数理解析研究所講究録
619巻 1987年 45-79



# Legendre 特異点について

北大理 泉屋 周一 (Shyūichi Izumiya)

V.I. Arnold と周辺の人々による，変分問題に表われる特異点の研究は，主として，以下の3種類の特異点としてとらえることにより進められている：

1. Lagrange 特異点
2. Legendre 特異点
3. Variety の射影の特異点

Arnold 自身による解説 [2] によれば，いずれの場合にせよ，これらの特異点の研究は以下の3つのステップを通してなされていることがわかる．

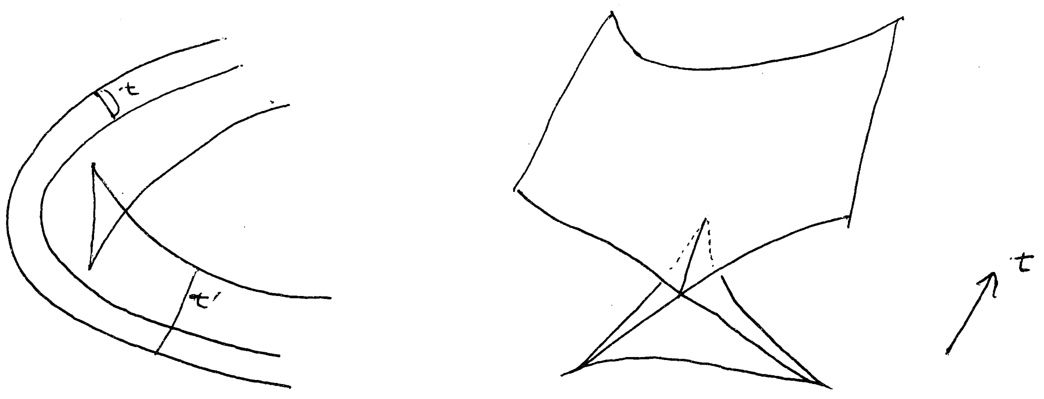
1. standard 特異点を求める，これは，いわゆる分類理論であり．たとえば，カスプやつばめの尾などが出てくる。これら standard 特異点は，通常 reflection で生成される群の幾何学と関連している。そして，それらは対応する代数的な意味（Lie 代数，不変式論，ルート系，Dynkin 図形など）をくわ

しく研究できる。

2　standard特異点は安定である事と，それらは，一般の位置にあるときのみに表われることが証明される。（注．もちろん．Arnoldの分類リストの中には，そうでないものも多数ある。むしろ，その中で安定で"generic"なものをstandard特異点と呼んでいると理解した方が良い？）

3　一般の位置にある変分問題にかかわる，様々なobjectの形成の研究をstandard特異点の対応する性質へreduceする．

たとえば，だ円から等距離にあるWave front（波面）の特異点の形成のプロセスは，つばめの尾を時間tで切断した時にあらわれるカスプの形成のプロセスへreduceできる．(Fig 1)




(Fig 1)

この様な，研究方向を念頭に置いて，ここではLegendre特異点に関連した部分のみ解説してみよう。

本稿は以下の順にまとめられている.

I. Legendre 特異点の基礎理論 (Arnol'd-Zakalyukin 理論)

1. contact manifold.
2. Legendrian bundle
3. Legendrian map と wave front
4. Generating family.

II. Legendre 特異点の理論の発展と応用.

1. One-Parameter Rearrangements of fronts (Zakalyukin)
2. Singularities of convex hulls of smooth manifold (Zakalyukin, Sedykh)
3. Envelope (Bruce), Dual. (Kulikov)
4. 熱力学への応用 (J-G. Dubois et J-P. Dufour)

付録1. Global Problems

付録2. Legendre特異集合の canonical stratification.

# I. Legendre 特異点の基礎理論 (Arnol'd-Zakalyukin)

## 1. Contact manifold.

Def (1.1) $M^{2m+1}$ を $(2m+1)$ 次元の $C^\infty$-manifold とする.

$M^{2m+1}$ 上の contact structure とは, non-degenerate tangent hyper plane field $K$ のことである. ここで tangent hyper-plane field $K$ が non-degenerate とは, $K$ をあたえる local 1-forms $\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in I}$ が各点 $p\in M$ で non-degenerate (i.e. $\omega_\lambda\wedge(d\omega_\lambda)^m\neq 0$ at $p$) ということである. この時 $(M, K)$ を contact manifold という.

例1. $\mathbb{R}^{2m+1}$ において, $(x_1,\cdots,x_m\,;\,y_1,\cdots,y_m\,;\,z)$ を座標として, $\omega=dz-\sum_{i=1}^m y_i dx_i$ が定める hyperplane field を考えると, それは contact structure である.

例2. $M$ を $m$ 次元多様体, $J^1(M,\mathbb{R})$ を 1-jet bundle over $M\times\mathbb{R}$ とする. この時, $M$ 上の局所 $C^\infty$-函数の 1-jet のグラフ全体ではさみるような, $J^1(M,\mathbb{R})$ 上の接空間場を考えると, それは $J^1(M,\mathbb{R})$ 上の contact structure をあたえる. これを $K_c$ とかく.

例3. $B$ を $n$ 次元多様体, $B\ni p$ で接する hyperplane を $B$ の contact element と呼び $p$ を contact point とよぶ. $C(B)$ を $B$ の contact element 全体の集合とする. さらに $PT^*B$ を $T^*B$ の

associated projective bundle とすると, $C(B)$ と $PT^*B$ は同一視される.

Def. $PT^*B$ 上の <u>contact hyperplane field</u> $K$ とは:

$\pi : PT^*B \to B$ : bundle projection　$\tau : TPT^*B \to PT^*B$ : tangent bundle を考えて. $\xi \in TPT^*B$ について

$\xi \in K \iff d\pi(\xi) \in \tau(\xi)$ と定める.

この時, $K$ は contact structure である。

Theorem (1.2). (Contact version of Darboux's theorem)

$(M^{2m+1}, K)$ : contact manifold, $M \ni p$ に対して, $p$ のまわりの局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m ; y_1, \cdots y_m ; z)$ が存在して, 1-form $\omega = dz - \sum_{i=1}^{m} y_i dx_i$ で $K$ はあたえられる。

(これを, <u>contact chart</u> とよぶ).

Def (1.3)　$(M^{2m+1}, K)$ を contact manifold, $i : L \to M$ を immersion とする時,

$i$ が <u>Legendrian</u>

$\iff$ (1) $\dim L = m$

(2) 任意の $x \in L$ に対して. $di_x(T_xL) \subseteq K_x$ が成立.

例4．$\mathbb{R}^{2m+1}$ の座標を $(x, y, z)$，contact structure を $\omega = dz - y \cdot dx$ により定める．この時，$C_1 \in \mathbb{R}^m$，$C_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$L_{(C_1, C_2)} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2m+1} \mid x = C_1,\ z = C_2\}$ とおくと，これは Legendrian submanifold である．

例5．contact manifold $(J^1(M, \mathbb{R}), K_C)$ を考える．$C^\infty$-函数 $f: M \to \mathbb{R}$ に対して，jet extension $j^1 f: M \to J^1(M, \mathbb{R})$ を考えると，これは Legendrian embedding である．

## 2．Legendrian bundle

Def (2.1)　$\pi: E^{2m+1} \to B^{m+1}$ を局所自明ファイバー束とする．この $\pi: E^{2m+1} \to B^{m+1}$ が <u>Legendrian bundle</u> であるとは，E が contact manifold で各 fibre が Legendrian submanifold である事とする．

例6　$\mathbb{R}^{2m+1}$ の座標を $(x : y : z)$ として，その上の contact structure を 1-form $\omega = dz - y dx$ であたえる時，例4から，$\pi: \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$，$\pi(x : y : z) = (x, z)$ は Legendrian bundle である．これを <u>standard Legendrian bundle</u> とよぶ．

例7．contact manifold $(J^1(M, \mathbb{R}), K_C)$ は，普通の bundle 構造 $\pi: J^1(M, \mathbb{R}) \to M \times \mathbb{R}$ を考えると，Legendrian bundle になる．

Def (2.2) $\pi_i : E_i \to B_i$ $(i=1,2)$ を Legendrian bundle とする. $\pi_1 : E_1 \to B_1$ と $\pi_2 : E_2 \to B_2$ が <u>Legendrian equivalent</u> とは, contact diffeo $\Phi : E_1 \to E_2$ と diffeo $\phi : B_1 \to B_2$ が存在して, 次の diagram を可換にすることとする:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ B_1 & \xrightarrow{\phi} & B_2 \end{array}.$$

この時, Legendrian bundle に対しても Darboux 型の定理が成立する.

