

多価 *semi-entire modular form* について

学習院大理 大田 浩 (Hiroshi Ohta)

一般に *modular group* の有限指数をもつ *subgroup* における *modular form* に対して, その自身を根にもつような, *modular group* における *modular form* を係数とするような多項式を作ることができる。このとき, 係数の *modular form* は, *weight* に関してある種の条件を満たす。逆に, この条件を満たすような *modular form* を係数とする多項式を考えれば, この多項式から得られる (解析) 関数は *modular form* と類似した性質をもつ。

以下に述べる “多価 *semi-entire modular form*” の話しは, 上記のことにヒントを得て展開したものである。ここで一言断わっておけば, 一般の *modular form*, さるには保型形式において話しを進めなかったのは, 単に私自身の怠慢とゆえからである。また, “*many-valued modular form*” という言葉は, Eichler, Zagier [2], [3] において見られるが, その

定義などを記した文献を見つけることができなかったので、私自身が都合のよいように勝手に定義を与えてしまったが、すでに同じような、あるいは別の定義があるかもしれない。

記号

$$\Gamma \stackrel{\text{put}}{=} SL(2, \mathbb{Z})$$

$$S\tau \stackrel{\text{def}}{=} (a\tau + b)/(c\tau + d), \quad S:\tau \stackrel{\text{def}}{=} c\tau + d \quad (S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma)$$

\mathcal{H} : 上半平面 \mathcal{F} : Γ の基本領域

$\gamma: \tau_0 \rightsquigarrow \tau_1 \stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma$ は τ_0 と τ_1 を結ぶ連続曲線

$f \underset{m}{\rightsquigarrow} g \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ と g は γ に沿って解析接続可能

$f \underset{m}{\rightsquigarrow} g \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ と g は \mathcal{H} 上解析接続可能

g が τ_0 ($\in \mathcal{H}$) の近傍 ($\subset \mathcal{H}$) で定義された函数のとき、

$$(g|_m S)(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} (S:\tau)^{-m} g(S\tau) \quad (m \in \mathbb{Z}, S \in \Gamma)$$

によって、 $S\tau_0$ の近傍で定義された函数 $g|_m S$ を定める。

また、 \mathcal{H} 上の解析函数とは、 \mathcal{H} 上可能な限り解析接続した最っとも極大な解析函数を意味する。さらに、この解析函数の分枝とは、適当な領域における正則函数で、その正則函数を \mathcal{H} 上解析接続するともとの解析函数となるものと言う。

§ 1 多価 semi-entire modular form の定義

以後, $k \in \mathbb{Z}$, Γ_1 は指数有限な Γ の subgroup とする。

定義 \mathcal{H} 上の多価函数 g (真に多価でなくともよい) が次の条件 (I)~(III) を満たすとき, Γ_1 に対する weight k の多価 semi-entire modular form であると呼ぶことにする。

(I) g は \mathcal{H} 上に分岐点以外の特異点をもたない, \mathcal{H} 上の解析函数であり, $R = \overline{\text{pr}} \{ \tau : g \text{ の分岐点} \}$ とおくとき,

$$\#(\mathcal{H} \cap \Gamma R) < \infty$$

かつ, $R \ni \tau$ は g の極でも真性特異点でもない。

(II) (g の保型性) $g_i \in g$ の1つの分枝とするとき,

$$g_i|_k S \xrightarrow{\text{mult}} g_i \quad (\text{for } \forall S \in \Gamma_1).$$

(III) $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\} \ni \forall \tau$ ($S\tau = i\infty$, $S \in \Gamma$) に対し \mathcal{Z} , τ の十分小さい $\varepsilon (> 0)$ 近傍 $\mathcal{U}_{\varepsilon, \tau} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \tau \in \mathcal{H} \mid \text{Im } S\tau > \frac{1}{\varepsilon} \}$ で g の任意の分枝 g_j は次のように表わされる。

$$(S: \tau)^k g_j(\tau) = C_{\tau}^* S\tau + \sum_{\nu \geq 0} C_{\nu}^{(\tau)} e^{\frac{2\pi i \nu}{k} S\tau \cdot \nu}$$

$$(C_{\tau}^*, C_{\nu}^{(\tau)} \in \mathbb{C}, K (> 0) \in \mathbb{Z})$$

特に g が m 価のとき, $g \in m$ 価 semi-entire modular form, (III) においてつねに $C_0^{(\tau)} = 0$ となるとき, $g \in$ 多価 semi-cusp form, また, $\exists C_{\tau}^* \neq 0$ のとき, g は対数特異点をもつという。

