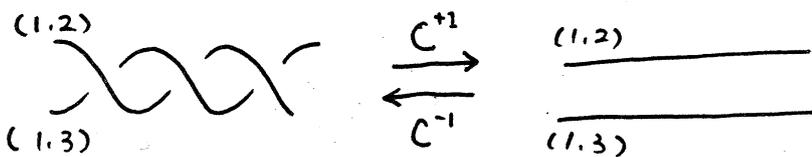


球面の Branched Covering

大阪市大 作間 誠 (Makoto Sakuma)

全ての closed orientable n -manifold は n 次元球面 S^n の branched covering にちがいない。特に $n = 1, 2, 3$ の場合、sheet の数はそれぞれ 1, 2, 3 とできる事が知られてゐる ([7, 12])。 $n = 1, 2$ の時、各 n -manifold の S^n の n -fold branched covering と 1-2 の表示は一意であるが、 $n = 3$ に對しては、一意性は成立しない。実際、次の操作 ($C^{\pm 1}$ -move と呼ぶ) で irregular 3-fold cover は不変である ([6, 11])。



では、逆に、同じ 3 次元多様体を与える S^3 の irregular 3-fold coverings は上の操作で結び合えるかという素朴な疑問が出てくる。この問題は、最近、問題提出者の Montesinos 自身により、否定的に解かれた ([14])。

ここでは、その証明、及び周辺の話題を紹介する。

§1. S^3 の simple 3-fold covering

L を S^3 内の link, $\phi: \pi_1(S^3 - L) \rightarrow \bar{S}_3$ を
3次の対称群 \bar{S}_3 への link group の transitive representation
とある。 $\phi(\text{meridian}) = \text{互換}$ とする時、 ϕ を simple
representation と呼ぶ。 $\text{st}_\phi(1)$ に対応する (S^3, L) の
branched covering を simple 3-fold cover (of (S^3, L))
と呼ぶ。 [一般に、 d -fold branched cover $p: M \rightarrow N$
に對して、 $\#p^{-1}(x) = d$ or $d-1$ ($\forall x \in N$) が成り立つ時、
 p を simple branched covering と呼ぶ。 $\dim M = 2, 3$
の時、 simple branched covering は branched covering
全体の中で "generic" である事が示されている [1].]
Montesinos [14] は次を示した。

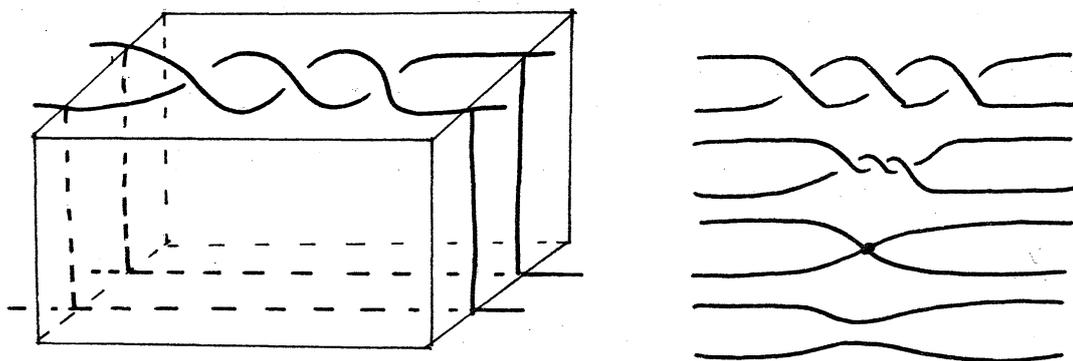
Theorem 1.1 Simple 3-fold coverings $P_1, P_2: \# S^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ へ、 (その branch sets が) $C^{\pm 1}$ -move の有限回の操作で切り合わりものが存在する。

(証明) 4次元 torus $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ 及びその Handle 分解 $H_0 \cup 4H^1 \cup 6H^2 \cup 4H^3 \cup H^4$ を考える。

$U = H^0 \cup 4H^1 \cup 6H^2$, $V = 4H^3 \cup H^4 \cong \#^4 S^1 \times B^3$
 とすると Montesinos [13] に従う. simple 3-fold
 coverings $P_1: U \rightarrow B^4$, $P_2: V \rightarrow B^4$ が存在する.
 $p_1 = P_1|_{\partial U} \cong \#^4 S^2 \times S^1$, $p_2 = P_2|_{\partial V} \cong \#^4 S^2 \times S^1$ は simple
 branched coverings $\#^4 S^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ を与える.

Lemma 1.2 $\tau \in L$. P_1 と P_2 が C^{21} -move の有限回
 の操作で初め合えば, p_1 と p_2 は "regular homotopic"
 である. すなわち, (level preserving) branched covering
 $p: (\#^4 S^2 \times S^1) \times I \rightarrow S^3 \times I$ で $p|_{\partial} = p_1 \cup p_2$ とする
 p が存在する.

Proof. P_1, P_2 の branch line L_1, L_2 が 1 回の
 C^{21} -move で初め, T -場合に示せば十分である. この時.
 次の図で示される様に, $S^3 \times I$ 内の proper surface F で, (a)
 $S^3 \times 0 \cap F = L_1$, $S^3 \times 1 \cap F = L_2$; (b) F は trefoil knot と link
 とする non-locally flat point を一点持つ. L_1 は locally flat;
 とするものが存在する. trefoil knot の simple 3-fold
 covering が S^3 である事に注意すると $F \subset S^3 \times I$ の
 simple 3-fold covering が $(\#^4 S^2 \times S^1) \times I$ である事がわかる.



