数理解析研究所講究録
617巻 1987年 49-65

On traces of Hecke operators for the case of weight one

神大自然　秋山茂樹　(Shigeki Akiyama)
名大理　谷川好男　(Yoshio Tanigawa)
神大理　平松豊一　(Toyokazu Hiramatsu)

序．以下で我々が扱う重さ1の保型形式は，流行していない数学の一つである．流行していない数学の多くは，統一的な構造がなく，それらに共通な性質が具体的，経験的，偶然的であるが故に正統派の数学者からみれば，‘物好きにやっているだけで何にもならない’と見なされるだろう．が，我々は既知の法則性の埒外にある新しい現象との出会いを期待して，その具体性の中に踏みこんでいこうと思う．

§1.　$G=SL_2(\mathbb{R})$，Γを第一種Fuchs群で，$\Gamma \ni \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $(=-1_2)$ とする．$\tilde{\Gamma}$をΓの commensurater in G とし，$\alpha \in \tilde{\Gamma}$を固定する．$\Gamma'$を$\Gamma$と$\alpha$で生成された$G$の subgr. とし，$\chi$を$\Gamma'$の$\nu$次ユニタリ表現$(\nu<\infty)$とする．$\chi$は，$[\Gamma:\Gamma^0]<\infty$となる

ようにとる．ここで，$\Gamma^0 = \Gamma \cap \mathrm{Ker}\,\chi$．$S_k(\Gamma, \chi)$ を，χ の表現空間に値をとる Γ に関する χ 付き重さ k の vector valued cusp forms の作る空間とする．そして，この空間に作用する Hecke 作用素を，$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{\mu=1}^{d} \alpha_\mu \Gamma$ と右 coset 分解して，

$$T(\Gamma\alpha\Gamma)\cdot F(z) = \sum_{\mu=1}^{d} \chi(\alpha_\mu) F \mid [\alpha_\mu^{-1}]_k$$

と定義する．ここで，$\alpha_\mu^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき，$F \mid [\alpha_\mu^{-1}]_k = F(\alpha_\mu^{-1} z)(cz+d)^{-k}$ とする．$k = 1$ の場合に，この Hecke 作用素の trace を計算することは open problem であった．従来の algebro-geometric な手法では，$k = 1$ に関しては情報が得られないが，これは Riemann - Roch type の定理が $k = 1$ を折り返し点としていることに由来する．我々は，Selberg の trace formula を用いるのであるが，$k = 1$ はやはり折り返し点として表れる．即ち，$k > 1$ の場合には hyperbolic conjugacy classes からの寄与が $k \longleftrightarrow 2-k$ の対応によって，消滅するかまたは簡単な数論的量として把握できるのであるが，$k = 1$ の場合にはこのようにいかなく，その trace formula には Selberg type Zeta 関数の Residue が表れる．この Zeta の解析接続は trace formula の両辺を解析接続することによって間接的に得られる．この間の事情を以下で説明しよう．

H を複素上半平面とし，

$$\tilde{H} = H \times T, \quad \tilde{G} = G \times T, \quad T = \mathbb{R}/(2\pi)$$

とおく．$\tilde{G} \ni (g,\theta)$ の $\tilde{H} \ni (z,\phi)$ への作用は

$$(g,\theta)(z,\phi) = (gz,\ \phi + \arg(cz+d) - \theta)$$

とする．ここで，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$．この作用は transitive である．$\Gamma \times \{0\}$ を $\tilde{G}$ にうめこみ，これを Γ と同一視する．よく知られているように，この空間は weakly symmetric Riemannian space であり，$\tilde{G}$-不変微分作用素のなす環は

$$\tilde{\Delta} = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{5}{4}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi}$$

の2つで生成される可換環である．$L^2(\Gamma\backslash\tilde{H}, \chi)$ を通常のように定義し，その部分空間 $L_0^2(\Gamma\backslash\tilde{H}, \chi)$ を Γ^0 の各 cusp での Fourier-Bessel 展開の定数項の vanishing condition を加えた空間とする．更に，$L_0^2(\Gamma\backslash\tilde{H}, \chi)$ の部分空間 $\mathfrak{M}(k,\lambda)$ を次で定める：$\mathfrak{M}(k,\lambda) \ni F(z,\phi)$ であることを

$$F(z,\phi) \in L_0^2(\Gamma\backslash\tilde{H}, \chi), \quad \tilde{\Delta}F = \lambda F, \quad \frac{\partial}{\partial \phi}F = -k\sqrt{-1}F$$