さらに, $R \ni \forall \tau$ に対し

- ① τ は g の対数分岐点でない
- ② g の τ における任意の代数要素 g_τ に対して,

$$\text{ord}_\tau(g_\tau) \geq 1$$

を満たすとき, g は多価 entire modular form であるという。

g を有限多価 semi-entire modular form とすれば, g は対数特異点をもたない (i.e. $\forall C \neq 0$)。従って,

g : entire modular form

$\Leftrightarrow g$: 1 価 semi-entire modular form

となるので, 多価 semi-entire modular form は entire modular form の定義の拡張となっている。

定義 $\mathbb{Z} \ni n (> 0)$ とする。

$$\begin{cases} F(X, \tau) = X^n + a_1(\tau)X^{n-1} + \dots + a_n(\tau) \\ a_i \text{ は weight } ki \text{ の } \Gamma \text{ に対する entire modular form} \end{cases}$$

なる X の多項式を, degree n , weight k の entire modular form 多項式と呼ぶ。このとき, $F(g(\tau), \tau) = 0$ (for $\forall \tau \in \mathcal{F}_E$) を満たす \mathcal{F}_E 上の解析函数 g が存在するが, 特にこの $g \in (F \text{ から定義される})$ weight k の代数型 entire modular form という。entire modular form のところをすべて, cusp-form におきかえて, 同様に cusp-form 多項式, 代数型 cusp-form を定義

する。

$l (\geq 3) \in \mathbb{Z}$ とするとき, G_l で weight l の Γ の Eisenstein 級数 i.e. $G_l(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbb{Z}^2 \ni (m_1, m_2) \neq (0,0)} (m_1\tau + m_2)^{-l}$ を表す。 $\{G_4^i G_6^j \mid 4i + 6j = l, i, j (\geq 0) \in \mathbb{Z}\}$ は, weight l の Γ の entire modular form 全体のなす \mathbb{C} -vector space の basis となる。また, G_4, G_6 は \mathbb{C} 上代数的に独立である。このことより,

$F(X, \tau)$: weight k の entire modular form 多項式

$\Leftrightarrow F(X, \tau) \in \mathbb{C}[G_4, G_6][X]$, monic かつ, X, G_4, G_6

に weight を $k, 4, 6$ の割り合でつけたとき同次式

が得られる。

また, g を $\tau_0 (\in \mathbb{H})$ の近傍 ($c \in \mathbb{H}$) での函数で, $F(g(\tau), \tau) = 0$ (for $\forall \tau \in \tau_0$ の近傍) を満たすとするは容易に $F((g|_k S)(\tau), \tau) = 0$ (for $\forall \tau \in S^{-1}\tau_0$ の近傍 ($c \in \mathbb{H}$)) を $\forall S \in \Gamma$ に対して満たすこともわかる。

$F(X, \tau)$ の X の多項式としての判別式を $D(F)(\tau)$ とする。

$D(F)(\tau)$ は weight $k(m-1)$ の Γ に対する entire modular form ($m = \deg_X F, k = \text{weight } F$) となる。

定義 g を (I) の条件を満たす函数とする。このとき, g の

1つの分枝 g_0 をとり

$$\Gamma_k(g) \stackrel{\text{def.}}{=} \{ S \in \Gamma \mid g_0|_k S \xrightarrow{\mathcal{H}} g_0 \}$$

