

保型形式に associate したゼータ函数 $D(s, f, g)$ の値について

— 肥田晴三氏の結果の紹介 —

北大理 前田芽寿 (Yoshitaka Maeda)

自然数 $N \geq 1$ に対して $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 Γ

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\},$$

とおく, $\Gamma_1(N)$ に対する weight k の cusp form の空間 $S_k(\Gamma_1(N))$

とおく. また, modulo N で定義され $\Gamma_1(N)$ 上 Dirichlet character χ

に対して

$$S_k(N, \chi) = \left\{ f \in S_k(\Gamma_1(N)) \mid f \Big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(d) f, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

とおく. 但し

$$\left\{ f \Big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} (z) = f \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) (cz+d)^{-k}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

$l < k$ とする. primitive form $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z) \in$

$S_k(N, \chi)$ と $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \exp(2\pi i n z) \in S_l(N, \psi)$, $b(n) \in \overline{\mathbb{Q}}$,

に対して

$$D_N(s, f, g) = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n, N)=1}}^{\infty} \chi \psi(n) n^{k+l-2s-2} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n) b(n) n^{-s} \right)$$

とおくと, ζ_N は全平面上正則に解析接続され, $l \leq m < k$ なる自然数 m について

$$\frac{\mathcal{D}_N(m, f, g)}{\pi^{2m+1-l} \langle f, f \rangle_N} \text{ は代数的数である}$$

と知られてゐる (G. Shimura: *The special values of zeta functions associated with cusp forms*, *Comm. Pure Appl. Math.* 29 (1976), 783-804). 但 $\langle f, f \rangle_N = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}} |f(z)|^2 y^{k-2} dx dy$, ($z = x+iy$), $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. 本稿では, 上記の値が, m, f, g を変数とする p -進解析函数に interpolate されると云う肥田晴三氏の結果の一部を紹介する. 関連論文は次の通り:

H. Hida: *A p -adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms I, II*, (I: *Invent. math.* 79 (1985), 159-195; II: preprint).

——: *Inwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* 19 (1986), 231-273.

——: *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, *Invent. math.* 85 (1986), 545-613.

§1. p -進 cusp forms, Hecke algebras & ordinary forms.

以下 $p \geq 5$: 素数, $(N, p) = 1$ とし, $\bar{\mathbb{Q}}$ の $\bar{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込みを 1 つ固定しておく.

1° p -進 cusp forms :

有限次拡大 K_0/\mathbb{Q} に対して

$$S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r); K_0) = \left\{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z) \in S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r)) \mid a(n) \in K_0 \right\}$$

とおく ($r \geq 0$). $\bar{\mathbb{Q}}_p$ における topological closure を K とおくと

$$S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r); K) = S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r); K_0) \otimes_{K_0} K$$

とおく. これは K のみで定まり, K_0 の取り方は依らない. 更に, $g = \exp(2\pi i z)$ とおくと, $S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r); K_0)$ の元は ∞ における Fourier 展開により $K_0[[g]]$ の元と見なすことができる. 従って $S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r); K)$ も亦 $K[[g]]$ に埋め込まれる. K の p -進整数環 \mathcal{O}_K に対して

$$S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r); \mathcal{O}_K) = S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^r); K) \cap \mathcal{O}_K[[g]]$$

とおく. 自然数 $j (> 0)$ に対して

$$S^j(\Gamma, (Np^r); K) = \bigoplus_{k=1}^j S_{\mathbb{R}}(\Gamma, (Np^k); K) \subset K[[g]],$$

$$S^j(\Gamma, (Np^r); \mathcal{O}_K) = S^j(\Gamma, (Np^r); K) \cap \mathcal{O}_K[[g]],$$

とし,

$$S(Np^r; K) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ j}} S^j(\Gamma, (Np^r); K) \subset K[[g]],$$

$$S(Np^r; \mathcal{O}_K) = S(Np^r; K) \cap \mathcal{O}_K[[g]]$$

とおく. 更に $\bar{\mathbb{Q}}_p$ における normalized p -adic norm $|\cdot|_p$ (i.e. $|p|_p = \frac{1}{p}$) を使って $|\sum_{n=0}^{\infty} a(n) g^n|_p = \sup_n |a(n)|_p$ とおくと, $S(Np^r; K)$ の

各元は有限な値をとり、この norm $\|\cdot\|$ に関する $S(Np^r; K)$ の完備化 $\bar{S}(Np^r; K)$ とし、

$$\bar{S}(Np^r; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(Np^r; K) \cap \mathcal{O}_K[[\varrho]]$$