とする．この空間は Selberg eigenspace と呼ばれ，次の基本的レンマが成立する．

<u>レンマ</u>.
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(k, -k(k+\frac{1}{2})) & \xrightarrow{\ \sim\ } & S_k(\Gamma, \chi) \\ \Psi & & \Psi \\ F(z,\phi) & \longrightarrow & F(z) \end{array}$$

ここで，$F(z,\phi) = \exp(-\sqrt{-1}k\phi)\, y^{\frac{k}{2}} F(z)$ とする．

この同型に従って，$S_k(\Gamma,\chi)$ での Hecke 作用素 $T(\Gamma\alpha\Gamma)$ の action を $\mathfrak{M}(k, -k(k+1))$ 上に書きかえて

$$T(\Gamma\alpha\Gamma)F(z,\phi) = \sum_{\mu=1}^{d} \chi(\alpha_\mu) F(\alpha_\mu^{-1}(z,\phi)).$$

このようにして, Hecke作用素のtraceを$\mathfrak{M}(k,\lambda)$達の上のtraceの'和'の中の一つとして捉えるのがSelbergの手法である. ここで我々は, paint-pair invariant kernelとして

$$k_s(z,\phi;z',\phi') = \exp(-\sqrt{-1}(\phi-\phi'))\frac{(yy')^{\frac{1}{2}}}{(z-\bar{z}')/2\sqrt{-1}}\left|\frac{(yy')^{\frac{1}{2}}}{(z-\bar{z}')/2\sqrt{-1}}\right|^{s}$$

を用いる($s\in\mathbb{C}$). このkernel k_sは, $\mathrm{Re}\, s>1$でSelbergの云う(a)-(b) typeとなり, $\exp(-\sqrt{-1}(\phi-\phi'))$という形からこのkernelによるoperatorの$\mathfrak{M}(k,\lambda)$上への作用は, $k=1$以外ではvanishする. また, このkernelの定義する積分作用素の$\mathfrak{M}(1,\lambda)$の元に対応する固有値はλのみにdependし, 次で与えられる:

$$h_s(r) = h_s(1,\lambda) = 2^{2+s}\pi B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{s+1}{2}\right)B\left(\tfrac{s}{2}+\sqrt{-1}r,\tfrac{s}{2}-\sqrt{-1}r\right).$$

ここで, $\lambda=-\frac{3}{2}-r^2$. $k\neq 0$なのでexceptionalなeigenvalue λは存在しない($: r\in\mathbb{R}$).

$$-\frac{3}{2}=\lambda_0>\lambda_1>\cdots>\lambda_n>\cdots$$

とλをnumberingしておく. まず, Γがcocompactのときは, Selberg trace formulaは次のようになる:

$$K_s(z,\phi;z',\phi')=\sum_{g\in\Gamma\alpha\Gamma}\chi(g)k_s(z,\phi;g(z',\phi'))$$

とおくとき, t_ℓを$T(\Gamma\alpha\Gamma)$の$\mathfrak{M}(1,\lambda)$上のtraceとして,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}h_s(1,\lambda_\ell)t_\ell = \mathrm{tr}\int_{\Gamma\backslash\tilde{H}}K_s(z,\phi;z,\phi)\,d(z,\phi).$$

Γ に cusps があるときには，上式右辺は発散してしまう．そのときには，$K_s^* = K_s - H_s$ と云う修正が必要である．$k=1$ の場合の問題点の一つは，H_s の定義即ち Eisenstein series の定義にある．以下の §§2−3 でそれらを与え，K_s, H_s のそれぞれの発散項がうち消し合うことを示す．H_s はその形から discrete スペクトルには影響を与えないことがわかり，修正した形の Selberg trace formula が成立することになる．

§2. Eisenstein series

$$\kappa_1, \cdots, \kappa_h ; \kappa_{h+1}, \cdots, \kappa_{h+h'}$$

を Γ の regular cusps と irregular cusps それぞれの Γ-ineq. な類の代表とする．

$$\Gamma_i = \{ \sigma \in \Gamma : \sigma \kappa_i = \kappa_i \} ;$$

$$\Gamma_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle , \quad \Gamma_\infty' = \langle -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

とし，$\sigma_i \in G$ を次のようにとる：$\sigma_i \infty = \kappa_i$ such that

$$\sigma_i^{-1} \Gamma_i \sigma_i = \begin{cases} \Gamma_\infty , & 1 \leqq i \leqq h \\ \Gamma_\infty' , & h+1 \leqq i \leqq h+h' . \end{cases}$$