と定義する。 $\Gamma_k(g)$ は g の分枝 g_0 のとり方によらない、 Γ の subgroup となる。

$$\Gamma_k(g) = \left\{ S \in \Gamma \left| \begin{array}{l} \mathcal{H} \setminus \Gamma R \ni \forall \tau_0, \forall g_i: \tau_0 \text{ における } g \text{ の分枝} \\ \mathcal{H} \setminus \Gamma R \supset \forall \gamma: S^{-1}\tau_0 \xrightarrow{\gamma} \tau_i \quad (\tau_i \in \mathcal{H}) \\ \exists g_j: g \text{ の分枝 s.t. } g_i|_k S \xrightarrow{\gamma} g_j \end{array} \right. \right\}.$$

定理 1 $k(\geq 0) \in \mathbb{Z}$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) g は weight k の Γ_1 の有限多価 semi-entire modular form
($\exists \Gamma_1$: subgroup of Γ)

(ii) g は F から定まる weight k の代数型 entire modular form
($\exists F$: weight k の entire modular form 多項式)

(証明の方針)

(i) \Rightarrow (ii) $g \in m$ 価とし、 $\Gamma_0 \stackrel{\text{put}}{=} \Gamma_k(g) (\supset \Gamma_1)$, $l \stackrel{\text{put}}{=} (\Gamma: \Gamma_0)$,
 $\Gamma = \bigcup_{j=1}^l \Gamma_0 S_j$ ($S_j \in \Gamma$) とする。 $\mathcal{H} \setminus \Gamma R \ni \tau_0$ をとり、 $S_j \tau_0$
における g の m 個の分枝を、 g_{1j}, \dots, g_{mj} とする。さらに、
 $f_{ij} \stackrel{\text{put}}{=} g_{ij}|_k S_j$ とする。この f_{ij} をつかい

$$F(X, \tau) \stackrel{\text{put}}{=} \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l}} (X - f_{ij}(\tau))$$

を作り、各係数を \mathbb{C} 上に解析接続すれば、 F が求める多項式となる。特に

$$f_{ij} \equiv f_{i'j'} \Leftrightarrow (i, j) = (i', j')$$

には意す山は, F が $\mathbb{C}[G_4, G_6][X]$ 上既約であることを得る。

ii) \Rightarrow i) $F_0 \in F$ の $\mathbb{C}[G_4, G_6][X]$ における既約因子 g を定義するものとする山は, $(\Gamma: \Gamma_k(g)) \mid \deg_x F_0$ が山かり, g が $\Gamma_k(g)$ の weight k の $\deg_x F_0 / (\Gamma: \Gamma_k(g))$ 個の semi-entire modular form となることが示す山る。 //

定理 1 より容易に次のことが導びか山る。

系 2 F を weight k の entire modular form 多項式で, 任意の $\tau \in \mathcal{H}$ に対して $D(F)(\tau) \neq 0$ とする。このとき, \mathcal{H} 上の連続函数 g で $F(g(\tau), \tau) = 0$ を満たすものとする山は (このようなものは必ず存在する), 任意の $S \in \mathcal{T}$ に対して $g|_k S$ は $S^{-1}\Gamma_k(g)S$ の weight k の entire modular form となり, 特に次が成立する。

$$F: \text{irred. in } \mathbb{C}[G_4, G_6][X] \Leftrightarrow (\Gamma: \Gamma_k(g)) = \deg_x F$$

(注) 定理 1, 系 2 は, cusp-form についても成立する。

§ 2 多価 semi-entire modular form の例

$\omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$ とするとき, $\wp(z, (\omega_1/\omega_2)), \wp'(z, (\omega_1/\omega_2))$ によ, τ

ω_1, ω_2 を周期とする Weierstrass の \wp -函数, σ -函数を表すことにする。

$$\begin{aligned} \text{i.e. } \wp(z, (\omega_1, \omega_2)) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \ni \omega (\neq 0)}} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \\ \sigma(z, (\omega_1, \omega_2)) &= z \prod_{\substack{\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \ni \omega (\neq 0)}} \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}}. \end{aligned}$$