Theorem (2.3) (Arnol'd–Zakalyukin). すべての Legendrian bundle は locally Legendrian equivalent.

従って, Legendrian bundle は局所的には standard Legendrian bundle とみてよい.

## 3. Legendrian map と Wave front.

Def (3.1) (1) $\pi : E \to B$ を Legendrian bundle, $i : L \to E$ を Legendrian immersion とするとき, $\pi \circ i : L \to B$ を <u>Legendrian map</u> とよぶ.

(2) Legendrian map の image を <u>wave front</u> とよぶ.

ここでは, [10] に従って, 何故 Legendrian map の image

を wave front と呼ぶかについてのべる： M を $n$ 次元多様体，$H : T^*M \setminus 0 \to \mathbb{R}$ を smooth function (Hamiltonian function). $H$ に everywhere positive and positively homogeneous of degree 1 という仮定をする．この時，$H$ による Hamilton ベクトル場を $X_H$ であらわす．又このベクトル場の flow (Hamiltonian flow) を $\Phi_t$ であらわす．この時，$a \in \mathbb{R}_+$ に対して $R_a : T^*M \to T^*M$ を $R_a(x,\xi) = (x, a\xi)$ としたとき，仮定から，$(R_a)_* X_H = X_H \circ R_a$ かつ $R_a \circ \Phi_t = \Phi_t \circ R_a$ が成立する．今 $T^*M \setminus 0$ の fibre におけるスカラー倍により $\mathbb{R}_+$-作用を考え，その作用による商集合を $\Sigma T^*M$ とすると，$\pi : \Sigma T^*M \to M$ は自然に Legendrian bundle となる．上記の性質から flow $\Phi_t$ は自然に $\Sigma T^*M$ 上へ project される．次に $\exp : T^*M \to M$ を $\exp(\xi) = \Phi_{H(\xi)}(\xi)$ で定義する．今 $(\pi, \exp) : T^*M \to M \times M$ に対して，$(x_0, u_0) \in M \times M$ ($u_0 = \exp(\xi_0)$) がこの写像の regular value と仮定する．この時，その local inverse $s : X \times U \to T^*M$ が存在 ($(x_0, u_0) \in X \times U \subset M \times M$, open) するが，$s$ と $H$ の合成 $H \circ s$ を $\tau$ であらわす：

$$
\begin{tikzcd}
T^*M \arrow[r, "H"] \arrow[d, shift left, "{(\pi,\exp)}"] & \mathbb{R} \\
X \times U \arrow[u, shift left, "s"] \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}
$$

この $\tau$ は，$X$ の点と $U$ の点のあいだの光学的距離を表わしていると考える事ができる．

$M$ の normally oriented codim 1 submanifold $V_0$ を initial wave front（初期波面）と考える．この時，$V_0$ の各点 $x$ において，$V_0$ の $x$ における，normally oriented tangent space は $\Sigma T_x^*M$ の元 $\xi(x)$ を定める．この時 $V_t = \{\exp_x(t\xi) \mid x \in V_0\}$ を時刻 $t$ における wavefront（波面）と呼び，$V_0 \to V_t$ by $x \mapsto \exp_x(t\xi(x))$ を時刻 $t$ における ray map と呼ぶ．この波面 $V_t$ は以下のようにみる事もできる：$V_0$ の各点に対して定まる $\xi(x)$ 全体の集合 $\Lambda_0$ は $\Sigma T^*M$ の中の Legendre submanifold となる．Hamilton flow $\Phi_t$ は $\Sigma T^*M$ の Legendre submanifold を Legendre submanifold に写すので $\Phi_t(\Lambda_0) = \Lambda_t$ も Legendre submanifold である．この時，定義から $\pi(\Lambda_t) = V_t$ となる．この様に，Hamilton系における wave front $V_t$ は Def (3.1) の概念の特別な場合となる。Jänich はさらに，光学的距離の定める関数の特異点と Caustics（波面の特異点の軌跡）との関係を論じている。また，G. Wasserman は [15] でその安定性（局所的）について研究した。

問題 1．G. Wasserman の理論の大域化を行ない，数え上げ幾何学や obstruction theory を行なえ．

さて，Legendre map，wave front の例をいくつかのべる．

例 8．$\pi : \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$　$\pi(x; y; z) = (x; z)$ を standard Legendrian bundle とする．

$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を smooth function として，$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を $F(x, u) = \langle x, u \rangle - S(u)$ とおく．ただし，$\langle x, u \rangle$ は標準内積を表わす．この時 $L = \{ (x, u) \mid x = \frac{\partial S}{\partial u} \}$ は $m$ 次元多様体となり $i : L \to \mathbb{R}^{2m+1}$ を $i(x, u) = (x, u, F(x, u))$ と定義すると，$i$ は Legendre はめこみとなり，wave front は

$$\pi \circ i(L) = \{ (\tfrac{\partial S}{\partial u}, \langle \tfrac{\partial S}{\partial u}, u \rangle - S(u)) \mid u \in \mathbb{R}^m \}$$

となる．これは，$\mathbb{R}^{m+1}$ の中の $u$ で径数付けられた hypersurface であるが，特異点を持っていてもよい．特に $m = 1$ の場合，$S$ に凸性（$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \neq 0$）を仮定する．この時 $\mathbb{R}^1 \ni u \mapsto (\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial u} u - S(u)) \in \mathbb{R}^2$ は immersion で wave front は non-singular curve となる．今，$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \neq 0$ なので $\frac{\partial S}{\partial u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 1 対 1 で $x = \frac{\partial S}{\partial u}$ によって $u(x)$ が unique に定まる．i.e. $T(x) = x \cdot u(x) - S(u(x))$ という関数のグラフが wave front である。ところで，$S(u) \to T(x)$ は古典的な Legendre 変換である．Legendre 特異点の名前の由来がここにあると思われる．

例 9．$J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ を standard Legendrian bundle とみなす．$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を smooth function とする時，$j^1 f : \mathbb{R}^m \to J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ を $j^1 f(x) = (x, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, f(x))$ と定めると，これは Legendre immersion であり，wave front は $f$ のグラフである．この事は，wave front の特異点が，1 階偏微分方程式の一般解が古典的解になるための obstruction と見ること

ができる。([18], Guckenheimer 参照).

## 4. Generating family

$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ を smooth function で $0 \in \mathbb{R}^k$ が $d_2F$ の regular value であるとする(ただし, $d_2F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ を $d_2F(q,x) := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(q,x), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(q,x)\right)$ と定める). この時, $F$ は <u>generalised phase function</u> と呼ばれる。この時, $\Sigma(F) = d_2F^{-1}(0)$ は smooth な m次元多様体となる.

