数理解析研究所講究録
619巻 1987年 1-11

Topics on Real Enumerative Geometry

石川剛郎 (Goo ISHIKAWA)
奈良女子大・理

複素領域上の幾何学と異なり，実領域上の幾何学では，いわゆる"数え上げ"は，一般にきれいな形をとらない．それは典型的に，一変数多項式の零点を求める問題に象徴される．しかし，Strum の定理があり，Mapping degree の理論があり，いまだ解明はされていないが，"実数え上げ幾何"と呼ぶべきものが成立すると思われるふしがある．こんなことを [5] を読みながら考えた．ここでは，"実数え上げ幾何"を形成するとき参考になるような topics を集めてみた．

§1. Legendre 変換の特異点を数える．

$S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}P^n$ を "generic" な algebraic hypersurface of deg d とする．ここでは generic ということを定義しないが，hypersurfaces 全体の空間の中で proper algebraic set をのぞいたところで以下のことが成立する．

$PT^*\mathbb{R}P^n = \{$tangent hyperplanes of $\mathbb{R}P^n\}$,

とおくと，よく知られているように $PT^*\mathbb{R}P^n$ には自然に contact structureが入る．図式

$$\begin{array}{ccc} PT^*\mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^{n\vee} \\ {\scriptstyle j}\nearrow \quad \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}P^n & & \end{array}$$

を考える．ここでπはprojection，φは各tangent hyperplaneに対し対応する$\mathbb{R}P^n$のhyperplaneを対応させる写像，jは，$S_{\mathbb{R}}$の各点に，その点の$S_{\mathbb{R}}$のtangent spaceを対応させる写像である．すると，π, φはLegendre fibration，jはLegendre immersionとなる．$\varphi\circ j(S_{\mathbb{R}}) = S_{\mathbb{R}}^{\vee}$は$S_{\mathbb{R}}$のdualあるいはLegendre変換とよばれる．そこで，Legendre変換の特異性は，Legendre map $\varphi\circ j$の特異性としてとらえられる．たとえば次のような評価を得る：

$$n=1: \quad \#\text{ cusps of } S_{\mathbb{R}}^{\vee} \leqq 3d(d-2)$$
$$\equiv d \qquad (\mathrm{mod}.\ 2)$$

$$n=2: \quad \#\text{ swallow tails of } S_{\mathbb{R}}^{\vee} \leqq 2d(d-2)(11d-24)$$
$$\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}.\ 2).$$

(cf. [6], [7])．このような結果は，古典的なPlücker公式と結びつく．またLegendre cobordismと結びつく．Thom多項式の具体的な応用とも考えられる．

§2. 実代数関数の特異点を数える.

一般に X, Y を real algebraic manifold とし, $A \subset X \times Y$ を subvariety, すなわち, real algebraic correspondence とする. A を generic としたとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

の特異性を調べたい. このとき, 次の様な best possible な評価を得る.

(1) $X = Y = \mathbb{P}^1 \qquad A \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad \deg A = (d, r)$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leqq 2(d-1)r \\ s(\pi_{\mathbb{R}}) \leqq 2d(r-1), \end{cases}$$

ここで, $s(\cdot)$ は critical points の個数を表わす.

(2) $X = \mathbb{P}^2, Y = \mathbb{P}^1 \qquad A \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \quad \deg A = (d, r)$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leqq 3(d-1)^2 r \\ \kappa(\pi_{\mathbb{R}}) \leqq 3d^2(r-2) \end{cases}$$

ここで, $\kappa(\cdot)$ は cusps の個数.