特に $\tau \in \mathcal{H}$ のとき

$$\wp(z, \tau) \stackrel{\text{put}}{=} \wp(z, (\tau)), \quad \sigma(z, \tau) \stackrel{\text{put}}{=} \sigma(z, (\tau)),$$

とする。

$N (\neq 0) \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\Lambda_N(z, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2(Nz, \tau) / \sigma^{2N^2}(z, \tau)$$

$$\Phi_N(z, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \wp(Nz, \tau) \Lambda_N(z, \tau)$$

と定義する。このとき

$$\Lambda_N(z, \tau), \Phi_N(z, \tau) \in \mathbb{Z}[15G_4(\tau), 35G_6(\tau)][\wp(z, \tau)]$$

となる。従って

$$\exists! \lambda_N(X, \tau), \exists! \phi_N(X, \tau) \in \mathbb{Z}[15G_4(\tau), 35G_6(\tau)][X]$$

$$\text{s.t. } \lambda_N(\wp(z, \tau), \tau) = \Lambda_N(z, \tau), \quad \phi_N(\wp(z, \tau), \tau) = \Phi_N(z, \tau).$$

特に $\frac{1}{N^2} \lambda_N, \phi_N$ はそれぞれ degree $N^2 - 1$, N^2 の weight 2 の entire modular form 多項式となる (cf Cassels [1]).

$\mathcal{H} \ni \tau$ とするとき, $\lambda_N(X, \tau) = 0$ の根は

$$\left\{ \wp\left(\frac{a\tau+b}{N}, \tau\right) \mid \mathbb{Z}^2 \ni (a, b) (\neq (0, 0)) \bmod N \right\}$$

$\phi_N(X, \tau) = 0$ の根は, $\wp(d\tau + \beta, \tau) = 0$ ($d, \beta \in \mathbb{R}$) とすよは

$$\left\{ \wp\left(\frac{(d+a)\tau + (\beta+b)}{N}, \tau\right) \mid \mathbb{Z}^2 \ni (a, b) \bmod N \right\}$$

となる。

以後, $N > 1$ とする。

$$f_{N, (a)}(\tau) = \sum_{\substack{c \in \mathbb{Z} \\ \gcd(c, N) = 1}} f\left(\frac{a\tau + b}{N}, \tau\right) \quad (\mathbb{Z}^2 \ni (a, b) (\neq (0, 0)) \pmod{N})$$

とする。 $f_{N, (a)}$ は $\frac{1}{N^2} \lambda_N$ から定義される weight 2 の 1 価代数型 entire modular form となることが, $f_{N, (a)}$ のつくり方よりわかるので, weight 2 の entire modular form となる (cf. § 1)。
 山山山山は, この $f_{N, (a)}$ を N^{th} β -division value と呼んでいる。この函数は, 頂度 β -函数にその極の等分点を代入したものである。そこで, ϕ_N から定義される weight 2 の代数型 entire modular form が頂度 β -函数にその零点の等分点を代入して得られることから, N^{th} β -zero division value と呼び β_N で表わすことにする (今のところ ϕ_N から定義される \mathbb{C} 上の解析函数 i.e. 代数型 entire modular form が何個あるかわからないが, β_N とかけば, そのうちの 1 つを意味するものとする)。

$\lambda_2(X, \tau) = 4X^3 - 60G_4(\tau)X - 140G_6(\tau)$ より, $\mathcal{H} \ni \tau_0$ とし, $f(\alpha\tau_0 + \beta, \tau_0) = 0$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) とすれば

$$\tau_0 \in \Gamma F \Leftrightarrow 2\alpha, 2\beta \in \mathbb{Z}$$

がわかる。これより

$$\tau \in \Gamma F \Leftrightarrow D(\phi_N)(\tau) = 0.$$

従って, $\{\tau: \beta_N \text{ の分岐点}\} \subset \Gamma F$ となる。特に $\Gamma F \ni \tilde{\tau}$ にお

い

$$\phi_N(X, \tilde{\tau}) = \begin{cases} X \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (X - \alpha_i)^2 & (N: \text{odd}) \\ \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (X - \alpha_i)^2 & (N: \text{even}) \end{cases}$$

