{C}$  上の連結 reductive 代数群を  $({}^L\Gamma^\circ, {}^L\mathcal{B}^\circ, {}^L\mathcal{T}^\circ)$  とおく。 $\Gamma = \text{Gal}(E/F)$  は巡回群であるから、その生成元  $\sigma$  を 1 つ固定する： $\Gamma = \langle \sigma \rangle$ 。ここでは、 $L$ -group として、finite Galois form  ${}^L\Gamma = {}^L\Gamma^\circ \rtimes \Gamma$  をとる。

${}^L\Gamma^\circ$  (resp.  ${}^L\Gamma$ ) の有限次元既約有理表現の同値類の集合を  $\mathcal{R}({}^L\Gamma^\circ)$  (resp.  $\mathcal{R}({}^L\Gamma)$ ) とおく。 $\Lambda$  を  $X^*({}^L\mathcal{T}^\circ)$  の中の dominant weight の集合とすれば、 $\Lambda$  は  $\Gamma$ -不変で、Cartan - Weyl の定理から、全単射  $\Lambda \ni \lambda \mapsto R_\lambda \in \mathcal{R}({}^L\Gamma^\circ)$  がある。今、 $R_\lambda$  に対して、 $\gamma \in \Gamma$  を

$$(2.1) \quad \gamma R_\lambda(\varphi) = R_\lambda(\gamma \varphi) \quad (\varphi \in {}^L\Gamma^\circ)$$

で作用させる。このとき、 $\gamma R_\lambda$  の highest weight は  $\gamma \lambda$  となる。 $\Lambda/\Gamma$  を  $\Lambda$  の中の  $\Gamma$ -orbit の集合とし、 $[\lambda] = \Gamma \cdot \lambda \in \Lambda/\Gamma$  を 1 つの orbit とする。 $\ell = \# [\lambda]$  とおく。(2.1) より、 $R_\lambda, \sigma R_\lambda \cong R_{\sigma \lambda}, \dots, \sigma^{\ell-1} R_\lambda \cong R_{\sigma^{\ell-1} \lambda}$  は共通の表現空間  $V_\lambda$  を持つとしてよい。また、 $R_\lambda, \sigma^\ell R_\lambda$  は、 $V_\lambda$  の中で、共通の

highest weight space  $V_\lambda^0$  を持つ。この  $\chi$  は

$$(2.2) \quad \exists! Q_0 \in \text{Hom}_{\mathcal{L}\mathfrak{h}_0}(R_\lambda, \sigma^\ell R_\lambda) \quad \text{s.t.} \quad Q_0|_{V_\lambda^0} = 1_{V_\lambda^0}$$

が成り立つ。更に、 $\forall \gamma \in \Gamma$  に対して、容易に

$$Q \cdot Q_0 = \text{Hom}_{\mathcal{L}\mathfrak{h}_0}(R_\lambda, \sigma^\ell R_\lambda) = \text{Hom}_{\mathcal{L}\mathfrak{h}_0}(R_{\gamma\lambda}, \sigma^\ell R_{\gamma\lambda})$$

(as subspaces of  $\text{End}_{\mathbb{C}}(V_\lambda)$ ) であることがわかる。特に、 $Q_0$

は、本質的には、orbit  $[\lambda]$  の代表元の取り方に依存しない。

$$\text{今、} A_{[\lambda]} = \{ \sum_{1 \leq k \leq |\Gamma|/\ell} \zeta_k Q_0 \mid \zeta_k = \exp(2\pi\sqrt{-1}k/\ell) \}$$

と置く。  $Q \in A_{[\lambda]}$  とし、 $\mathcal{L}\mathfrak{h}_0 \rtimes \langle \sigma^\ell \rangle$  の表現

$$(R(\lambda, \theta), V_\lambda) \text{ を、} R(\lambda, \theta)(g \rtimes \sigma^k) = R_\lambda(g) \cdot Q^k \text{ で定}$$

義する。これは、well-defined で明らかなに既約である。よって、

$$P(\lambda, \theta) = \text{Ind}_{\mathcal{L}\mathfrak{h}_0 \rtimes \langle \sigma^\ell \rangle}^{\mathcal{L}\mathfrak{h}} R(\lambda, \theta) \text{ によって } \mathcal{L}\mathfrak{h} \text{ の表現を得}$$