そして，κ_i に付随した Eisenstein series を次で定義する．

$$E_i(z, \phi ; s) = \sum_{\sigma \in \Gamma_i \backslash \Gamma} Im(\sigma_i^{-1} \sigma z)^s \exp(-\sqrt{-1}\, \sigma_i^{-1} \sigma \phi) \chi(\sigma)^{-1} P_i$$

$$= \sum_{\sigma \in \Gamma_i \backslash \Gamma} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \exp(-\sqrt{-1}(\phi + \arg(cz+d))) \chi(\sigma)^{-1} P_i .$$

$$\sigma_i^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$$

ここで，$r_i=[\Gamma_i:\Gamma_i^0]$，$\Gamma_i^0=\Gamma_i\cap \mathrm{Ker}\,\chi$，$\Gamma_i=\langle \eta_i\rangle$ とするとき，

$$P_i=\begin{cases}\dfrac{1}{r_i}\displaystyle\sum_{g\in\Gamma_i\backslash\Gamma_i^0}\chi(g) & ,\ 1\leqq i\leqq h\\[2ex] \dfrac{1}{2r_i}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2r_i}(-1)^{\ell}\chi(\eta_i^{\ell}) & ,\ h+1\leqq i\leqq h+h'.\end{cases}$$

P_iは巾等な Hermite 行列で，$\det P_i\neq 0$ ならば，P_iは単位行列になる．κ_iが irregular なとき，P_iはr_iが奇数ならば vanish する．特に，χが trivial ならば $r_i=1$ である．また，χが1次元表現のときは，$r_i\neq 2$ ならば P_iは vanish する．これらのことは，irregular cusps が計算をすすめる上で多くの場合に不要であることを示している．

この Eisenstein series の全平面への解析接続は，Laplacian $\tilde{\Delta}$に関する固有関数の内積公式をこの場合につくり，それをこの Eisenstein series に適用し Maass - Selberg の関係式を導くことによって行える．これらの方法は，久保田[2]で展開されているものと同じである．この Eisenstein series を cusp で Fourier - Bessel 展開したときの constant term は上の手法の中で重要な役割を演ずる．regular cusp κ_iに付随した E_iの regular cusp κ_iでの F.-B. 展開の constant term は次の通りである：

$$\exp(-\sqrt{-1}\,\phi)\left\{\delta_{ij}P_i\,y^{s}-\sqrt{-1}\,B(s,\tfrac{1}{2})\,\varphi_{ij}^{0}(s)\,y^{1-s}\right\};$$

ここで，

$$\varphi_{ij}^{0}(s)=\sum_{\substack{\tau\in\Gamma_\infty\backslash\sigma_i\Gamma\sigma_j^{-1}/\Gamma_\infty\\ \tau=\begin{pmatrix}* & *\\ c & d\end{pmatrix},\ c\neq 0}}\frac{\operatorname{sgn} c}{|c|^{2s}}P_j\,\chi(\sigma_i\tau\sigma_j^{-1})^{-1}P_i\,.$$

irregular cusp の場合に変更すべき点は，$\varphi^0_{ij}(s)$ の和の条件 $\tau \in \Gamma_\infty \backslash \sigma_i \Gamma \sigma_j^{-1} / \Gamma_\infty$ において，Γ_∞ を Γ'_∞ におき変えればよい．

N.B. 1. χ が trivial なときは，

$$P_i = \begin{cases} 1_\nu, & 1 \leqq i \leqq h \\ 0_\nu, & h+1 \leqq i \leqq h+h'. \end{cases}$$

このとき，constant term matrix $M = (\varphi_{ij}(s))$, $\varphi_{ij}(s) = -\sqrt{-1} \times B(s, \frac{1}{2}) \varphi^0_{ij}(s)$ は τ のとり方を $\tau \to \tau^{-1}$ とすると

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{h} & \overbrace{\qquad}^{h'} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & & A \\ & \ddots & \\ -A & & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \end{array},$$

即ち，M は交代である．また，Maass-Selberg relation は，M を $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ の軸まで解析接続するならば M の左上の部分は unitary 行列になることを教える．このことは，h が偶数であることを意味する．

次に，H_s の定義を行う：

$$H_s(z, \phi; z', \phi') = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=1}^{h+h'} \sum_{\mu=1}^{d} \chi(\alpha_\mu) \int_{-\infty}^{\infty} h_s(r) E_i(\alpha_\mu(z, \phi); s) \overline{{}^t E_i(z', \phi'; s)}\, dr.$$