($\alpha_i \neq 0, \alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$)

となるので、 ϕ_N の $\tilde{\tau}$ における分岐度は高々1である。N=2の場合を考える。 \mathbb{F}_2 における $\tilde{\tau}$ における代数要素(一般に ϕ_N の $\tilde{\tau}$ における様子から、 $\tilde{\tau}$ の近傍において ϕ_N は極要素をもたないことがわかる)とする。 \mathbb{F}_2 は Puiseux 級数によって

$$\mathbb{F}_2(\tau) = C_0 + C_1(\tau - \tilde{\tau})^{d_1} + C_2(\tau - \tilde{\tau})^{d_2} + \dots$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z} \ni d_i (> 0), \quad d_i < d_j \ (i < j), \quad C_0 \neq 0$$

と表わされる。 $\tilde{\tau}$ の近傍において、 $\phi_2(\mathbb{F}_2(\tau), \tau) = 0$ を満たすことに注意して、 $\phi_2(X, \tau) = (X^2 + 15G_4(\tau))^2 + 280G_6(\tau)X$ に代入することにより、 $d_1 = \frac{1}{2}$ を得る。故に \mathbb{F}_2 は Γ_F で分岐する。

\mathbb{C} 上の解析函数 u で、 $\wp(u(\tau), \tau) = 0$ を満たすものが存在する。このような u を1つ固定する。

次の命題は、Eichler, Zagier [2] の中に見られるが、その厳密な証明は記されていない。

命題3 (1) $\{\tilde{\tau} : u \text{ の分岐点}\} = \Gamma_F$

(2) $\Gamma \nVdash \tilde{c}$, $U_0 \in \tilde{c}$ の近傍における U の分枝とし

$$\lim_{\tau \rightarrow \tilde{c}} U_0(\tau) = \frac{l_1}{2} \tilde{c} + \frac{l_2}{2} \quad (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$$

($U_0(\tau)$ は連続関数として \tilde{c} までは延長できるので, $\lim_{\tau \rightarrow \tilde{c}} U_0(\tau)$ を以後単に $U_0(\tilde{c})$ で表わす) と表わしておく。このとき,

$$\Gamma[2] \stackrel{\text{par}}{=} \left\{ S \in \Gamma \mid S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\} \text{ とすれば}$$

$$\Gamma[2] \nVdash \tilde{c} \Leftrightarrow l_1, l_2: \text{odd}$$

$$\Gamma[2](\sqrt{1}) \nVdash \tilde{c} \Leftrightarrow l_1: \text{odd}, l_2: \text{even}$$

$$\Gamma[2] \frac{\sqrt{1}+1}{2} \nVdash \tilde{c} \Leftrightarrow l_1: \text{even}, l_2: \text{odd}$$

であり, 変数 τ が \tilde{c} をまわると $U_0(\tau)$ は $-U_0(\tau) + l_1\tau + l_2$ にうつる。従って, \tilde{c} は U の分岐度 1 の代数特異点である。

(証明の方針)

(1) $\{\tilde{c}: U \text{ の分岐点}\} \subset \Gamma \nVdash$ は明らかである。そこで, U_0 がある $\tilde{c} \in \Gamma \nVdash$ で分岐しないとする。 $\phi_2(X, \tau) = 0$ の \tilde{c} の近傍における根は, $\wp\left(\frac{U_0(\tau)}{2}, \tau\right)$, $\wp\left(\frac{U_0(\tau)+\tau}{2}, \tau\right)$, $\wp\left(\frac{U_0(\tau)+1}{2}, \tau\right)$, $\wp\left(\frac{U_0(\tau)+\tau+1}{2}, \tau\right)$ と表わされる。 U_0 が \tilde{c} で分岐しないことより, これは \tilde{c} で分岐しない。これは \wp_2 が \tilde{c} で分岐することに矛盾する。