Lemma (4.1). $\mathbb{R}^{2m+1}$ の座標を $(x, y, z)$, contact structure を $\omega = dz - y \cdot dx$ により定める。$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ を generalised phase function とする。この時, $\Phi : \Sigma(F) \to \mathbb{R}^{2m+1}$ を $\Phi(q, x) = \left(q, \frac{\partial F}{\partial q}(q,x), F(q,x)\right)$ と定めると, $\Phi$ は Legendre immersion である。

Theorem (4.2). (Arnol'd – Zakalyukin (1976)). 任意の Legendre submanifold は (at least locally) 上記の方法で構成される.

Def (4.3) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ を generalised phase function とする時, $\widetilde{F} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ を $\widetilde{F}(q, z, x) = F(q, x) - z$ と定義して, <u>generating family of the Legendrian immersion $\Phi_F$</u> と呼ぶ.

Arnol'd の教科書 [3] と我々の notation の比較: $\mathbb{R}^{2m+1}$ の座標を $(x, y, z)$, その上の contact structure を $dz - y \cdot dx$ とする

この時，Arnoldの教科書のP333では：任意のLegendrian submanifoldは以下の形であらわされる（局所的に）．

$I \cup J = \{1, \cdots, m\}$かつ$I \cap J = \phi$なる分割$I, J \subset \mathbb{N}$が存在し，また，smooth function $S : \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ $(S(x_I, y_J))$が存在して．

$$L = \{(x, y, z) \mid y_I = \frac{\partial S}{\partial x_I},\ x_J = -\frac{\partial S}{\partial y_J},\ z = S(x_I, y_J) + \langle y_J, x_J \rangle\}.$$

ここで，$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$を$F(x, y_J) = S(x_I, y_J) + \langle y_J, x_J \rangle$と定めると，$F$は，我々の意味でのgeneralised phase functionとなることがわかる。しかも，この時$\Phi(\Sigma(F)) = L$が成立する。

さて，Th(4.2)から，任意のLegendrian immersionは少なくともlocalにはgenerating familyを持つことがわかるが，それらのとり方の自由度は以下の様になる．

Def (4.3). 1) $f, g : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ $\downarrow \pi_m$ $(\mathbb{R}^m, 0)$ をsmooth function germsとする時，$f, g$が<u>P-K-同値</u>（<u>contact同値，V-同値</u>）とは，

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, 0) \\ \pi_m \downarrow & & \downarrow \pi_m \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^m, 0) \end{array}$$

を可換にするような，diffeomorphism germs $\Phi, \phi$が存在して，$\Phi^*(I(f)) = I(g)$をみたす事と定義する。ただし，$I(f) = \langle f \rangle_{\mathcal{E}_{m+k}}$で$\mathcal{E}_{m+k} = \{h \mid h : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, 0) \to \mathbb{R} : \text{smooth function germ}\}$。

2) さらに．$f:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R},0)$ に対して
$$\begin{array}{c}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,0)\\ \downarrow\\ (\mathbb{R}^m,0)\end{array}$$

$\tilde{f}:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ を $\tilde{f}(q,x,t):=f(q,x)\pm t^2$ と
$$\begin{array}{c}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R},0)\\ \downarrow\\ (\mathbb{R}^m,0)\end{array}$$

定めて．$\tilde{f}$ も $f$ と同値であるように 1)の同値関係を拡張して
<u>stably P-K-同値</u>と呼ぶ。

この時．

Theorem (4.4) (Hörmander-Weinstein-Arnol'd-Zakalyukin)

$\tilde{F}:((\mathbb{R}^m\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R},0)$ と $\tilde{G}:((\mathbb{R}^m\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{k'},0)\to(\mathbb{R},0)$
$$\downarrow\pi_{m+1}\qquad\qquad\qquad\downarrow\pi_{m+1}$$
$$(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},0)\qquad\qquad\qquad(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},0)$$

をある Legendrian immersion germ $i:(L,0)\to(\mathbb{R}^{2m+1},0)$ の generating families とする。この時，$\tilde{F}$, $\tilde{G}$ は stably P-K-同値である。

さらに一般に，Legendrian immersions の間に以下の自然な同値関係を導入する．

Def (4.5) $\pi:E\to M$ を Legendrian bundle，$i:(L,p)\to(E,q)$ と $i':(L',p')\to(E,q')$ を Legendrian immersion germs とする．この時．$W(i)=\mathrm{Image}(\pi\circ i)$ と表わす．

(1) $i$ と $i'$ が <u>Wave front equivalent</u> とは，$h:(M,\pi(q))\to(M,\pi(q'))$ という diffeomorphism germ が存在して $h(W(i))=W(i')$ を満たす事とする．

(2) $i$ と $i'$ が <u>Weak Legendrian equivalent</u> とは，diffeomorphism

germs $h:(L,p)\to(L,p')$ と $H:(M,\pi(q))\to(M,\pi(q'))$ が存在して $H\circ(\pi\circ i)=(\pi\circ i')\circ h$ を満たす事とする.

(3). $i$ と $i'$ が <u>Legendrian equivalent</u> とは, diffeomorphism germ $h:(L,p)\to(L',p')$ と fibre preserving contact diffeomorphism germ $H:(E,q)\to(E,q')$ が存在して $H\circ i=i'\circ h$ を満たす事とする。

Theorem (4.6) (Hörmander–Weinstein–Arnol'd–Zakalyukin)

$F:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R},0)$ と $G:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{k'},0)\to(\mathbb{R},0)$ を generalised phase function germs とする. この時, $\Phi_F$ と $\Phi_G$ が Legendrian equivalent である必要十分条件は, $\widetilde{F}$ と $\widetilde{G}$ が stably P-K-同値である事である.

Arnol'd–Zakalyukin は, この事実から, さらに以下の定理を示した.

Theorem (4.7) Theorem (4.6) と同じ情況の下で, $\Phi_F$ が Legendrian stable である必要十分条件は $\widetilde{F}:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R},0)$ が $\widetilde{F}|(0,0)\times\mathbb{R}^k=F|0\times\mathbb{R}^k$ の $\mathcal{K}$-versal deformation である事である。

従って, この定理の系として, $\dim L=m<6$ の Legendrian stable な singularities の Legendrian equivalent による分類のリストが, Arnol'd の関数芽の $\mathcal{K}$-同値による分類のリストから得られるわけである. この時, Arnol'd や Zakalyukin は, これらの特異点が generic である事も同時に主張している。しかし, あ

る種の横断正則性定理がそのためには必要なはずであるが，彼らの本や論文には explicit にはみあたらない．実のところ，generic envelope の特異点の記述のために Bruce が[4]で証明した様な横断正則性定理が Legendrian immersion に対しても成立しているはずなのである。このあたりの整理が必要とされる。

一般の次元に対しては，次の結果がある．

Theorem (4.8). (Zakalyukin − Izumiya[8]) Def (4.5) の notation において，$i$, $i'$ が Legendrian stable とすると，(1) も (2) も (3) も同値．

この定理の主張は，安定な Legendre immersion germs にかぎれば，その wave front germ によって，すべてが決定されるという事である。もちろん，他の同値関係 ((1) や (2)) についても安定という概念は存在する。

問題 2. (1) や (2) の同値関係について，安定性を特徴付け，さらにそれらの間の関係を調べよ．

また，$m \geq 6$ では，Legendrian equivalence による分類には，modality がでてくるので．

問題 3. Wave front の stratified set としての同値関係の研究を行なえ (付録参照)．

以上が，Arnold−Zakalyukin による Legendre 特異点に関する基礎理論の紹介である．

# II. Legendre 特異点の理論の発展と応用

## 1. One-Parameter Rearrangements of fronts (Zakalyukin [7])

だ円から等距離にある wave front の特異点の形成のプロセスは，つばめの尾を時間 t で切断した時にあらわれるカスプの形成のプロセスで説明できる事は最初にことわったが，ここでは，より一般に，時間 t に依って動く front の特異点の形成のプロセスを理解するために Legendre 特異点の 1-parameter family（の分類）に関する Zakalyukin の研究を紹介する。