(3) $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, Y = \mathbb{P}^1 \qquad A \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \deg A = (d, e, r)$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leqq (6de - 4d - 4e + 4)r \\ \kappa(\pi_{\mathbb{R}}) \leqq 6de(r-2) \end{cases}$$

これらの結果は Hilbert 第16問題の一般化としてとらえ

ることができる．また，この問題でも Thom 多項式の具体的な応用が重要になる．

§3. Hilbert 第16問題の前半（一般論の主要部）

この問題については，あまり知られていないので，とりわけ重要な結果を挙げておく．

X を実代数多様体 i.e. くわしくは (X, τ)，X：compact 複素多様体，$\tau : X \to X$ conjugation が与えられ，埋めこみ $e : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ で $e \circ \tau = \mathrm{conj} \circ e$ となるものが存在するとする．ここで conjugation とは anti-holomorphic な involution のことである．また $\mathrm{conj} : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ は，複素共役から定義される conjugation を表わす．

$$\mathbb{R}X = X_{\mathbb{R}} = X^{\tau} = \{ x \in X \mid \tau(x) = x \}, \quad X_{\tau} = X/\tau$$

とおくと，X^{τ} は C^{ω} submanifold，$\dim_{\mathbb{R}} X^{\tau} = \dim_{\mathbb{C}} X$，(又は $X^{\tau} = \phi$)．$\dim X = 1$ ならば X_{τ} は境界付"実曲面"，$\dim X = 2$ ならば X_{τ} は closed 4-mfd，一般に X_{τ} は orbifold となる．

$$P_t(X, K) = \sum_i \dim H_i(X; K) t^i \qquad (K：体)$$

$$\chi(X) = P_{-1}(X; K) \qquad (\text{Euler 標数})$$

とおく．X^{τ} のベッチ数の評価が次によって得られる．

Theorem (Harnack-Thom)

$$P_1(X^{\tau}; \mathbb{Z}/2) \leq P_1(X; \mathbb{Z}/2)$$

(等号成立のとき，(X,τ) を M-多様体 とよぶ)

Theorem.(Petrovskii-Oleinik-Kharlamov) $\dim_{\mathbb{C}} X = 2n$ のとき，

$$|\chi(X^{\tau})-1| \leq h^{n,n}(X)-1$$

ここで，$h^{n,n}(X)=\dim_{\mathbb{C}}\{\text{harmonic } (n,n)\text{-forms}\}$.

さらに，M-多様体の重要な性質として

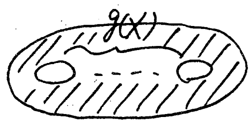
(1) $\tau_*: H_*(X;\mathbb{Z}/2)\circlearrowleft$, $\tau_*=id$

(2) $\chi(X^{\tau})\equiv\sigma(X) \pmod{16}$

ここで $\sigma(X)$ は X の signature である．

M-多様体の典型的なものは，$(\mathbb{P}^n, \mathrm{conj})$ である．

M-curve に対し，$X^{\tau} \cong S^1\amalg\cdots\amalg S^1$ $(g(X)+1)$，

$X_{\tau} \cong$ 

となる．X が M-surface のとき，$X_{\tau}\cong S^4$ となるか，というのは，大きな問題に思える．この方面での未解決問題としては他に，Ragsdale-Viro 予想「X: 1-connected, $\dim X=2 \Rightarrow$ $\dim H_1(X^{\tau};\mathbb{Z}/2)\leq h^{1,1}(X)$」がある．

§4. 実代数関数の特異点を数える．(つづき)

いま，M-多様体の構成問題をとりあげてみる．$X^1\subset\mathbb{P}^2$ $\deg X=d$ に対しては Harnack (1876)，$X^2\subset\mathbb{P}^3$, $\deg X=d$ に対しては，Viro (1979) が示した．$X^1\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ $\deg X=(d,r)$ に対しては容

易である．$X^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ に関しては次に述べることにより構成される．

いま，$A \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$，$\deg A = (d, r)$ に対し，次数 (d, r) を制限したとき，A の種々の不変量がどんな制約をうけるか？ということをとりあげる．図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

について，A は平面曲線族 $\{\pi\varphi^{-1}[\lambda;\mu]\}_{[\lambda;\mu]\in\mathbb{P}^1}$ と思える．このとき　φ の (real) crit. pt $=$ curve の (real) sing. pt.，π の (real) cusp pt. $=$ envelope の (real) cusp. pt. が成立する．