(2) 前半は省略する。後半は, $\wp\left(\frac{U_0(\tau)+a\tau+b}{N}, \tau\right)$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) が \wp_N の分枝となることと, 任意の odd $N \geq 3$ に対して, 必ず $\phi_N(X, \tilde{c})$ が単根をもつこと, さらに (1) より U_0 が \tilde{c} で分岐することより導びく。 //

0 は \wp -函数の極であるから, $u(\tilde{\tau}) \neq 0$ (for $\forall \tilde{\tau} \in \Gamma \backslash \mathcal{H}$) である (このことは (2) からわかる)。従って, u は $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ で極要素をもたない。さて, $u_0 \in \mathcal{H} \setminus \Gamma \backslash \mathcal{H} \ni \tau_0$ における u の分枝とすれば, $S^{-1}\tau_0$ ($S \in \Gamma$) の近傍において

$$\begin{aligned} 0 &= \wp(u_0(S\tau), S\tau) = \wp(u_0(S\tau), \frac{1}{S:\tau} S(\tilde{\tau})) \\ &= (S:\tau)^2 \wp((S:\tau)u_0(S\tau), S(\tilde{\tau})) \\ &= (S:\tau)^2 \wp((u_0 \circ S)(\tau), \tau) \end{aligned}$$

となるから, u は $\Gamma^{-1}(u)$ の weight -1 の多価 semi-entire modular form となるのではないかという期待がもたれる。以後このことを示す方針を述べる。

まず, $\mathcal{A} = \overline{\text{pr}} \{ \tilde{u} : \mathcal{H} \text{ 上の解析函数} \mid \wp(\tilde{u}(\tau), \tau) = 0 \}$ が有限集合ならば, $(\Gamma : \Gamma_1(u)) \leq \#\mathcal{A}$ となることを示す。実際 $M \overline{\text{pr}} \#\mathcal{A}$ とし, $(\Gamma : \Gamma_1(u)) > M$ とすれば

$$\exists S_1, \dots, S_{M+1} \in \Gamma \text{ s.t. } \Gamma_1(u)S_i \neq \Gamma_1(u)S_j \quad (i \neq j).$$

u_0 を上記と同様に $\mathcal{H} \setminus \Gamma \backslash \mathcal{H} \ni \tau_0$ における u の分枝とする。上の S_i を用いて, $\gamma_i : S_i^{-1}\tau_0 \rightarrow \tau_0$ ($\subset \mathcal{H} \setminus \Gamma \backslash \mathcal{H}$) なる連続曲線を決め, $u_0 \circ S_i \xrightarrow{\gamma_i} u_i$ とすると, 函数関係不変の原理より, τ_0 の近傍で $\wp(u_i(\tau), \tau) = 0$ を満たす。従って, 仮定より

$$\exists i, j \quad (i \neq j) \text{ s.t. } u_i \xrightarrow{\mathcal{H}} u_j.$$

よって, $u_0 \circ S_i \xrightarrow{\mathcal{H}} u_0 \circ S_j$. 故に, $u_0 \circ S_i S_j^{-1} \xrightarrow{\mathcal{H}} u_0$ となり矛盾する。

補題4 $f(u(\tau), \tau) = 0$ なる \mathbb{H} 上の解析函数 u は無限多価.

かつ, $\#\Sigma = \#\{\tilde{u} : \mathbb{H} \text{ 上の解析函数} \mid f(\tilde{u}(\tau), \tau) = 0\} < \infty$.

特に, $(\Gamma : \Gamma_1(u)) < \infty$ である.

(証明の方針) u_0 を \sqrt{N} の近傍における u の分枝とし, u_0 を $\sqrt{N+1}$, $\frac{\sqrt{N+1}}{2}$ の近傍まで解析接続したものを同じ記号 u_0 で表わす。命題3より

$$u_0(\sqrt{N}) = \frac{l_1}{2}\sqrt{N} + \frac{l_2}{2} \quad (l_1, l_2: \text{odd})$$

$$u_0(\sqrt{N+1}) = \frac{m_1}{2}(\sqrt{N+1}) + \frac{m_2}{2} \quad (m_1: \text{odd}, m_2: \text{even})$$

$$u_0\left(\frac{\sqrt{N+1}}{2}\right) = \frac{m_1}{2}\left(\frac{\sqrt{N+1}}{2}\right) + \frac{m_2}{2} \quad (m_1: \text{even}, m_2: \text{odd})$$