ここで，$s = \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\, r$, $\lambda = s(s-1) - \frac{5}{4}$ とする．$K_s^* = K_s - H_s$ とおくと，この K_s^* が compact operator となることは §3 で示す．とりあえずこの点を仮定しておけば，

(1) $$\sum_{\ell=0}^{\infty} h_s(1, \lambda) t_\ell = \mathrm{tr} \int_{\Gamma \backslash \tilde{H}} K_s^*(z, \phi; z, \phi)\, d(z, \phi)$$

という修正された Selberg trace formula が成立する．我々の目標は t_0 であるが，これを求めるには次のことに注意すればよい：

$$\begin{cases} l \neq 0 \text{ のとき}, & h_0(1, \lambda_l) = 0, \\ l = 0 \text{ のとき}, & \lim_{s \to +0} s\, h_s(1, \lambda_0) = 12\pi^2. \end{cases}$$

即ち，$l=0$ のときのみ $h_s(1, \lambda_l)$ は $s=0$ で pole をもつので，そこでの Residue を考えればよい．ここで大切なことは，(1) 式で，h_s が $\mathrm{Re}\, s > 1$ で (a)−(b) type であるのでその左辺が収束し意味をもつのだが，その両辺を解析接続することによって $s=0$ での意味を考えねばならないことである．

§3．K_s^* の compact 性

次に，K_s^* の compact 性について説明しよう．$H_s(z, \varphi; z', \varphi')$ が non-bounded となるのは，z, z' が同時に Γ の同じ cusp に接近するときしかあり得ない．このときの発散項は，1つの cusp κ_i に対して

$$(2) \qquad \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\alpha_\mu \kappa_i = \kappa_i} \chi(\alpha_\mu) \int_{-\infty}^{\infty} h_s(r) \sum_{j=1}^{h+h'} (E_j \text{ の const. term})({}^t\bar{E}_j \text{ の const. term})\, dr$$

で与えられる．ここで，和 $\alpha_\mu \kappa_i = \kappa_i$ の意味は $\alpha_\mu \Gamma$ の元で κ_i を fix するような元があるときには，coset 分解 $\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{\mu=1}^{d} \alpha_\mu \Gamma$ の代表元をはじめから κ_i を fix する元にとりかえておくと云う準

備の下で，K_i を fix する代表元をわたると云うことである．

$$R(i,\mu) = \phi - \phi' + \arg(j(\sigma_i^{-1}\alpha_\mu^{-1}, z)) - \arg(j(\sigma_i^{-1}, z))$$

とおく．ここで，$j(\sigma, z) = (cz+d)$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．そのとき，(2)は次のように書ける：

$$\frac{1}{8\pi^2}\sum_{\alpha_\mu K_i = K_i}\chi(\alpha_\mu)\int_{-\infty}^{\infty} h_s(r)\Big\{\exp(-\sqrt{-1}R(i,\mu))\left[\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}\alpha_\mu^{-1}z)^{\delta}P_i + \mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}\alpha_\mu^{-1}z)^{1-\delta}\varphi_{ii}(\delta)\right]$$

$$\times\left[\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}z')^{\bar\delta}P_i + \mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}z')^{1-\bar\delta}\,{}^t\overline{\varphi_{ii}(\delta)}\right]$$

$$+\sum_{j\neq i}\exp(-\sqrt{-1}R(i,\mu))\,\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}\alpha_\mu^{-1}z)\varphi_{ji}(\delta)\,\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}z')\,{}^t\overline{\varphi_{ji}(\delta)}\Big\}\,dr.$$

ここで，$\mathrm{Re}\,\delta = \frac{1}{2}$ と Riemann-Lebesgue の定理より，この式の発散する部分は次のようになる．

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha_\mu K_i = K_i}\chi(\alpha_\mu)P_i\exp(-\sqrt{-1}R(i,\mu))\left\{\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}\alpha_\mu^{-1}z)\,\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}z)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\, g_s(\log(\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}\alpha_\mu^{-1}z)) - \log(\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1}z))).$$

ここで，

$$g_s(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sqrt{-1}ru)\,h_s(r)\,dr$$