Theorem　$A \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$，$\deg A = (d, r)$，一般の位置，$\mathbb{R}$ 上 def. に対し　次の <u>best possible</u> な一様評価がある；

$$\begin{cases} P_1(\mathbb{R}A; \mathbb{Z}/2) \leqq 3 + d^2 + 3(d-1)^2(r-1) & (r \geqq 1) \\ s(\mathbb{R}\varphi) \leqq 3(d-1)^2 r & (r \geqq 1) \\ \kappa(\mathbb{R}\pi) \leqq 3d^2(r-2) & (r \geqq 2) \end{cases}$$

一般に，$A \subset X \times \mathbb{P}^1$ を，X 上の line bdle L に対し，$p_1^*L \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r)$ への "transverse" な section の零点集合とするとき，

$$\begin{cases} P_1(\mathbb{R}A; \mathbb{Z}/2) \leqq P_1(A; \mathbb{Z}/2) = (3r-2)c_1(L)^2 - (2r-2)c_1(L)c_1(TX) + rc_2(TX) \\ s(\mathbb{R}\varphi) \leqq s(\varphi) = r(3c_1(L)^2 - 2c_1(L)c_1(TX) + c_2(TX)) \\ \kappa(\mathbb{R}\pi) \leqq \kappa(\pi) = 3(r-2)c_1(L)^2 \end{cases}$$

が成立する．ここで $c_i(\cdot)$ は Chern class．

この計算は Thom 多項式の具体的適用により得られる．

§5 Thom 多項式を使って数える．

$\Sigma \subset J^k(n,p)$ を座標変換で不変な algebraic set とする．$f: X \to Y$ に対し，$j^k f: X \to J^k(X,Y) \supset \Sigma(X,Y)$ を考え，$\Sigma f = j^k f^{-1}(\Sigma(X,Y))$ とおく．このとき，$j^k f$ が Σ に transverse ならば，Σf の Poincaré dual in X $= P(c(TX), f^*c(TY))$ と書ける．ここで重要なのは多項式 P が Σ にのみよることである．多項式 P を <u>Thom 多項式</u> とよぶ．

Thom 多項式の具体的応用は，次のような Process を通じて行なう．X を $\mathbb{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}$ の submanifold とし，$f: X \longrightarrow Y$ で，簡単のため $\operatorname{codim}\Sigma = \dim X$ とする．このとき $j^k f \pitchfork \Sigma$ ならば Σf は有限集合である；

$$\#\Sigma f = \langle 1, [\Sigma f]\rangle = \langle P, [X]\rangle .$$

多くの問題では，$P = \iota^*\alpha$ ，$\alpha \in H^*(\mathbb{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s})$，$\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}$ と表わすことができる．$\iota_*[X]$ の Poincare dual を β とおけば，したがって，

$$\#\Sigma f = \langle \iota^*\alpha, [X]\rangle = \langle \alpha, \iota_*[X]\rangle$$

$$= \langle \alpha\beta, [\mathbb{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}]\rangle = \int_{\mathbb{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}} \alpha\beta$$

Thom 多項式については，Porteus, Ronga, Gaffney, Ando 等の仕事がある．

§6. Mapping degree を使って数える.

まず言及すべきは，代数方程式の解の分岐を，Mapping degree の言葉で記述する Fukuda, Aoki, Sun, Nishimura 等の理論（cf. [6]）である．それについては，他に解説があると思う．ここでは，Mapping degree を使って，generic singularity を perturb したとき得られる cusps を数える話（[4]）をのべよう．

$f:\mathbb{R}^2,0\to\mathbb{R}^2,0$ を"generic"な singularity とする．f を perturb することにより multi-stable な $\tilde{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ をうる．もともと f は 0 以外では stable だから perturbation は 0 の十分小さな近傍上に support をもつようにできるが，このとき，$\tilde{f}$ の cusp (i.e. $(x,y)\mapsto(x,y^3+xy)$ at 0 と equivalent）の個数は，もともとの f からどのような制約をうけるだろうか？

Theorem ([4]) $f:\mathbb{R}^2,0\to\mathbb{R}^2,0$ を generic な map-germ $\tilde{f}:\tilde{D}^2\to D_\delta^2$ ，$(\tilde{D}^2=f^{-1}(D_\delta^2)\cap D_\varepsilon^2;\ 0<\delta\ll\varepsilon\ll1)$ を f の stable な perturbation とする．このとき，

$$\kappa(\tilde{f})\equiv 1+\frac{1}{2}(C(f)\text{ の branch の個数})+\deg f \pmod{2}$$