る。以下の主張は、表現論の standard な論法で証明される。

$$(2.3) \quad P(\lambda, \theta)|_{\mathcal{L}\mathfrak{h}_0 \rtimes \langle \sigma^\ell \rangle} \cong \bigoplus_{k=0}^{\ell-1} R(\sigma^k \lambda, \theta)$$

これから特に、 $P(\lambda, \theta)$  は、orbit  $[\lambda]$  の代表元の取り方に依存しないことがわかる。以下  $P(\lambda, \theta)$  を  $P([\lambda], \theta)$  と置く。

$$(2.4) \quad P([\lambda], \theta) \text{ は既約である。}$$

$$(2.5) \quad P([\lambda_1], \theta_1) \cong P([\lambda_2], \theta_2) \iff [\lambda_1] = [\lambda_2], \text{ および } \theta_1 = \theta_2$$

以上により、我々の次の写像を定義する。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P} : \coprod_{[\lambda] \in \Lambda/\Gamma} A_{[\lambda]} & \longrightarrow & \mathcal{R}(\mathcal{L}\mathfrak{h}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\lambda, \theta) & \longrightarrow & (P([\lambda], \theta) \text{ を含む同値類}) \end{array}$$

よして、更に次が証明できる。

(2.6)  $\tilde{P}$  は全単射である。

結果として、 $\mathcal{R}(L_f)$  の元が parametrize される。最後に、いくつかの記号を導入する。 $\gamma = \tilde{P}([\lambda], \sum_{i=1}^k \theta_i) \in \mathcal{R}(L_f)$  で  $\alpha_0$  は (2.2) で  $\gamma$  を表すものとする。

$$l(\gamma) = \#\lambda, \quad m(\gamma) = 2\pi(\log b_\gamma)^{-1} \sqrt{-1} k / |\tau|$$

$$\xi_\gamma = \sum_{\lambda \in [\lambda]} \lambda_1$$

よちく。  $\xi_\gamma$  は  $\chi^*(L_{T_0})^\Gamma = \chi_*(T)^\Gamma = \chi_*(S)$  に属する。また

$$\mathcal{R}_0(L_f) = \{ \gamma \in \mathcal{R}(L_f) \mid \langle \alpha, \xi_\gamma \rangle_s = 0 \text{ for } \forall \alpha \in \Delta \}$$

$$\mathcal{R}_+(L_f) = \mathcal{R}(L_f) - \mathcal{R}_0(L_f)$$

よちく。

### §.3 L-factor の構成.

以下、 $F$  の標数は 0 と仮定する。

$U(F)$  の non-degenerate character  $\varphi$  を固定する。 $X \in X_{\text{reg}}(T)$  に対して、Theorem A (iii) から、 $P(bX)$  の  $\varphi$  に関する Whittaker model  $Wh(X, \varphi)$  が存在する。今、 $\gamma \in \mathcal{R}(L_f)$ ,  $f \in Wh(X, \varphi)$ ,  $s \in \mathbb{C}$  に対して、“zeta-integral” を

$$(3.1) \quad \zeta(s, \gamma, f) = \int_{F^\times} f(\xi_\gamma(t)) |t|_F^s \delta_B^{-1}(\xi_\gamma(t)) dt$$

で定義する。こゝには、 $G = GL_2$  で  $\gamma$  が  $L_f = GL_2(\mathbb{C})$  の自然な表現のとき、Jacquet-Langlands の定義と一致する。さて、

積分の収束性に関して次がいえろ。

Theorem B  $t \in \mathcal{R}_+(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$  有るに、任意の  $f \in \mathcal{W}h(\mathcal{X}, \varphi)$  に対し、(3.1)の積分は、 $\operatorname{Re} s \gg 0$  で絶対収束する。

この結果の証明の key point は次の事実である。まず、 $F$  上 locally constant で compact support を持つ関数全体を  $C_c(F)$  とし、また、 $\mathcal{W}(\mathcal{X}) = \{w \in \mathcal{W}h(s) : w^{-1}(c) \subset D_x\}$  とおく。このとき、