とする．一方，K_s の方の発散項については容易な議論で，cusp K_i に z, z' を近づけるときの主要項は次のようになる：

$$\sum_{\alpha_\mu K_i = K_i}\ \sum_{g\in\Gamma_i} k_s(z,\phi;\ \alpha_\mu g(z',\phi'))\chi(\alpha_\mu g).$$

k_s が具体的に与えられているので，この項を漸近的に評価することができる．regular, irregular ともほぼ同じ故，ここでは irregular cusp の場合のみについて述べよう．z_1, z_1' を共に ∞ に近づけるとき，

$$\sigma_i(z_1, \phi_1) = (z, \phi), \quad \sigma_i(z_1', \phi_1') = (z', \phi').$$

$z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}$, $z_1' = x_1' + y_1'\sqrt{-1}$ と書くとき,

$$\sum_{g \in \Gamma_i} k_s(\sigma_i(z_1, \phi_1), \alpha_\mu g \sigma_i(z_1', \phi_1'))\chi(g)$$

$$= \sum_{b \in \mathbb{Z}} \exp(-\sqrt{-1}(\phi_1 - \phi_1' + \delta_b)) \frac{(y_1 y_1')^{\frac{1}{2}}}{(z_1 - \bar{z}_1' - b)/2i} \left| \frac{(y_1 y_1')^{\frac{1}{2}}}{(z_1 - \bar{z}_1' - b)/2i} \right|^s \chi(\eta_i^b)$$

$$= \exp(-\sqrt{-1}(\phi_1 - \phi_1')) 2^{s+1} \sqrt{-1} (y_1 y_1)^{\frac{s+1}{2}} \sum_{l=0}^{r_i - 1} \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{b r_i + l} (z_1 - \bar{z}_1' - b r_i - l)^{-1}$$

$$\times |z_1 - \bar{z}_1' - b r_i - l|^{-s} \chi(\eta_i^l). \qquad (3)$$

ここで, δ_b は b が odd なとき π, b : even なとき 0 とする. 従って, 次の和が問題となる:

$$\sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{b r_i} (z_1 - \bar{z}_1' - b r_i - l)^{-1} |z_1 - \bar{z}_1' - b r_i - l|^{-s}.$$

容易にわかるように, この和は $r_i = \text{odd}$ のとき $O((y_1 + y_1')^{-s-1})$ となる. 従ってこのときは, (3) で $y_1, y_1' \to \infty$ とするとき K_s は有界である. 従って, $r_i = \text{even}$ のときのみ発散する. そのとき,

$$\sum_{b \in \mathbb{Z}} (A - b r_i)^{-1} |A - b r_i|^{-s} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{A} - r_i x}{|A - r_i x|^{s+2}} dx$$

$$= -\frac{\sqrt{-1}}{r_i \, \mathrm{Im} A^s} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

に注意して変形すれば, 発散項は

$$\frac{1}{2\pi} \exp(-\sqrt{-1} R(i, \mu)) (\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_\mu^{-1} z) \, \mathrm{Im}(\sigma_i^{-1} z))^{\frac{1}{2}} P_i \, g_s(\log(\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_\mu^{-1} z)) -$$

$$\log(\mathrm{Im}(\sigma_i^{-1} z)))$$

となり, 全体として H_s の発散項と一致する. $r_i = \text{odd}$ の場合には, $P_i = 0_v$ であったからこれできれいに発散項はうち消し

合っていることがわかる. 以上で, $K_s^* = K_s - H_s$ が bounded operator であることが云えた. これを $L_0^2(\Gamma\backslash\widetilde{H}, \chi)$ 上に制限した operator として, K_s^* は compact operator になる. $\widetilde{\Delta}$ の self adjoint 性から, $F(z,\phi) \in L_0^2(\Gamma\backslash\widetilde{H}, \chi)$ に対しては

$$\int_{\Gamma\backslash\widetilde{H}} H_s(z,\phi\,;\,z',\phi')F(z',\phi')\,d(z',\phi') = 0$$

が従うので, H_s は discrete spectra には影響を与えない. これで, (1) の成り立つことが保証された.