ここで注意したいのは，$C(f)$ は f の Jacobian determinant $Jf:\mathbb{R}^2,0\to\mathbb{R},0$ の零点集合であり，その branch の個数は，前出の Fukuda-Aoki-Suna; Nishimura により，やはり degree の言葉で記述できることである．

この考察は，図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{\ell},0 & \xleftarrow{F} & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\ell-1},0 & \xrightarrow{P_2} & \mathbb{R},0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle P_1} & & \\ & & \mathbb{R}^2,0 & & \end{array}$$

に対しても 適用できる．すなわち，Fを defining equation と考え，variety $A=F^{-1}(0)\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\ell-1}$ を考える．generic には，Fは isol. sing. であり，$\pi=P_1|A : A\to\mathbb{R}^2$ は，0 以外で multi-stable となる．Fを perturb して，$\tilde{A}=\tilde{F}^{-1}(0)$ が non-singular $\tilde{\pi}=P_1|\tilde{A}$ が multi-stable とできる．また，perturbation の support は好なだけ小さくとれる．$\tilde{\pi} : M\to D_\delta^2$; $M=D_\varepsilon^{\ell+1}\cap\tilde{\pi}^{-1}(D_\varepsilon^2)$ に対し次が成立する．

$$\kappa(\tilde{\pi}) \underset{(2)}{\equiv} \#(\text{comp. of } \partial M) + \tfrac{1}{2}\#(\text{branches of } C(\pi)) + \deg\pi .$$

先の場合は，$M\cong D^2$ であった．

証明は，Quine [8] の結果による．（この拡張は，泉屋周一氏により示唆された）

§7 $Q(f)$ を使って数える．

Eisenbud-Levine [2] の定理が出発点である．

$f : \mathbb{R}^n,0\to\mathbb{R}^n,0$ C^∞ map-germ, $Q(f)=\mathcal{E}_n/\langle f_1,\cdots,f_n\rangle$ とおく．$\dim_{\mathbb{R}}Q(f)<+\infty$ のとき，

$$|\deg f| = \dim_{\mathbb{R}}Q(f) - 2\dim_{\mathbb{R}} I .$$

ここで，I は $I^2=0$ をみたす $Q(f)$ の ideal のうち極大なもの．

これは，$\deg f = \operatorname{sign}\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ という記述から導びかれ

る. ここで, $\langle\ ,\ \rangle_\varphi : Q(f)\times Q(f)\to\mathbb{R}$ は, functional $\varphi : Q(f)\to\mathbb{R}$ $\varphi(Jf)>0$ なるものに対し, $\langle h,k\rangle_\varphi=\langle hk\rangle_\varphi$ により定義される. signature $\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ は φ によらない。

Mapping degree により記述される invariants は, したがって, 種々の f の algebra $Q(f)$ により記述される.

最後に福田拓生氏による問題を挙げておく.

「$f:\mathbb{R}^n,0\to\mathbb{R}^p,0$ の topological invariants を $Q(f)$ から絞り出せ」

以上

References

[1] V.I. Arnol'd, Singularities of systems of rays, Russ. Math. Surveys 38-2(1983), 87-176.

[2] D. Eisenbud, H.I. Levine, An algebraic formura for the degree of a C^∞ map-germ, Ann. of Math., 106(1977), 19-38.

[3] T. Fukuda, Local topological properties of differentiable mappings II, Tokyo J. of Math., 8-2(1985), 501-520.

[4] T. Fukuda, G. Ishikawa, On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity, preprint.

[5] S.L. Kleiman, The enumerative theory of singularities, in Real and Complex Singularities, ed. by P. Holm, Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1977.

[6] V.S. Kulikov, the calculation of the singularities of the embedding of a generic algebraic surface in the projective space $\mathbb{P}^3$, Funct. Anal. Appl., 17(1983), 176-186.

[7] T. Nishimura, T. Fukuda, K. Aoki, An algebraic formula for the topological types of one parameter bifurcation diagrams,

[8] J.R. Quine, A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 236(1978), 307-314.