とおく。このとき

$$(1) \quad \bar{S}(Np^r; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$$

とある。 $\bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$ の元を p -進 cusp form と云う。次に、自然な埋め込みにより、 $S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset S_2(\Gamma_1(Np^{r+1}); \mathcal{O}_K)$ であるから

$$S_2(Np^\infty; \mathcal{O}_K) = \varinjlim_{r \rightarrow \infty} S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K[[\varrho]]$$

が定義される。 $S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset S^k(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset \bar{S}(Np^r; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$

であるから

$$(2) \quad S_2(Np^\infty; \mathcal{O}_K) \subset \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$$

である。

2° Hecke algebras:

$S_2(\Gamma_1(Np^r))$ 上には Hecke 作用素 $T(n)$ が定義されておき、自然に $S_2(\Gamma_1(Np^r); K)$ 上へ拡張される。また対角的に作用させることにより $S^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$ 上へ、従って $S(Np^r; K)$ 及び $\bar{S}(N; K)$ 上へ拡張される。このとき、 $S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$, $S^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$, $\bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$ はそれぞれ stable とあるので、 $T(n)$ ($n=1, 2, \dots$) により \mathcal{O}_K 上生成される $\text{End}_{\mathcal{O}_K}(S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K))$ (resp. $\text{End}_{\mathcal{O}_K}(S^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K))$) の subalgebra $\mathbb{E} \subset \mathfrak{h}_2(\Gamma_1(Np^r);$

\mathcal{O}_K) (resp. $h^j(\Gamma(Np^r); \mathcal{O}_K)$) とおく. $i < j$ のとき, 制限写像により

$$h^j(\Gamma(Np); \mathcal{O}_K) \longrightarrow h^i(\Gamma(Np); \mathcal{O}_K); \text{ surjection}$$

$$T(n) \longmapsto T(n)$$

が定義される. したがって

$$h(N; \mathcal{O}_K) = \varprojlim_j h^j(\Gamma(Np); \mathcal{O}_K)$$

とおくと, $\bar{\rho}(Np; \mathcal{O}_K)$ 上に作用してゐる.

ここで, $(l, Np) = 1$ とする素数 l に対して,

$$f|l = l \{ f|T(\mathcal{O}^2) - f|T(\mathcal{O}^2) \}$$

と定めると, $S_R(\Gamma(Np^r); \mathcal{O}_K)$, $\bar{\rho}(Np; \mathcal{O}_K)$ 上に

$\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^X]$ の作用を定義し, 更に *endomorphism* として

$$\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^X] \subset h_R(\Gamma(Np^r); \mathcal{O}_K), h(N; \mathcal{O}_K)$$

と存在. $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[1+p\mathbb{Z}_p]]$ とおくと, $\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^X] \cong \Lambda_K \times \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^X]$ があるから, 特には,

(3) $h(N; \mathcal{O}_K)$ は Λ_K -algebra である.

3° ordinary forms:

$$S_R(\Gamma(Np^r)) \ni f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z) \quad (\neq 0) \text{ あり}$$

$$f|T(n) = a(n)f \quad (n=1, 2, \dots)$$

と存在するとき, $f \in$ *normalized eigenform* と云う. 特には $a(1) = 1$ である. 更に

$$r \geq 1 \text{ 且 } |a(p)|_p = 1$$

と仮定し、 $f \in \text{ordinary form (for } p)$ と云う。 $k \geq 2$ の

とき ordinary form f は次の様にして得られる。 まず、 f_0

$\in S_{2r}(Np^r, \chi)$: primitive form with conductor Np^r とする。

更に $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \exp(2\pi i n z)$ とおくと、 $|h(p)|_p = 1$ と仮

定する。 以下のとき

$$(i) \ r \geq 1 \text{ のとき } f = f_0;$$

$$(ii) \ r = 0 \text{ のとき } f = f_0(z) - \beta f_0(pz) \ (\in S_{2r}(\Gamma_1(Np))) ;$$

(但し β は $X^2 - h(p)X + \chi(p)p^{k-1} = 0$ の根で $|\beta|_p < 1$ と仮定する。)

とおくと f は ordinary form と仮定。 次に充分大きい m を

取ると

$$e_j = \lim_{r \rightarrow \infty} T(p)^{j m} \in h^j(\Gamma_1(Np); \mathcal{O}_K)$$

が (m に依らず) 一意に定義される。 また、

$$e = \lim_{j \rightarrow \infty} e_j \in h(N; \mathcal{O}_K)$$

を定義し、 $e^2 = e$ である。 この e により $f \in S_{2r}(\Gamma_1(Np^r))$

($r \geq 1$) : normalized eigenform となる。

$$f : \text{ordinary form} \Leftrightarrow f|e = f$$

と仮定。 $\tau = \tau$

$$h^0(N; \mathcal{O}_K) = e h(N; \mathcal{O}_K),$$

$$\bar{S}^0(N; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)|e, \text{ etc.}$$