(1.1) Families of fronts

$\pi : \mathbb{R}^{2m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ を standard Legendrian bundle，$L_t$ を $t \in \mathbb{R}$ に smooth に depend した $\mathbb{R}^{2m+1}$ の中の Legendrian submanifold の family とする。この family は generating family の言葉で言うと，以下の様に言いかえられる。

$F : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を smooth function germ で各 $t \in (\mathbb{R}, 0)$ に対して $F_t(q, x) := F(t, q, x)$ と定めると，$F_t : (t\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, t\times 0) \to (\mathbb{R}, *)$ が generalised phase function で，$\Phi_{F_t}(\Sigma(F_t))$ が $L_t$ をあたえる。今，各 $F_t$ が generalised phase function なので，

$$\Phi_F : \Sigma(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{2(m+1)+1},$$

by $\Phi_F(t, q, x) = \left(t, q, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial q}, F(t, q, x)\right)$

も，Legendre immersion である。ただし $\mathbb{R}^{2(m+1)+1}$ 上の contact structure は $dz - \tau dt - y\,dx$ （$(t, x, \tau, y, z) \in \mathbb{R}^{2(m+1)+1}$）であたえられるものとする。この $\Phi_F(\Sigma(F))$ を $L_t$ に対して $\mathcal{L}$ と書き，<u>extended manifold</u> と呼ぶ。この時，$\mathcal{L}$ の front $W_{\mathcal{L}}$ を考えてみると，それは $\pi(\Phi_F(\Sigma(F)))$ であり，$\Sigma(F)$，$\Phi_F$ の定義から，写像芽 $(\pi_{1+m}, F) : ((\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^k, 0) \to ((\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}, 0)$ の critical value である。一方，$L_t$ の front $W_{L_t}$ は，同様に，写像芽 $(\pi^t_m, F_t) : ((t\times\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^k, t\times 0) \to ((t\times\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}, t\times 0)$ の critical value である。この場合，$(\pi^t_m, F_t)(\Sigma(F_t)) = (\pi_{1+m}, F)(\Sigma(F)) \cap (t\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R})$ が明らかに成立するので，結局

$$W_{L_t} = W_{\mathcal{L}} \cap (t\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}) \quad \text{for } \forall t \in (\mathbb{R}, 0)$$

が成立。この $W_{\mathcal{L}}$ を <u>extended front</u> とよぶ。

今，$W(L^i_t)$ $(i=1.2)$ を Legendrian submanifold の families $L^i_t$ $(i=1.2)$ の2つの front の families とする時，

Def (1.1)，$W(L^1_t)$ と $W(L^2_t)$ が <u>diffeomorphic rearrangement</u> であるとは，以下の図式を可換にするような diffeomorphism germs $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{\Theta} (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}, 0)$，$(\mathbb{R}, 0) \xrightarrow{T} (\mathbb{R}, 0)$ が存在して $\Theta_t(W(L^1_t)) = W(L^2_{T(t)})$ for $\forall t \in (\mathbb{R}, 0)$ をみたす事である；

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow[\Theta]{} & (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}, 0) \\
\pi_1 \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi_1 \\
(\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{T} & (\mathbb{R}, 0)
\end{array}$$

さて今，この同値関係により"generic"な分類を低い次元の場合に試みようとするとき，Legendre stable な extended front の分類だけではもちろんいけない。そこで Zakalyukin は以下の様なプロセスを考えた。

1) extended generating family $\tilde{F}:((\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R},0)$ を stably P-K-同値で normal form へ reduce する。それは $m+1\leq 6$ の時は，Arnold のリストでわかる。

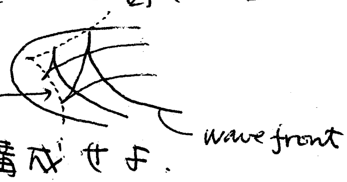
2) 次に，$\pi_1:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ を extended front $W_{\mathcal{L}}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ を保存するような diffeomorphism germ で simplest なものへ reduce する。

このプロセスで，彼は $m<5$ の場合の分類を行なっている。

(1.2) Rearrangement of Fronts in Hamiltonian systems

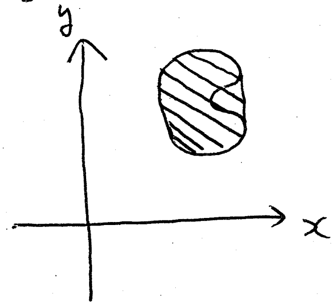
$M$ を $n$ 次元多様体，$H:T^*M\setminus 0\to\mathbb{R}$ を P8 における Hamilton 関数とする。この時，$\pi:\Sigma T^*M\to M$ 上へ reduce した Hamilton flow $\Phi_t$ を考える。9ページと同様にして，normally oriented hypersurface $V_0\subset M$ からその canonical lift $\Lambda_0\subset\Sigma T^*M$ を考えるとそれは Legendrian submanifold であった。この時，$\Lambda_t=\Phi_t(\Lambda_0)$ とおると，これも Legendrian submanifold となる。さらに，$K=H^{-1}(1)$ とすると，$T^*M$ 上の canonical 1-form は $K$ 上に contact structure を induce し，$\pi|:K\to M$ は Legendre bundle であることがわかる。しかも，これは，$\pi:\Sigma T^*M\to M$ に

Legendre equivalent であることもわかる。この時，$\Lambda_t$ に対応する Legendrian submanifold を $L_t \subset K$ とおく．この時 (Jänich [10]) によると，$\tilde{L} = \bigcup_t L_t$ は Lagrangian submanifold of $T^*M$ (定義は Arnold et al [ ] 参照) となる。この事実は，Arnold の言う「動く front の特異点の軌跡が Caustics をはき寄せる」ことの Hamilton system による説明である。




問題4. Legendre 特異点の unfolding 理論を構成せよ．

## 2 Singularities of convex hulls of smooth manifolds (Zakalyukin-Sedykh)




$M^k$ を $\mathbb{R}^n$ の smooth compact submanifold とする。M の convex hull $\mathcal{U}(M)$ とは，

$$\mathcal{U}(M) = \bigcap_{H \supset M} H .$$

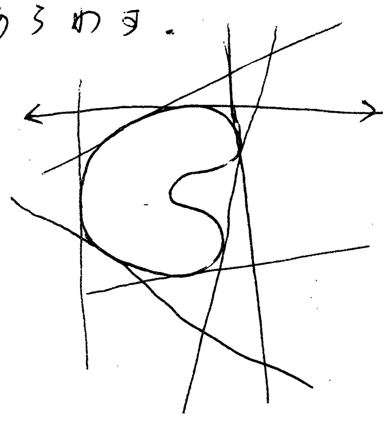
Hは$\mathbb{R}^n$のclosed half space．

$\mathcal{U}^0(M)$ を $\mathcal{U}(M)$ の boundary とすると，$\mathcal{U}^0(M)$は一般には，non-smooth な位相多様体となる．$\mathcal{U}^0(M)$ の特異点 (smooth にならない点) は微分方程式の研究や optimal control の理論にあらわれ，また，それらは Legendre特異点と密接に関連している。この特異点の (smoothな) 分類理論では $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ですでに moduli が現われる。

問題5. $\mathcal{U}^0(M)$ を canonical に stratify して，stratified set としての同値に関する分類理論を構成せよ。

$\mathcal{D}^0(M)$ は以下の様にして，Legendre 特異点と関係付けられる： $\Sigma T^*\mathbb{R}^n$ を §P と同様に定義する。この時，$\Sigma^*T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の oriented tangent element $(l, x)$ 全体と同一視できる．さらに，$\pi : \Sigma T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\pi((l,x)) = x$，$\rho : \Sigma T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow A_n$ を $\rho((l,x)) = l$ で定める。（ただし，