と表わさる。再び, 命題3より変数 τ が, \sqrt{N} , $\sqrt{N+1}$ を1まわりすれば, $u_0(\tau)$ は $u_0(\tau) + (m_1 - l_1)\tau + (m_2 - l_2)$ にうつることになる。同様に, \sqrt{N} , $\frac{\sqrt{N+1}}{2}$ を1まわりすれば, $u_0(\tau)$ は $u_0(\tau) + (m_1 - l_1)\tau + (m_2 - l_2)$ にうつる。ここで, $m_2 - l_2 \neq 0$, $m_1 - l_1 \neq 0$ となることに注意すれば, \sqrt{N} の近傍における Σ の元 \tilde{u} の任意の分枝は, $\pm u_0(\tau) + m\tau + m$ ($m, m \in \mathbb{Z}$) で与えられることより, $\#\Sigma < \infty$ となる。//

(注) $|m_1 - l_1|, |m_2 - l_2|, |m_1 - l_1|, |m_2 - l_2|$ は u および u_0 のとり方によらず f のみによって定まる数である。

定理5 $f(u(\tau), \tau) = 0$ を満たす \mathbb{H} 上の解析函数 u は, $\Gamma_1(u)$ に対する weight -1 の無限多価 semi-entire modular form である。

(証明) $(\Gamma: \Gamma_1(N)) < \infty$ であり, 定義の(I), (II)についてはすでに示してある。(III)については, Eichler, Zagier [3] の Theorem 1.2, 3.6, 11.1 より, $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} \ni \forall \tau$ に対して, U の上の近傍における任意の分枝 U_0 は

$$(S: \tau)^{-1} U_0(\tau) = C_1^* S\tau + \sum_{\nu \neq 0} C_\nu^{(\tau)} e^{2\pi i \nu S\tau \cdot \nu}$$

$$(C_1^* \in \mathbb{Z}, C_0^{(\tau)} \in \pm \frac{\log(5+2\sqrt{5})}{2\pi\sqrt{5}} + \frac{1}{2} + \mathbb{Z})$$

と表わすことが出来るのでよい。//

U の分岐点は $\Gamma\sqrt{5}$ であるから, $\text{Im}\tau \geq 1$ で連続, $\text{Im}\tau > 1$ で正則となる U_1 で, $\wp(U_1(\tau), \tau) = 0$ なるものが存在する。上の証明中の cusp での展開式より

$$\exists C \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } U_1(\tau+1) = U_1(\tau) + C \quad (\text{Im}\tau \geq 1).$$

そこで, $U_1(\sqrt{5}) = \frac{l_1}{2}\sqrt{5} + \frac{l_2}{2}$ とす由は

$$U_1(\sqrt{5}+1) = \frac{l_1}{2}(\sqrt{5}+1) + \frac{2C - l_1 + l_2}{2}$$

となることがわかる。また, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ とし $U_2(\tau) \stackrel{\text{put}}{=} (U_1 \circ T)(\tau)$ とす由は, U_2 は $\text{Im}T\tau \geq 1$ で連続, $\text{Im}T\tau > 1$ で正則な函数で, $\wp(U_2(\tau), \tau) = 0$ を満たす。

$$U_2(TU^{-1}T\tau) = \frac{1}{\tau+1} U_1(\tau) - \frac{C}{\tau+1} \tau$$

に注意す由は, $TU^{-1}T\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ より

$$U_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{l_1 + l_2 - 2C}{2} \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{l_1}{2}.$$

一方, $U_2(\sqrt{5}) = \sqrt{5} U_1(\sqrt{5}) = \frac{l_2}{2}\sqrt{5} - \frac{l_1}{2}$ 。従って, 補題4の証明