(3.2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } t \in \mathcal{R}_+(\mathcal{L}(\mathcal{G})) \text{ と任意の } f \in \mathcal{W}h(\mathcal{X}, \varphi) \text{ に対して、関} \\ \text{数の family } \{\phi_w \in C_c(F) : w \in \mathcal{W}(\mathcal{X})\} \text{ で} \\ f(\mathcal{I}_r(t)) = \sum_{w \in \mathcal{W}(\mathcal{X})} \phi_w(t) \delta_B \chi^w(\mathcal{I}_r(t)) \quad (t \in F^\times) \\ \text{と有るものがとれる。} \end{array} \right.$

が成立する。(3.2)にさういふ一般化的形で証明される。即ち  $f$  を  $S(F)$  上に制限したもののによって、ある程度その形を決めることができるのである。ここで使われる論法は、Rodier [11] によるものである。Rodier は split 群の場合を取り扱っているが、その方法に quasi-split の場合も適用可能で、ほぼ同じ形で一般化できる。しかし、[11]の Lemma 11 の証明には、gap があり、 $\operatorname{ch}(F) = 0$  の場合は、(quasi-split の範囲で) 修正できるが、 $\operatorname{ch}(F) > 0$  の場合は、正しいかどうか分らない。

もし,  $ch(F) > 0$  のときでも, この Lemma の正しいことが証明  
 できれば, ここで述べたすべての結果は,  $ch(F) > 0$  でも成り  
 立つ。

次に, L-factor を構成する。  $(r, X) \in \mathcal{R}_+(\mathcal{L}_F) \times X_{reg}(T)$  に  
 対して,

$$P(r, X) = \left\{ \begin{array}{l} p(x) \in \mathbb{C}[x] : \\ p(\mathcal{L}_F^{-s}) Z(s, r, t) \text{ は } s \text{ の 整関数} \end{array} \right\}$$

と定める。これは  $\mathbb{C}[x]$  の ideal になる。このとき次が証明  
 できる。

Theorem C. 任意の  $(r, X) \in \mathcal{R}_+(\mathcal{L}_F) \times X_{reg}(T)$  に対して,

$P(r, X)$  は, non-trivial な単項 ideal である。

この結果より,  $P(r, X)$  の生成元  $p_0(x)$  が定数倍を除いて一意  
 に決まる。そこで, L-factor を

$$L(s, r, X) = p_0(\mathcal{L}_F^{-s})^{-1}$$

で定義する。  $L(s, r, X)$  は次のように具体的にかける。今,

集合  $\mathcal{L}(X)$  上に同値関係  $\sim$  を  $v_1 \sim v_2 \iff \chi^{v_1} \cdot \zeta_r = \chi^{v_2} \cdot \zeta_r^n$

で定義し, 同値類の集合を  $\mathcal{L}(X) / \sim$  とかく。このとき,

$$L(s, r, X) = \prod_{v \in \mathcal{L}(X) / \sim} (1 - \chi^v \cdot \zeta_r(\mathcal{O}_F) \mathcal{L}_F^{-s})^{-1}$$

となる。  $L(s, r, X)$  は,  $\mathcal{U}(F)$  の non-degenerate character  $\varphi$  の

取り方に依存しないことも分かる。

### §.4. Langlands' L-factor との比較

§3. で構成した L-factor  $L(s, r, \chi)$  と, Langlands によって定義された L-factor  $L(s, r, \text{Sp}(\chi))$  とを比較する。まず,  $L(s, r, \text{Sp}(\chi))$  の定義から始める。

$K$  を  $G(F)$  の hyperspecial な極大コンパクト群とする。このとき, 各  $\chi \in \text{Hom}(T(F)/T_0, \mathbb{C}^\times)$  に対して,  $T(\chi)$  は唯一つの  $K$ -spherical constituent  $\text{Sp}(\chi)$  をもつ。これにより, 我々の 1:1 対応

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{c} K\text{-spherical 既約表現の同値類} \\ \downarrow \\ [\text{Sp}(\chi)] \end{array} \right\} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{Hom}(T(F)/T_0, \mathbb{C}^\times) / W_H(s) \\ \downarrow \\ W_H(s) \cdot \chi \end{array}$$

をもつ。更に,  $({}^L G^\circ \rtimes \sigma)_{\text{s.s.}} / \text{Int } {}^L G^\circ \in {}^L G^\circ \rtimes \sigma$  の中の  ${}^L G^\circ$ -semi-simple 共役類の集合とすると, 1:1 対応

$$(4.2) \quad \begin{array}{c} \text{Hom}(T(F)/T_0, \mathbb{C}^\times) / W_H(s) \\ \downarrow \\ W_H(s) \cdot \chi \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} ({}^L G^\circ \rtimes \sigma) / \text{Int } {}^L G^\circ \\ \downarrow \\ \nu(\chi) \end{array}$$