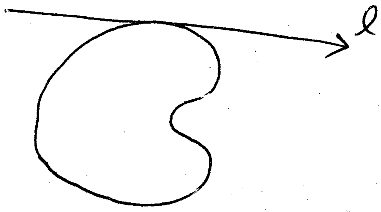
$A_n = \{$affine oriented hyperplanes in $\mathbb{R}^n\}$ で今 $l \in A_n$ に対して，$S(l)$ で $l$ に平行な oriented hyperplane で原点を通るもの，$r(l)$ で $l$ の原点から（$l$ の向きが定める normal 方向を用いての）距離をあらわすと，$A_n \ni l \longleftrightarrow (S(l), r(l)) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ で $A_n$ は $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ と同一視される。）この2つの写像はそれぞれ Legendrian fibration をあたえる。とくに $\tau(M) = \{M$ に接する tangent element 全体$\}$ と定義すると $\tau(M)$ は $\Sigma T^*\mathbb{R}^n$ の Legendre submanifold となりその $\rho$ による wave front $L(M) = \rho(\tau(M))$ は $M$ に接する hyperplane 全体をあらわす。



$l, -l \in L(M)$

この段階では上図の様に $M$ が $l$ の片側（指定しておく）にあるものだけをあつかっていないので，$L^c(M) = \{l \in L(M) \mid M$ は $l$ の負の方向の半空間に属する$\}$ と定義する．

この様に定義すると

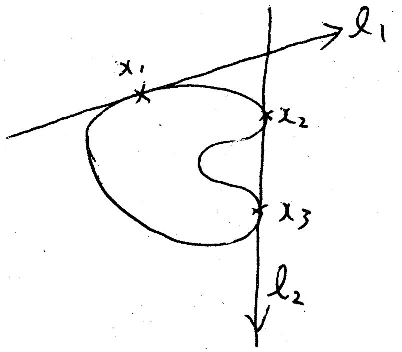



$l \in L^c(M)$

であるが $-l \notin L^c(M)$ となる.

次に、$m_l^c := \{x \in M \mid l$ は $x$ で $M$ に接している$\}$ $(l \in L^c(M))$

と定める。この時、以下の図の様な situation となる。



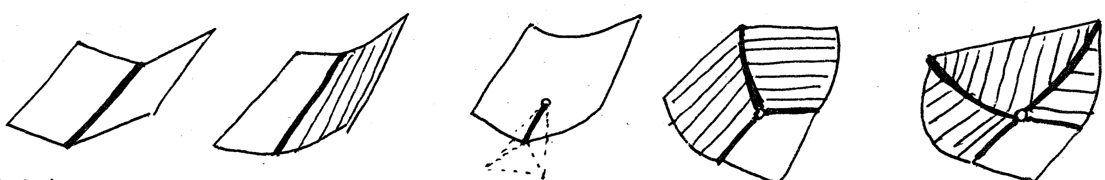

$m_{l_1}^c = \{x_1\}$

$m_{l_2}^c = \{x_2, x_3\}$

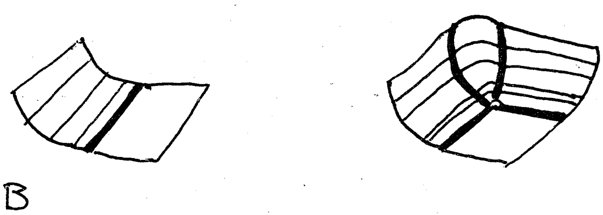
この図からもわかるように、$\mho^c(M) = \bigcup_{l \in L^c(M)} \mho(m_l^c)$

が成立する.

この様に、$\mho^c(M)$ の構造と wave front $L(M)$ は密接に関連している。Zakalyukin [16] と Sedykh [13] は、実際 M が $\mathbb{R}^3$ の中の曲線の場合(図A)と曲面(図B)の場合に $\mho^c(M)$ の特異点の分類を行なっている。



図A.



図B

問6. $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ という うめこみに対する, global theory を構成せよ.

## 3 Envelope (Bruce), Duals (Kulikov)

$X$, $Y$ を多様体 ($\dim X = \dim Y$) として $\Gamma \subset X \times Y$ を smooth hypersurface で natural projection $\pi_X : \Gamma \to X$ と $\pi_Y : \Gamma \to Y$ が submersion であるものとする. この時, $x \in X$ に対して $\Gamma_x := \pi_X^{-1}(x)$ は smooth manifold となり, $\Gamma_x$ は $Y$ の hypersurface とみなすことができる. 今 $M \hookrightarrow X$ を submanifold とする時, envelope of $\Gamma_x$ in $Y$ for any $x \in M$ $E(M)$ を以下の様に定義する.

$$\tilde{E}(M) := \{ (x,y) \in (M \times Y) \cap \Gamma \mid T_{(x,y)}\Gamma \supset T_x M \times \{0\} \},$$

$$E(M) := \{ y \in Y \mid (x,y) \in \tilde{E}(M) \text{ for some } x \in M \}.$$

この envelope の定義は Bruce [4] によるが, 古典的な定義の一般化になっている。$E(M)$ の局所構造は以下の様にして, 求まる: $y_0 \in E(M)$, $(x_0, y_0) \in \tilde{E}(M)$ とすると $x \in M$ について; $x_0$ の近くで $M$ は smooth immersion $\varphi : (\mathbb{R}^k, 0) \to (X, x_0)$ で径数付けられている. $\Gamma$ は $(x_0, y_0)$ の近くでは smooth function germ $F : (X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ の零面 $F^{-1}(0)$ とみてよい (ただし $0 \in \mathbb{R}$ は $F$ の regular value). この $F$, $\varphi$ を fix すると

$$(\tilde{E}(M), (x_0, y_0)) = \left\{ (\varphi(t), y) \;\middle|\; F(\varphi(t), y) = \frac{\partial F}{\partial t_i}(\varphi(t), y) = 0 \quad 1 \leq i \leq k \right\}$$

となる。

この様に、E(M)の特異点を研究するためには、関数族、$F(\varphi(t), y)$を研究すれば良いことになる。ここでE(M)に対して$F(\varphi(t), y)$の取り方の自由度は、yをパラメータとみて、P-K-同値(Def (4.3))の範囲にある。この事は、IのTh(4.4)と比較すると、E(M)の特異点がLegendre特異点と密接に関係している事を示唆するものである。実際Bruceは以下の定理を示した。

Theorem (3.1). $\dim Y \leq 6$ とする。この時、a residual set of embeddings $M \hookrightarrow X$に対して、E(M)の特異点はArnol'dのLegendre特異点のリストの中にあらわれる。

$\dim Y \geq 7$の時には以下の定理がある。

Theorem (3.2) (Izumiya [9]). a residual set of embeddings $M \hookrightarrow X$に対して、E(M)は局所的にはMT-stable map germsのcritical valueである。

さらに、Bruceは$\Gamma$がある条件を満たす時、(局所的に)$\Gamma$上にcontact structureが入り、本当にE(M)がwave frontになる事を示している。

問7. $M \hookrightarrow X$といううめこみ(はめこみ)のホモトピー(レギュラー)変形の範囲でE(M)の特異点の単純化のためのobstruction theoryを構成せよ。

E(M)の例として、$\mathbb{P}^n$の部分多様体のDualを考えてみよう。

$X = \mathbb{P}^n$, $Y = \check{\mathbb{P}}^n = \{$dual projective space of hyperplane in $\mathbb{R}^n\}$,