§4. $[g]$ を $g \in \Gamma\alpha\Gamma$ の Γ による共役類とし,

$$\Gamma(g) = \{\gamma \in \Gamma : g = \gamma g \gamma^{-1}\},$$

$$H^* = H - \bigcup_{i=1}^{h+h'} \bigcup_{\sigma\in\Gamma} \sigma V_i, \quad \sigma_i^{-1}V_i = \{z \in H : Im\, z > Y\}$$

とおく. そのとき,

$$tr\int_{\Gamma\backslash\widetilde{H}^*} K_s(z,\phi\,;\,z,\phi)\,d(z,\phi) = \sum_{[g],\,g\in\Gamma\alpha\Gamma} 2\pi\, tr\,\chi(g)\int_{\Gamma(g)\backslash H^*} k_s(z,0\,;\,g(z,0))\,dz.$$

そこで,

$$I^*(g,s) = \int_{\Gamma(g)\backslash H^*} k_s(z,0\,;\,g(z,0))\,dz$$

とおく. 特に, cusp の近傍を切り落さなくても収束する場合があるので,

$$I(g,s) = \int_{\Gamma(g)\backslash H} k_s(z,0\,;\,g(z,0))\,dz$$

とも書く.

(i) 単位類. $g = 1$.

$$I(g) = vol\,(\Gamma\backslash H).$$

(ii) 楕円類．$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の H 内の fixed pt. を ρ，$c\rho+d=\zeta$ とおく．そのとき，

$$I(g,s)=\frac{4\bar{\zeta}}{\#\Gamma(g)}\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r(1-r^2)^{s-1}}{(1-\bar{\zeta}^2r^2)|1-\bar{\zeta}^2r^2|^s}\,dr\,d\theta .$$

Lebesque の有界収束定理より，

$$\lim_{s\to+0} s\,I(g,s)=\frac{4}{\#\Gamma(g)\cdot(\zeta-\bar{\zeta})}.$$

(iii) 双曲類で，Γ の双曲点を fix する場合．よく知られているように，g が双曲型で固定点が cusp でなければ双曲点であり，一方が双曲点ならばもう一方もそうである．逆に，一方が cusp ならもう一方も cusp である．λ を g の eigenvalue とし，λ_0 を $\Gamma(g)$ の生成元の eigenvalue で $|\lambda_0|>1$ なものとするとき，

$$I(g,s)=\frac{2^{s+2}\log|\lambda_0|\,\mathrm{sgn}\,\lambda\, B\left(\frac{s+1}{2},\frac{1}{2}\right)}{|\lambda+\lambda^{-1}|^s\,|\lambda-\lambda^{-1}|}.$$

(iv) 双曲類で，Γ の cusp を fix する場合．この場合の寄与は，$s=0$ での Residue を考える際には vanish するのだが，Residue をとる前に興味深い項が表れる．そこでここでは，s をかけずに s を 0 に近づけた形で寄与を書いてみよう．λ を g の eigenvalue とすると，

$$\lim_{s\to0}\lim_{r\to0}\left\{I^*(g,s)-\frac{\lambda\,g_s(2\log|\lambda|)}{\pi|1-\lambda^2|}\log r\right\}$$
$$=\frac{4\pi\lambda}{|1-\lambda^2|}\log\left\{\frac{2c(g)\max(|\lambda|,|\lambda|^{-1})}{|\lambda-\lambda^{-1}|}\right\}.$$

ここで，$c(g)$ は次のように決まる．g の固定する cusps を κ_A，κ_B とすると，§2 で述べたように Γ－ineq. な cusps の代表系

と $\sigma_i \in G$ を固定したとき，

$$K_A = \tau_A K_i\,,\quad K_B = \tau_B K_j \quad (\tau_A, \tau_B \in \Gamma)$$

とかける．そこで，$\varphi \in G$ を次のようにえらぶ：

$$\varphi \tau_A \sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix},\quad \varphi \tau_B \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & * \\ c & * \end{pmatrix}.$$

このとき，$c(g) = |c|$ である．$c(g)$ は K_A, K_B の順序や τ_A, τ_B，φ のとり方によらずに，一意的に決まる．更に，$\gamma \in \Gamma$ ならば，$c(\gamma g \gamma^{-1}) = c(g)$ も成立する．

N.B. 1.　Γ_1, Γ_2 を2つの第1種 Fuchs 群で，抽象群として同型とする．そのとき，対応する $c(g_1)$ と $c(g_2)$ は必ずしも同じ値とは限らなく，$(1,\lambda)$ 型の eigenvalue の分布には異なる可能性があることを上式は示している（：Teichmüller 的なずれが trace formula に影響を与える可能性）．

(V)　放物類．

$$B_i = \{ g \in \Gamma\alpha\Gamma \;:\; gK_i = K_i,\ g : \text{parabolic on } 1_2 \},$$

$$B_i \ni g = \sigma_i\, s(g) \begin{pmatrix} 1 & \mu(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_i^{-1}\,,\quad s(g) = \pm 1$$