の方針と同様に考えれば, 変数 τ が, \sqrt{F} , $\sqrt{F+1}$ を 1 まわりすれば, $u_1(\tau)$ は $u_1(\tau) + 2C - l_1$ にうつり, \sqrt{F} , $\frac{\sqrt{F+1}}{2}$ を 1 まわりすれば, $u_2(\tau)$ は $u_2(\tau) - (2C - l_1)\tau$ にうつることを得る。

$$\left(\sqrt{F} \quad \sqrt{F+1} \right)$$

$$u_1(\tau) \mapsto u_1(\tau) + 2C - l_1$$

$$\left(\sqrt{F} \quad \frac{\sqrt{F+1}}{2} \right)$$

$$u_2(\tau) \mapsto u_2(\tau) - (2C - l_1)\tau$$

従, τ , u の分岐の様子を調べる方法として, C と l_1 の関係を調べる方法もある。先に注意したように, $|2C - l_1|$ は ρ のみによって定まる定数である。以上より, 次が得られる。

系 6 N が 2 以上の even, または $N > |2C - l_1|$ なる odd のとき, 任意の N th ρ -zero division value ϕ_N は, 真に有限多価な semi-entire modular form となる。

(証明の方針) N が even のとき, $\phi_N(X, \sqrt{F})$ は重根のみをもつことより明らか。 $N (\geq 3)$ を odd とする。上記の u_1 をつかえば, ρ_N の \sqrt{F} の近傍における任意の分枝は,

$$\rho \left(\frac{1}{N} (u_1(\tau) + a\tau + b), \tau \right) \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

と表わされる。変数 τ が \sqrt{F} を 1 まわりすれば, $u_1(\tau)$ が $-u_1(\tau) + l_1\tau + l_2$ にうつることより

$$(a, b) \equiv \left(\frac{l_1}{2}(N-1), \frac{l_2}{2}(N-1) \right) \pmod{N}$$

ならば, $\rho \left(\frac{1}{N} (u_1(\tau) + a\tau + b), \tau \right)$ は別のものにあつることが

わかる。そこで, $(a, b) \equiv (\frac{a}{2}(N-1), \frac{b}{2}(N-1)) \pmod{N}$ のとき
 分岐することを示せばよい。 $N > |2c-l_1|$ とすれば, 変数 τ
 が $\sqrt{-1}, \sqrt{-1}+1$ を 1 まわりするとき, $u_1(\tau)$ は $u_1(\tau) + 2c-l_1$ にう
 つることより, $\frac{1}{N}(u_1(\tau) + a\tau + b)$ は $\frac{1}{N}(u_1(\tau) + a\tau + b + 2c-l_1)$
 にうつる。このとき, $(a, b) \not\equiv (a, b + 2c-l_1) \pmod{N}$ となるの
 で題意は示された。 //

予想 $|2c-l_1| = 1$

この予想が示されるのは, 次のことが得られる。

- u は Γ に対する weight -1 の無限多価 *semi-entire modular form* である。
- $N (\geq 2)$ なる任意の整数に対して, ϕ_N は Γ に対する weight 2 の N^2 価 *semi-entire modular form* である。
- $N (\geq 2)$ なる任意の整数に対して, 多項式 $\phi_N(X, \tau)$ は $\mathbb{Z}[15G_4(\tau), 35G_6(\tau)][X]$ 上既約である。

今のところ, 多価な *modular form* が何の役にたつかは, 考
 えていないのでわからないが, 有限多価となる ϕ_N よりも,
 無限多価となる u の方が, 得るものが多いように思われる。

参考文献

- [1] J.W.S. Cassels, A note on division values of $\wp(u)$,
Proc. Cambridge Philos. 45 (1949), 167-172
- [2] M. Eichler, D. Zagier, On the zeros of the Weierstrass
 \wp -function. Math. Ann. 258 (1982), 399-407
- [3] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms,
Progress in Math. 55. Birkhäuser (1985)
- [4] H. Ohta, 多価 modular form について (zero-division
value の定義), 1985年度学習院大学修士論文
- [5] B. Schoeneberg, Elliptic Modular Functions, Springer
(1974)