$\Gamma = \{(x, L) \in \mathbb{P}^n \times \check{\mathbb{P}}^n \mid x \in L\}$ と定めると，$M \subseteq \mathbb{P}^n$ に対して，$E(M)$ は古典的射影幾何学で考えられた Dual の一般化になっている．Kulikov [9] はこの Dual manifold を以下のような定式化で研究している．(ただし，$\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n$)．

$PT^*\mathbb{P}^n = \{\mathbb{P}^n$ の tangent hyperplanes$\} \ni (\ell, x) \overset{\varphi}{\mapsto} \ell \in \check{\mathbb{P}}^n = \{\mathbb{P}^n$ の hyperplane$\}$ という，Legendre bundle を考える。$\mathbb{P}^n \supset M$ を超曲面とする時 $j : M \longrightarrow PT^*\mathbb{P}^n$ を $j(x) := (T_xM, x)$ とすると，$j$ は Legendrian immersion となり．$\varphi \circ j(M) = \check{M}$ が $M$ の Dual である。特に，$M$ が non-singular algebraic curve の時，$M$ を generic，$d = \deg M$ とすると．$\#(\text{cusps of } \check{M}) = 3d(d-2)$ が，特性類の計算からわかる。ここで，$\check{M}$ の cusp は $M$ の変曲点に対応している，従ってこの公式は，古典的な Plücker 公式である。Kulikov はさらに，$M$ が 2 次元の時，$\#(\text{Swallow tails}) = 2d(d-2)(11d-24)$ という公式を導いている (石川氏の解説参照 [7])．

## 4．熱力学への応用 (J.-G. Dubois et J.-P. Dufour)

ここでは，Dubois-Dufour [5] に従って，Legendre 変換の理論とその熱力学への応用についてのべる．たとえば，閉じた symple な熱力学の空間を $R^5$ とする．この $R^5$ の座標を $S, V, T, P, E$ とする。ここで $S$ はエントロピー，$V$ は体積，$E$ は内部エネルギ，$T$ は温度，$P$ は圧力を表わす．さらに，我々

は，$\theta = dE - TdS + PdV$ という 1-form を準備する．この時，この system の定常状態のつくる曲面は，$\theta$ の最大積分多様体（i.e. $\mathbb{R}^5$ の Legendrian surface）となる．今 $\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$，$\chi(S, V) = (S, V, T(S,V), P(S,V), E(S,V))$ がその曲面を表わしているとしたら，積分多様体（i.e. $\chi^*(\theta) = 0$）ということから，$T(S,V) = \frac{\partial E}{\partial S}(S,V)$，$P(S,V) = -\frac{\partial E}{\partial V}(S,V)$ が成立する．

理論的には，この formulation で良いのだが，実験でたしかめようとする時，エントロピー $S$ を測定したりコントロールしたりする有効な手段が存在しない．従って，この状況を記述する他のパラメータ（たとえば，$T$：温度，$P$：圧力）への変換が必要になる．それが Legendre 変換である．$\mathbb{R}^5$ における変換 $C : (S, V, T, P, E) \mapsto (T, P, -S, -V, G)$（ただし，$G = E - TS + PV$）によって，$C \circ \chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ を考えるとこれは，$C$ で変換した曲面 $L_E$ の径数付けでありしかも，1-form $\tilde{\theta} = dG + SdT - VdP$ について $(C \circ \chi)^*(\tilde{\theta}) = 0$ である．この時 $G(S,V) = E(S,V) - T(S,V)S + P(S,V)V$ を《Gibbs の特性関数》といい，$(C \circ \chi)^*(dG) = (C \circ \chi)^*(\tilde{\theta}) = 0$ が成立する．さらに，$\pi : (T, P, -S, -V, G) \mapsto (T, P, G)$ による像 $\mathcal{L}_E = \pi(L_E)$ が《内部エネルギー》関数 $E(S,V)$ の Legendre 変換であり，熱力学者のつかう言葉でいえば，《Gibbs の自由エネルギー曲面》といわれるものである．この様に，

熱力学において，定常状態のつくる曲面それ自身よりむしろそれに付随する関数（$E(S,V)$のような）をLegendre変換したものの方が有効に使われるのである．Dubois-Dufourはより一般に，関数のI-Legendre transformという概念を導入した．

$\{1,\cdots,n\} \supset I$に対して$\{1,\cdots,n\}-I=J$と表わし，$\mathbb{R}^n \ni x$に対して，$x_I=(x_i)_{i\in I}$，$x_J=(x_j)_{j\in J}$として，$x=(x_1,\cdots,x_n)=(x_I,x_J)$と書く．$u_I\cdot x_I := \sum_{i\in I} u_i x_i$，$\frac{\partial f}{\partial x_I}(x) = {}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)_{i\in I}$，$|I|=\#I$と書き表わす．

Def (4.1)　$C^\infty(\mathbb{R}^n)\ni f$の<u>I-partial Legendre transformation</u>とは$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$の部分集合

$$\mathcal{L}I_f=\{(u,z)\mid \exists x_I\in\mathbb{R}^{|I|} \text{ s.t. } z=f(x)-x_I\cdot\frac{\partial f}{\partial x_I}(x),$$
$$u_I=\frac{\partial f}{\partial x_I}(x),\ u_J=x_J\}$$
の事とする．

注）$I=\{1,\cdots,n\}$の時が<u>Legendre transformation</u>である．

Def (4.2)　<u>$f$にassociateしたI-partial Legendre manifold</u>とは$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$のsubmanifold

$$LI_f=\{(u,t,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid z=f(x)-x_I\frac{\partial f}{\partial x_I}(x),\ u_I=\frac{\partial f}{\partial x_I}(x)$$
$$u_J=\frac{\partial f}{\partial x_I}(x),\ u_J=x_J,\ t_I=-x_I,\ t_J=\frac{\partial f}{\partial x_J}(x)\}$$
の事とする．

この$LI_f$は$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$上のcontact structure $dz-t\,du$に対してLegendre submanifoldになり，射影$\pi(u,t,z)=(u,z)$によって$\pi(LI_f)=\mathcal{L}I_f$が成立する．即ち，$\mathcal{L}I_f$は我々の言葉で言えばwave frontである．彼らは，$\mathcal{L}I_f$の分類理論を以下の

同値関係に対して構成した.

Def (4.3) $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$に対して.

1) $f, g$ が weak LI-同値 $\Leftrightarrow$ $\exists K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ : diffeo such that $K(u, z) = (\varphi(u), \kappa(u, z))$ & $\frac{\partial \kappa}{\partial z}(u, z) > 0$ : $K(\mathcal{L}I_f) = \mathcal{L}I_g$.

2) $f, g$ が LI-同値 $\Leftrightarrow$ $f(x) - u_I \cdot x_I$ と $g(x) - u_I \cdot x_I$ について, $x_I \in \mathbb{R}^{(I)}$ を内部変数, $u = (x_J, u_I) \in \mathbb{R}^n$ をパラメータとした unfolding として Right-同値.

3). $f, g$ が CI-同値 $\Leftrightarrow$ $LI_f$, $LI_g$ が $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の Legendre submanifold として Legendre 同値 ( I, Def (4.5)).

この時, これらの同値関係について, $f$ の perturbation に関する安定性の概念が通常の様に定義される. それらを, 弱LI-安定, LI-安定, CI-安定とそれぞれ呼ぶ. また, これらの同値関係の強弱は以下の様になっている:

LI-同値 $\Rightarrow$ CI-同値 $\Rightarrow$ 弱LI-同値.

にもかかわらず, 安定性については,

Theorem (4.4). (Dubois & Dufour [5]. Theorem 2.1).

$f \in C^\infty_{pr}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$f$ : CI-安定 $\Leftrightarrow$ $f$ : LI-安定.