と仮定、 ordinary part と云う。 次の等式は成立する。

(4) (i) $h^0(N; \mathcal{O}_K)$ は Λ_K 上 free & finite rank;

(ii) $R \geq 2$ のとき $\Lambda_K \cong \mathcal{O}_K[[X]]$ と同一視して,

$$(1) \quad h^0(N; \mathcal{O}_K) / ((1+X)^{p^{r-1}} - (1+p)^{R p^{r-1}}) h^0(N; \mathcal{O}_K) \\ \cong h_R^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$$

$$(2) \quad h^0(N; \mathcal{O}_K) / (1+X - (1+p)^R \varepsilon(1+p)) h^0(N; \mathcal{O}_K) \\ \cong h_R^0(\Gamma_0(p^r) \cap \Gamma_1(Np), \varepsilon; \mathcal{O}_K);$$

ここで $\varepsilon: 1+p\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{O}_K^\times$: finite order の character τ $\text{Ker}(\varepsilon) = 1+p^r\mathbb{Z}_p$ とするもの. $\tau \in h_R^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) = h_R(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \varepsilon$, $h_R^0(\Gamma_0(p^r) \cap \Gamma_1(Np), \varepsilon; \mathcal{O}_K)$ は $h_R(\Gamma_0(p^r) \cap \Gamma_1(Np), \varepsilon; \mathcal{O}_K)$ の Hecke algebra の ordinary part である.

4 duality:

$K[[\varrho]]$ の元 $f \in f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n, f) \varrho^n$ とかく = と出来る.

このとき, $h^{\delta}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \times S^{\delta}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$ 上に bilinear form を次の様で定める:

$$(5) \quad (h, f) = a(1, f|h), \quad h \in h^{\delta}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \\ f \in S^{\delta}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K).$$

特に

$$(6) \quad (\tau(n), f) = a(n, f)$$

である. 次の duality が成立する:

(7) $r \geq 1$ とする.

$$(1) \quad h^{\delta}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(S^{\delta}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K),$$

$$S^{\circ}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h^{\circ}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K).$$

$$(ii) \quad h_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(S_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K), \\ S_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K).$$

$$(iii) \quad h(N; \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\bar{S}(N; \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K), \\ \bar{S}(N; \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h(N; \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K).$$

さて, $f \in S_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$: normalized eigenform ($v \geq 1$)

に対応して, $f|h = \lambda(h)f$ とおくと

$$h_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \ni h \mapsto (h, f) = a(1, f|h) = \lambda(h)$$

は \mathcal{O}_K -algebra homomorphism とおえる. この対応を \mathcal{F} とする.

$$(P) \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(h_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \{ \text{normalized eigenforms} \\ \in S_{\mathcal{R}}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \}$$

と定まる.

§2. ordinary forms の family.

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}_K) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(\Lambda_K, \mathcal{O}_K) \text{ とおくと, } \Lambda_K \cong$$

$\mathcal{O}_K[[X]]$ の同一視をすれば $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K) \ni \mathcal{P}$ に対して $\text{Ker}(\mathcal{P}) = (X-a)$

とあると $\mathcal{P} \mapsto a$ となる.

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}_K) \cong \{ a \in \mathcal{O}_K \mid |a|_p < 1 \}$$

となり, $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K)$ は p -adic analytic space とおける.

また, $\text{Ker}(\mathcal{P}) = (X+1 - (1+p)^{\epsilon} \epsilon(1+p))$, $\epsilon: 1+p\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{O}_K^{\times}$:

finite order の character, と表わされる $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K)$ の部分集合

$\varepsilon \in \mathcal{F}_{alg}(\mathcal{O}_K)$ とかく. $k = k(\rho)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$, $r = r(\rho)$ とかく.
 $\text{Ker}(\varepsilon) = \mathcal{H} p^r \mathcal{Z}_p$ ($r \geq 1$).