とおく．K_i が regular cusp のときは，

$$\lim_{s\to+0} \lim_{Y\to 0} s \Big\{ \sum_{g\in B_i} 2\pi\, \mathrm{tr}\, \chi(g)\, I^*(g,s) - \sum_{\alpha_\mu K_i = K_i} g_s(0)\, S(\alpha_\mu) \log Y + \mathrm{tr}(\chi(\alpha_\mu) P_i) \Big\}$$

$$= -\frac{4\pi^2\sqrt{-1}}{x_i} \sum_{\substack{\{g\}\in B_i/\Gamma_i^0 \\ \{g\}\neq \Gamma_i^0}} s(g)\, \mathrm{tr}\, \chi(g) \cot\left(\frac{\pi \mu(g)}{x_i} \right).$$

ここで，$\{g\}$ は B_i/Γ_i^0 の coset $g\Gamma_i^0$ を表している．次に，K_i を irregular cusp とするとき，Γ_i^0 の位数2の subgr. $(\Gamma_i^0)^2$ を考

えると，

$$\lim_{s\to+0}\lim_{Y\to\infty} s\left\{\sum_{g\in B_i} 2\pi\, \mathrm{tr}\,\chi(g)\, I^*(g,s) - \sum_{\alpha_\mu K_i = K_i} g_s(0)\, s(\alpha_\mu)\log Y\, \mathrm{tr}\,(\chi(\alpha_\mu)P_i)\right\}$$

$$= -\frac{4\pi^2\sqrt{-1}}{2x_i}\sum_{\substack{\{g\}\in B_i/(\Gamma_i^0)^2\\ \{g\}\neq(\Gamma_i^0)^2}} s(g)\,\mathrm{tr}\,\chi(g)\cot\left(\frac{\pi\mu(g)}{x_i}\right).$$

計算は，Euler-Maclaurin の総和法を用いる．

§5. Trace of H_s

$$F_i(z,\phi;\delta) = \sum_{\mu=1}^{d}\chi(\alpha_\mu)E_i(\alpha_\mu^{-1}(z,\phi);\delta)$$

とおくと，この関数は $z \longrightarrow z+2x_i$ で不変故，F.-B. 展開されその定数項は次で与えられる：

$$\exp(-\sqrt{-1}\,\phi)\left\{y^\delta\sum_{\alpha_\mu K_i=K_i}\frac{\mathrm{sgn}\, d_\mu}{|d_\mu|^{2\delta}}\chi(\alpha_\mu)P_i + y^{1-\delta}\varphi_{ii}^*(\delta)\right\}.$$

ここで，$\sigma_i^{-1}\alpha_\mu^{-1}\sigma_i = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & d_\mu\end{pmatrix}$ であり，

$$\varphi_{ii}^*(\delta) = -\sqrt{-1}\,B(\delta,\tfrac12)\sum_{\substack{\{\sigma\}\in\Gamma_\infty\backslash\sigma_i^{-1}\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\sigma_i/\Gamma_\infty\\ \sigma=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}}}\frac{\mathrm{sgn}\, c}{|c|^{2\delta}}P_i\,\chi(\sigma_i\sigma\sigma_i^{-1})^{-1}P_i.$$

ただし，K_i が irregular のときは φ_{ii}^* の定義で Γ_∞ を Γ_∞' でとり変える．そこで，trace を計算して

$$\lim_{s\to0}\lim_{Y\to\infty} s\left\{(\text{trace of } H_s) - \sum_{i=1}^{h+h'}\sum_{\alpha_\mu K_i=K_i} g_s(2\log|d_\mu|)\frac{\mathrm{sgn}\, d_\mu}{|d_\mu|}\log Y\,\mathrm{tr}\,(\chi(\alpha_\mu)P_i)\right\}$$

$$= 4\pi^2\sum_{i=1}^{h+h'}\mathrm{tr}\,(\varphi_{ii}^*(\tfrac12)).$$

ここで，$\varphi_{ii}^*(\delta)$ については上式では $\mathrm{Re}\,\delta>1$ での収束しか云えないが，Eisenstein series 自体が全平面に解析接続されるので，

$\varphi^*_{ii}(s)$ も解析接続され，Γ が数論的なときには Eisenstein series の constant term matrix は L 関数を用いて表されるので，これを利用して $\varphi^*_{ii}(\frac{1}{2})$ の値を具体的に計算するのも可能である．Hs の trace からの $\log \Upsilon$ のかかった発散項と orbital integral からの発散項が丁度うち消し合っていることを云うには，特に hyperbolic で cusp を fix する場合には少し細かい分類が必要であるが，ここでは省略する．