問8. これら3種類の同値関係の間の関係をより精密にしらべよ. 特に, $f$ : CI-安定の時, 弱LI-同値 $\Rightarrow$ CI-同値

は成立するか？　さらにCI－同値⇒LI－同値はいつ成立するか？

さらに，彼らは，以下の様な分類定理を示した．

Theorem (4.5) (Dubois – Dufour [5] Theorem 3.1)　$n \leq 5$　$I = \{1, \cdots, p\}$，$p \leq n$ とするとき，LI－安定な関数芽は以下のリストにLI－同値である．

$n = 1,\ p = 1$

$\pm x_1^2,\ x_1^3;$

$n = 2,\ p = 1$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2,\ x_1^3 \pm x_2^2,\ \pm x_1^4 + x_2 x_1^2;$

$n = 2,\ p = 2$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2,\ x_1^3 \pm x_2^2,\ \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2;$

$n = 3,\ p = 1$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2,\ \pm x_1^4 + x_2 x_1^2 \pm x_3^2,\ x_1^5 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1^3;$

$n = 3,\ p = 2$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2,\ \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2,$
$x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3 x_1^3,\ x_1^2 x_2 \pm x_2^3 + x_3 x_2^2;$

$n = 3,\ p = 3$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2,\ x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2,$
$x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2,\ x_1^2 x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3 - x_2^2)^2;$

$n = 4,\ p = 1$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ \pm x_1^4 + x_2 x_1^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,$
$x_1^5 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1^3 \pm x_4^2,\ \pm x_1^6 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1^3 + x_4 x_1^4;$

$n = 4,\ p = 2$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,$
$x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3 x_1^3 \pm x_4^2,\ \pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3 x_1^3 + x_4 x_1^4,$
$x_1^2 x_2 \pm x_2^3 + x_3 x_2^2 \pm x_4^2,\ x_1^2 x_2 \pm x_2^4 + x_3 x_2^2 + x_4 x_2^3;$

$n = 4,\ p = 3$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,$
$x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm x_4^2,\ \pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 + x_4 x_1^4,$
$x_1^2 x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm x_4^2,\ x_2^2 x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 + x_4 x_2^3;$

$n=4,\ p=4$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,\ \pm x_1^4 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,$
$x_1^5 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm x_4^2,\ \pm x_1^6 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm (x_4-x_1^4)^2,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm x_4^2,\ x_1^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm (x_4-x_2^3)^2;$

$n=5,\ p=1$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^4 + x_2x_1^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^5 + x_2x_1^2 + x_3x_1^3 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^6 + x_2x_1^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 \pm x_5^2,\ x_1^7 + x_2x_1^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 + x_5x_1^5;$

$n=5,\ p=2$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^4 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^5 \pm (x_2-x_1^2)^2 + x_3x_1^3 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^6 \pm (x_2-x_1^2)^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 \pm x_5^2,\ x_1^7 \pm (x_2-x_1^2)^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 + x_5x_1^5,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^3 + x_3x_2^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^2x_2 \pm x_2^4 + x_3x_2^2 + x_4x_2^3 \pm x_5^2,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^5 + x_3x_2^2 + x_4x_2^3 + x_5x_2^4,\ x_1^3 \pm x_2^4 + x_3x_2^2 + x_4x_1x_2 + x_5x_1x_2^2;$

$n=5,\ p=3$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^4 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^5 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^6 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 + x_4x_1^4 \pm x_5^2,$
$x_1^7 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 + x_4x_1^4 + x_5x_1^5,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3-x_2^2)^2 + x_4x_2^3 \pm x_5^2,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^5 \pm (x_3-x_2^2)^2 + x_4x_2^3 + x_5x_2^4,$
$x_1^3 \pm x_2^4 \pm (x_3-x_2^2)^2 + x_4x_1x_2 + x_5x_1x_2^2;$

$n=5,\ p=4$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$x_1^4 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^5 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^6 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm (x_4-x_1^4)^2 \pm x_5^2,$
$x_1^7 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm (x_4-x_1^4)^2 + x_5x_1^5,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm (x_4-x_2^3)^2 \pm x_5^2,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^5 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm (x_4-x_2^3)^2 \pm x_5x_2^4,$
$x_1^3 \pm x_2^4 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm (x_4-x_1x_2)^2 + x_5x_1x_2^2;$

$n=5,\ p=5$

$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^4 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^5 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,$
$\pm x_1^6 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm (x_4-x_1^4)^2 \pm x_5^2,$
$x_1^7 \pm (x_2-x_1^2)^2 \pm (x_3-x_1^3)^2 \pm (x_4-x_1^4)^2 \pm (x_5-x_1^5)^2,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2,\ x_1^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm (x_4-x_2^3)^2 \pm x_5^2,$
$x_1^2x_2 \pm x_2^5 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm (x_4-x_2^3)^2 \pm (x_5-x_2^4)^2,$
$x_1^3 \pm x_2^4 \pm (x_3-x_2^2)^2 \pm (x_4-x_1x_2)^2 \pm (x_5-x_1x_2^2)^2.$

具体的な応用については，原論文を参照して下さい．

付録1. Global Problems.

$E \xrightarrow{\pi} M$ を Legendrian bundle $\Lambda \xrightarrow{i, i'} E$ を Legendrian immersions.

問1. $i \simeq i'$ : Legendrian regular homotopy $\Leftrightarrow$ $\boxed{?}$

i.e. Gromov-Lees 型の定理は成立するか? (Adachi-Yamato [1])

これが出来たら

問2 $i \simeq i'$ : Legendrian regular homotopy で $\pi \circ i$ の特異点が $\pi \circ i'$ ではどこまで単純化できるか?

この問については以下の2段階のアプローチが必要である.

(一番簡単な場合にのみ formulate する)

① $L\text{-}Imm(\Lambda, E; k) = \{ i : \Lambda \to E : \text{Legendrian imm} \mid \operatorname{rank} d(\pi \circ i) \geq k \}$

$L\text{-}Mon(T\Lambda, TE; k) = \{ \phi : T\Lambda \to TE : \text{conti. fibre pre. mono} \mid \phi_x(T_x\Lambda) \subset K_x$ & $\operatorname{rank}(d\pi \circ \phi_x) \geq k \}$ (前者は $C^\infty$-位相, 後者は C-0-位相)

この時, $d : L\text{-}Imm(\Lambda, E; k) \longrightarrow L\text{-}Mon(T\Lambda, TE; k)$ はいつ weak homotopy equivalenceか?

② $L\text{-}Mon(T\Lambda, TE; k)$ の存在等に関する obstruction はどこにあるか? 計算はできるか? (Maslov-Fuks-class の一般化精密化が必要, Vasiliev [4])

## 付録2 Legendre 特異集合の canonical stratification.

$F:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ を generalised phase function germ とする．この時，対応する Legendre immersion $\Phi_F:\Sigma(F)\to\mathbb{R}^{2m+1}$ の wave front $W(\Phi_F)$ は，unfolding $(\pi_m,F):(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},0)$ の critical value である．ここでは，generic な Legendre immersion に対して，その wave front が canonical stratification を持つ事を示す．注意することはあたえられた Legendre immersion に対して対応する generating family の取り方の自由度は stably P-K-同値の範囲にある（I, Th(4.4)）ので，考えられる jet space $J^l(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ 内の stratification は $\mathcal{K}$-invariant である必要があり．この点から Looijenga の stratification（[12]）は除外される．そこで，我々は Mather の stratification（[6]）を使う．ここでは以下の定理を示す．$\mathcal{A}^l(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})\subset J^l(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ を Mather による canonical stratification とする。また，generalised phase function germ $F$ に対して．$j_1^lF:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,0)\longrightarrow J^l(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ を $j_1^lF(q,x):=j^lF_q(x)$（ただし，$F_q(x):=F(q,x)$ とする）と定義する．

$$\boxed{\text{Theorem 1.}\quad j_1^lF \pitchfork \mathcal{A}^l(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}) \Rightarrow j^l(\pi_m,F)\pitchfork \mathcal{A}^l(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^m\times\mathbb{R})}$$