さて,

$\lambda : h^0(N; \mathcal{O}_K) \rightarrow \Lambda_K : \Lambda_K\text{-algebra homomorphism}$

とあると, 各 $f \in \mathcal{F}_{alg}(\mathcal{O}_K)$ について

$\lambda_f : h^0(W; \mathcal{O}_K) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_K \xrightarrow{f} \mathcal{O}_K ; \mathcal{O}_K\text{-algebra homomorphism}$

が得られ, 従って (7), (8) によって $S_{k(\rho)}(N p^{r(\rho)}, \varepsilon(\rho) \psi \omega^{-k(\rho)})$ に属する ordinary form f_f として

$$f_f|T(n) = \lambda_f(T(n)) f_f$$

とあるものが存在する. ω は modulo p の Teichmüller character, ψ は modulo Np の Dirichlet character として λ のみで定まるものとしてある. $\lambda(T(n)) = A_n(X) \in \Lambda_K = \mathcal{O}_K[[X]]$ とおくと, f_f は

$$f_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon(\mathcal{H}p) (\mathcal{H}p)^k - 1) \exp(2\pi i n z)$$

と parametrize される. ($k = k(\rho)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$). $k(\rho) \geq 2$ 且 f_f は conductor $N p^{r(\rho)}$ の primitive form とする f が存在するとし, $\lambda \in \text{primitive}$ とする.

§3. generalized p -adic measure.

\mathcal{Z}_p^x 上の連続関数 f が \mathcal{O}_K 上 f 値をとるものとする p -adic Banach space $\mathcal{C}(\mathcal{Z}_p^x; \mathcal{O}_K)$ とし,

$$\text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(C(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K),$$

$$\text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K = \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \text{ の } p\text{-進完備化}$$

とおく. $\Phi \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K$ 及び $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_K)$ に対して $\Phi_f \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K)$ 以下の様に定まる:

$$\begin{array}{ccc} \text{id.} \otimes f : \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K & \longrightarrow & \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} (\Lambda_K / \text{Ker } f) \\ & & \parallel \\ & & \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi_1 & \longrightarrow & \Phi_f \end{array}$$

同様に $\text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \ni \Phi$ と $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_K)$ に対して $\Phi_{f, g} \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K)$ が定まる.

§4. 結果.

定理 (Hida) $(N, p) = 1, (J, p) = 1$ なる自然数 N, J に対して

27

$$\lambda : h^0(N, \mathcal{O}_K) \rightarrow \Lambda_K : \text{primitive } \Lambda_K\text{-algebra homomorphism}$$

$$\mu : h^0(J, \mathcal{O}_K) \rightarrow \Lambda_K : \Lambda_K\text{-algebra homomorphism}$$

とある. K が充分大なる p -進数体のとき, $\Phi = \Phi^{\lambda, \mu} \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K$ 以下の τ と ϵ を満たすものが一意に存在する:

$f, g \in \mathcal{F}_{\text{alg}}(\mathcal{O}_K)$ かつ $2 \leq k(g) < k(f)$ とある. $0 \leq m < k(f) - k(g)$ なる整数 m と $\chi : \mathbb{Z}_p^X \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^X$: finite order の

character τ に対して

$$\int_{\mathbb{Z}^x} \chi(z) z^m d\bar{Q}_{g, g_2}$$

$$= t(g, m, j, \beta) a(g, f_g)^{r(g)-\beta} H(g) \frac{D_{JNP}(j-m, f_g, (f_{g_2} | \chi) | \tau_\beta)}{\pi^{j+1} \langle h_g, f_g \rangle_{N_p r(g)}}.$$

但 f_g は (λ, g) に対する τ 定因子 ordinary form; f_{g_2} は (μ, g_2) に対する τ 定因子 ordinary form; $j = k(g) + 2m$; β は $f_{g_2} | \chi = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(n) a(n, f_{g_2}) \exp(2\pi i n z) \in S_{k(g_2)}(\Gamma, (Jp)^\beta)$ となる自然数;

$$\tau_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Jp^\beta & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z});$$

$$t(g, m, j, \beta) = 2^{1-k(g)-j} \frac{r(g)+j}{(\sqrt{N})^p} \frac{1}{p} \frac{1}{2} (\beta j - r(g)(k(g)-2))$$

$$\times (N \text{ と } J \text{ の 最小公倍数})^{1-m+\frac{1}{2}(j-k(g))}$$

$$\times N^{-\frac{k(g)}{2}} J^{m+\frac{k(g)}{2}} (j-m-1)! m!;$$

H は λ に対する τ 定因子 Λ_k の元で, $H(g)$ は H の g での値;

$$h_g = f_g |_{k(g)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N_p r(g) & 0 \end{pmatrix} \in S_{k(g)}(N_p r(g), \varepsilon(g) \psi \omega^{-k(g)}),$$

ρ は complex conjugation;

$$\langle h_g, f_g \rangle_{N_p r(g)} = \int_{\Gamma_0(N_p r(g)) \backslash \mathbb{H}} \overline{f_g(z)} f_g(z) y^{k(g)-2} dx dy, \quad z = x+iy.$$