§6. 以上より，次の結果を得る．

<u>定理.</u>

$$\mathrm{tr}(T(\Gamma\alpha\Gamma)) = \frac{1}{2} \sum_{[g]\in S_1} \frac{\mathrm{tr}\,\chi(g)}{\#\Gamma(g)\cdot(\zeta-\bar{\zeta})} + \frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{s=0} \zeta^*(s)$$

$$-\sum_{i=1}^{h+h'} \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{8x_i} \sum_{\substack{\{g\}\in B_i/(\Gamma_i^0)^2 \\ \{g\}\neq(\Gamma_i^0)^2}} s(g)\,\mathrm{tr}\,\chi(g)\cot\frac{\pi\mu(g)}{2x_i}\right\} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{h+h'} \mathrm{tr}\,\varphi^*_{ii}\left(\frac{1}{2}\right).$$

ここで，

$$\zeta^*(s) = \sum_{[g]\in S_2} \frac{\mathrm{sgn}\,\lambda \log|\lambda_0|\,\mathrm{tr}\,\chi(g)}{|\lambda+\lambda^{-1}|^s\,|\lambda-\lambda^{-1}|}\ ;$$

S_1 は $\Gamma\alpha\Gamma$ の Γ による elliptic conjugacy classes, S_2 は $\Gamma\alpha\Gamma$ の Γ による hyperbolic conjugacy classes で Γ の hyperbolic point を fix するものについての和を表す．

N.B. 3. $\zeta^*(s)$ は，$\mathrm{Re}\, s > 1$ では一般論から絶対収束する．更に，全平面への解析接続はこの trace formula によって

なされる．従って，$\mathrm{tr}(T(\Gamma\alpha\Gamma))$ の具体的な値を与えるには，$\zeta^*(s)$ の別な面からの解析接続が必要となる．

N. B. 4. χ が real な表現のときは，楕円類，放物類の寄与は純虚数であり，消滅する．従って，φ_{ii}^* のみが残る．

Cor. 1. $\Phi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

と云う $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ による conjugation により，$\Phi(\Gamma) = \Gamma$, $\chi\cdot\Phi = \Phi$, α : diagonal で，Γ - ineq. cusps の集合が $\{0, \infty\}$ に含まれるとする．そのとき，

$$\mathrm{tr}(T(\Gamma\alpha\Gamma)) = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{s=0} \zeta^*(s).$$

Cor. 2. χ が 1 次の表現で，$\chi^2 = id.$ のとき，

$$d_1 = \dim S_1(\Gamma, \chi) = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{s=0} \zeta^*(s).$$

Cor. 3. χ が 2 次のとき

$$d_1 = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{s=0} \zeta^*(s) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{h+h'} \mathrm{tr}\, \varphi_{ii}^*\left(\frac{1}{2}\right).$$

我々は，$\Gamma \ni -1_2$ と仮定して話をすすめてきた．$\Gamma \ni -1_2$ で $\chi(-1_2) = -1_\nu$ の場合にも全く同様に出来，regular, irregular の区別はなくなり，parabolic から，寄与は

$$-\sum_{i=1}^{h}\left\{\frac{\sqrt{-1}}{4x_i}\sum_{\substack{\{g\}\in B_i/\Gamma_i^0 \\ \{g\}\neq\Gamma_i^0}} \mathrm{tr}\,\chi(g)\cot\frac{\pi\mu(g)}{x_i}\right\}$$

となる．ここで，$\sigma_i^{-1} g \sigma_i = \pm\begin{pmatrix} 1 & \mu(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．$B_i$ の定義も parallel である．更に，上記の Cor. 達は，$\Gamma \ni -1_2$ で χ : odd の場合にも同様に成立する．特に，$\Gamma = \Gamma_0(p)$ (p : prime), $\chi(g) = \chi(d)$

($g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$)，$\chi$：Dirichlet 指標の場合は上記 Cor. 1 に含まれている．

Problem. Zeta 関数 $\zeta^*(s)$ に関数等式がもしあれば，それを決定せよ．

References

[1] S. Akiyama, T. Hiramatsu and Y. Tanigawa, On traces of Hecke operators on the space of cusp forms of weight 1, preprint.

[2] T. Kubota, Elementary theory of Eisenstein series, Tokyo-New York : Kodansha and Halsted, 1973.