が存在する。今,  $r \in \mathcal{R}({}^L G)$  に対して, (4.1), (4.2) から,

$$L(s, r, \text{Sp}(\chi)) = \det(1 - r(\vartheta_X \rtimes \sigma) \& r^{-s})^{-1}$$

と書く。ただし,  $\vartheta_X \rtimes \sigma \in \nu(\chi)$  である。これは, Langlands functoriality によって, Weil 群の  $\text{Sp}(\chi)$  に対応した unramified 表現に付随する Artin-Weil L-factor と一致している。

さて,  $L(s, r, Sp(X))$  と  $L(s, r, X)$  の比較に関する結果は, 次の通りである。

Theorem D. 任意の  $(r, X) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{C}^n) \times X_{\text{reg}}(T)$  に対して,  $X = \mathbb{C}T^S$  の多項式として,  $L(l(r)(s - m(r)), r, X)^{-1}$  は,  $L(s, r, Sp(X))^{-1}$  の subfactor である。ここで,  $l(r), m(r)$  は §2 で定義したものとする。

これは直接の計算で確かめられる。

Corollary  $L(l(r)(s - m(r)), r, X) = L(s, r, Sp(X))$  となるための必要十分条件は,  $r = \tilde{p}([\lambda], \varrho)$  としたとき,  $R_\lambda$  の weight 全体が,  $\{\mu \cdot \lambda \mid \mu \in W(X)/\sim\}$  と一致することである。(この条件は, orbit  $[\lambda]$  の代表元の取り方に依るがよい)

$(r = \tilde{p}([\lambda], \varrho), X)$  が上の条件をみたすとき,  $r$  は自動的に次の条件をみたす。

(4.3)  $\{\mu \cdot \lambda \mid \mu \in W_H(s)\}$  は,  $R_\lambda$  の weight 全体と一致する。一般に, (4.3) をみたす表現  $R_\lambda$  は非常に少ない。(Bourbaki [4], Chap V Ⅲ §7 n°3 参照)。最後に,  $P(D_X)$  と  $Sp(X)$  は, 必ずしも一致しないことを注意する。

## References

- [1] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, Induced representations of reductive  $p$ -adic groups I, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 10 (1977), 441-472.
- [2] A. Borel, Automorphic L-functions, Proc. Sympo. Pure Math. 33, part 2 Amer. Math. Soc. (1979), 27-61.
- [3] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V et VI, Hermann Paris, (1968).
- [4] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres VII et VIII, Hermann Paris, (1975).
- [5] F. Bruhat and J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local II, Publ. Math. I. H. E. S. 60 (1984), 5-184.
- [6] P. Cartier, Representations of  $p$ -adic groups: A survey, Proc. Sympo. Pure Math. 33, part 1 Amer. Math. Soc. (1979), 111-155.
- [7] W. Casselman and J. Shalika, The unramified principal series of  $p$ -adic groups II: The Whittaker function, Compositio Math. 41 (1980), 207-231.
- [8] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on  $GL(2)$ , Lecture Notes in Math. 114 Springer Verlag (1972).
- [9] R. P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms, Lecture Notes in Math. 170 Springer Verlag (1970), 18-86.
- [10] F. Rodier, Décomposition de la série principale des groupes réductifs  $p$ -adiques, Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Lecture Notes in Math. 880 Springer Verlag (1981), 408-424.
- [11] F. Rodier, Sur les facteurs eulériens associés aux sous-quotients des séries principales des groupes réductifs  $p$ -adiques, Journée Automorphes, Publication de l'Université Paris VII, vol. 15 (1982), 107-133.

- [12] F. Rodier, Modèles de Whittaker des représentations admissibles des groupes réductifs  $p$ -adiques quadi-déployés, (preprint).
- [13] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over  $p$ -adic field, Publ. Math. I. H. E. S. 18 (1963), 1-69.
- [14] J. Tits, Reductive groups over local fields, Proc. Sympos. Pure Math. 33 part 1, Amer. Math. Soc. (1979), 29-69.