この定理が示されれば，$j_1^lF\pitchfork\mathcal{A}^l(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ ならば，$(\pi_m,F)$ が MT-stable となりその critical value set を canonical に stratify されるので，我々の目的は達せられる．

$J^l(m+k, m+1) \supset J^l_\pi(m+k, m+1) := \{ j^l_0(\pi_m, f) \mid f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}, 0) \}$

とおく.

| |
|---|
| Lemma 2. $X$ を K-invariant submanifold of $J^l(m+k, m+1)$ とすると $X \pitchfork J^l_\pi(m+k, m+1)$ が常に成立. |

従って, $X$ を K-invariant submanifold of $J^l(m+k, m+1)$ とする時, $X \cap J^l_\pi(m+k, m+1)$ は submanifold of $J^l_\pi(m+k, m+1)$. 今, $\mathcal{A}^l(m+k, m+1)$ を $J^l(m+k, m+1) - W^l(m+k, m+1)$ の Mather による stratification とすると $\mathcal{A}^l_\pi(m+k, m+1) := \mathcal{A}^l(m+k, m+1) \cap J^l_\pi(m+k, m+1)$ は, $J^l_\pi(m+k, m+1) - W^l_\pi(m+k, m+1)$ の Whitney stratification である。ただし, $W^l_\pi(m+k, m+1) := W^l(m+k, m+1) \cap J^l_\pi(m+k, m+1)$ とする。$\mathcal{A}^l_\pi(m+k, m+1)$ の stratum を $S^\pi_j(m+k, m+1)$ と書く (ここで, $\mathcal{A}^l(m+k, m+1)$ の stratum $S_j(m+k, m+1)$ の制限のことである).

| |
|---|
| Lemma 3 $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ smooth, かつ $j^l(\pi_m, F) \pitchfork \mathcal{A}^l_\pi(m+k, m+1)$ in $J^l_\pi(m+k, m+1)$ が成立とするとき, $j^l(\pi_m, F) \pitchfork \mathcal{A}^l(m+k, m+1)$ in $J^l(m+k, m+1)$ が成立 |

ここで, $\mathcal{A}^l_\pi(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}^l_\pi(m+k, m+1)$

とおくと, Th 1 を示すには以下を示せばよい.

| |
|---|
| Proposition 4. $j^l_1 F \pitchfork \mathcal{A}^l(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \Rightarrow j^l(\pi_m F) \pitchfork \mathcal{A}^l_\pi(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ in $J^l_\pi(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ |

以下, この Propo 4 を示すことを目標にする.

**Definition 5.** $\pi^\ell : J^\ell_\pi(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}) \to J^\ell(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ を
$\pi^\ell(j^\ell(\pi_m, F)(q,x)) := j^\ell F_q(x)$ と定める.

Mather の stratification の定義から ([6])

**Lemma 6.** $\pi^\ell| : J^\ell_\pi(m+k, m+1) \to J^\ell(k,1)$ に対して
$(\pi^\ell|)^{-1}(S_j(k,1)) = S_j^\pi(m+k, m+1)$.

さらに.

**Lemma 7** $(\pi^\ell|)^{-1}(W^\ell(k,1)) = W^\ell_\pi(m+k, m+1)$.

[proof of Proposition 4]. $\pi_1 : J^\ell_\pi(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}) \to J^\ell_\pi(m+k, m+1)$
$\pi_2 : J^\ell(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \to J^\ell(k,1)$ を canonical projections とすると,

・ $j^\ell(\pi_m, F) \pitchfork \mathcal{A}^\ell_\pi(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}) \iff \pi_1\circ j^\ell(\pi_m, F) \pitchfork \mathcal{A}^\ell_\pi(m+k, m+1)$

・ $j^\ell_1 F \pitchfork \mathcal{A}^\ell(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \iff \pi_2\circ j^\ell_1 F \pitchfork \mathcal{A}^\ell(k,1)$ が成立.

$\pi^\ell| : J^\ell_\pi(m+k, m+1) \to J^\ell(k,1)$ が submersion である事と,
Lemma 7 から $S_j(k,1) \in \mathcal{A}^\ell(k,1)$ に対して

$$(d\pi^\ell|)^{-1}(T_{\pi^\ell(z)} S_j(k,1)) = T_z S_j^\pi(m+k, m+1)$$

が成立. さらに, 図式

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, 0) \arrow[r, "j^\ell(\pi_m, F)"] \arrow[dr, "j^\ell_1 F"'] & J^\ell_\pi(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi^\ell"] & J^\ell_\pi(m+k, m+1) \arrow[d, "\pi^\ell|"] \\
 & J^\ell(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \arrow[r, "\pi_2"'] & J^k(k,1)
\end{tikzcd}$$

が可換な事から $(d\pi^\ell|)^{-1}(d(\pi_2\circ j^\ell_1 F)(T_0(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k))) = d(\pi_1\circ j^\ell(\pi_m, F))(T_0(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k))$

が成立する。この事実から $\pi_2\circ j^\ell_1(\pi_m, F) \pitchfork S_j(k,1) \Rightarrow$
$\pi_1\circ j^\ell(\pi_m, F) \pitchfork S_j^\pi(m+k, m+1)$ がわかる。 (Q.E.D)

## References


1. Adachi, M and Yamato, K., On the classification of Legendre immersions, these Proceedings

2. Arnol'd, V. I., Singularities in the Calculus of variations, J. of Soviet Math., 27, 3 (1984) 2679-2713

3. Arnol'd, V. I., Gusein-Zade, S. M., Varchenko, A. N., Singularities of Differentiable Maps I, Birkhauser, 1985

4. Bruce, J. W., Envelopes, duality and contact structures, Proceedings of Symposia in Pure Math. vol 40 (1983), 195-202

5. Dubois, J-G. et Dufour, J-P., La theorie des catastrophes V, Transformees de Legendre et thermodynamique, Ann. Inst. Henri Poincare, section A vol XXIX No.1 (1978) 1-50

6. Gibson, C. G., Wirthmuller, K., du Plessis, E. J., Looijenga, J. N., Topological stability of smooth mappings, Lecture Notes in Math. 552 (1976)

7. 石川剛郎., Topics on Real Enumerative Geometry, these Proceeding

8. Izumiya, S., On Legendrian singularities, Preprint

9. Izumiya, S., Local topological models of envelopes, to appear in Hokkaido Mathematical Journal (1987)

10. Janich, K., Caustics and Catastrophes, Math. Ann. 209. (1974) 161-180

11. Kulikov, V. S., Calculation of singularities of embeddings of generic algebraic surfaces in projective space $P^3$, Funct. Anal. Appl. 17, 3 (1983) 15-27

12. Looijenga, E., Structural stability of family of $C^\infty$-functions, Thesis (1974)

13. Sedyh, V. D., Structure of the convex hull of a space curve, Funct. Anal. Appl. (1986) 1140-1153

14. Vasiliev, V. A., Characteristic class of Lagrangian and Legendrian manifolds dual to singularities of caustics and wave fronts, Funct. Anal. Appl. 15 3 (1981) 164-179

15. Wasserman, G., Stability of caustics, Math. Ann. 216 (1975) 43-50

16. Zakalyukin, V. M., Singularities of convex hulls of smooth manifolds, Funct. Ann. Appl. (1978) 225-227

17. Zakalyukin, V. M., Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings, J. of Soviet Math., 27, 3 (1984) 2713-2735

18 Guchenheimer, J., Catastrophe and Partial Differential Equations, Ann. Inst. Fourier, 23, 2 (1973) 31-59

以上

1987年 2月 3日