従, 2. もし P_1 と P_2 が C^1 -moves で結び合える
 ならば, 3-fold branched covering $P_1 \cup p \cup P_2$:
 $U \cup (\#S^2 \times S^1) \times I \cup V (\cong S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1) \rightarrow B^4 \cup S^3 \times I \cup B^4 (\cong S^4)$
 を得る。しかし, これは次のセクションで紹介する
 Berstein-Edmonds [2] の定理の系として得られる
 次の事実に反する。

Fact $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ は S^4 の 3-fold covering
 にはならない。

特に, P_1 と P_2 が regular homotopic にはない事が
 示された。[$\deg P_1 = \deg P_2$ 取, P_1 と P_2 は homotopic
 にはない。] 尚, branched coverings の bordism に
 関しては, Hirsh [8, 9] により次が示されている。

(1) $P_1, P_2 : M^3 \rightarrow N^3$ regular homotopic,
 $\deg P_1 = \deg P_2 = 2 \neq 3$. $P_1 \simeq P_2$ is equivalent.

(2) $P_1, P_2 : S^3 \rightarrow S^3$, $\deg P_1 = \deg P_2 \neq 3$.
 $P_1 \simeq P_2$ is regular homotopic.

(3) $P_1 : M^3 \rightarrow S^3$, $P_2 : M^3 \rightarrow S^3$, $\deg P_1 = \deg P_2 \neq 3$.
 $P_1 \simeq P_2$ is bordant. i.e. $\exists W$: cobordism
 between M^3 and M^3 , $\exists p : W \rightarrow S^3 \times I$. branched
 covering, st. $p|_{\partial W} = P_1 \cup P_2$.

§ 2 Branched covering of degree

Closed orientable n -manifold M^n ($n \geq 3$) is

cup length $\text{cup } M^n \in \mathbb{Z}$ is defined.

$$\text{cup } M^n = \max \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} \exists u_1, \dots, u_r \in \tilde{H}^*(M^n; \mathbb{C}) \\ \text{st (1) } u_i : \text{homogeneous} \\ \text{(2) } u_1 \cup \dots \cup u_r \neq 0 \end{array} \right\}$$

Example $\text{cup}(\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n) = n$, $\text{cup } S^n = 1$

Berstein-Edmond [2] is \mathbb{Z} is \mathbb{Z} .

Theorem 2.1 $p : M^n \rightarrow N^n$ branched covering

is \mathbb{Z} . $\deg p \geq \text{cup } M^n / \text{cup } N^n$

Corollary 2.2 $p: M^n \rightarrow S^n$ branched cover
とあると, $\deg p \geq \text{cup } M^n$

セクション I の Fact は この Cor. の 特別な 場合
である。又, Introduction で 述べている様に, closed orientable
manifold M^n を S^n の branched cover と して 表わす時,
 $n = 1, 2, 3$ の とき, $\text{degree} = n$ と 出来る 事 が 知られて
いる 事。この degree と $\dim M$ の 一致 は 上の
Cor. に より 納得 できる。 [$\text{cup } M^n \leq n$ に 注意 せよ。]
以下, 定理 の 証明 の アイデア を Edmonds [5] に
従って, 簡単 な ケース を モデル として 解説 する。

$p: (M^n, \tilde{B}) \rightarrow (N^n, B)$ を d -fold branched covering,
 $\phi: \pi_1(N^n - B) \rightarrow \Sigma_d$ を 対応 する transitive representation
とする。 $G = \text{Im } \phi < \Sigma_d$, $H = G \cap \Sigma_{d-1}$ と 置く。
但し, Σ_d は 集合 $\{1, 2, \dots, d\}$ の 置換群 と 同視し,
 Σ_{d-1} は どの 内, 文字 1 を 固定 する 元 全体 が 作る Σ_d の
subgroup と 同視 する。 X を $\text{Ker } \phi$ に 対応 する
 (N^n, B) の branched cover と すると, 次の diagram を 得る。

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & \searrow \tilde{p} & \\ X/H \cong M^n & \xrightarrow{p} & N^n \cong X/G \end{array}$$

次の事実が、定理の証明の鍵となる。

Lemma 2.3 (see [4]) $\tilde{H}^*: H^*(X/G) \cong H^*(X)^G$

但し、cohomology は \mathbb{Q} -係数で、 $H^*(X)^G$ は G -不変な $H^*(X)$ の元全体が作る submodule を表わす。

M^n に対して $\text{height } M^n$ を次で定義する。

$$\text{height } M^n = \max \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} \exists u \in \tilde{H}^*(M^n) \text{ homogenous} \\ \text{st } \langle u^r, [M^n] \rangle \neq 0 \end{array} \right\}$$

次の定理は Theorem 2.1 の系であるが、その証明は、

Th. 2.1 の精神を良く表わしている。

Theorem 2.4 $N^n = S^n$ の時、 $d = \deg P \geq \text{height } M^n$

Proof. 今 $\text{height } M^n = r > d$ と仮定する。

すると $H^*(M^n)$ の homogenous element u で、 $\langle u^r, [M^n] \rangle \neq 0$ とするものが存在する。[この時 $\deg u = n/r$]

以下で、この u を用いて、 $H^i(X)^G \neq 0$ for some i ($0 < i < n$) を示す。すると、これは $H^i(X)^G \cong H^i(X/G) \cong H^i(S^n) = 0$ と矛盾し、証明は完了する。

$p_r^* : H^*(M^n) \xrightarrow{\cong} H^*(X)^H \hookrightarrow H^*(X)$ による u の像を u_1 と置く。 $G < S_d$ は transitive subgroup 仮。
 各 i ($1 \leq i \leq d$) に対し、 G の元 g_i で $g_i(1) = i$ と
 なるものが存在する。この時 $G = \bigcup_{1 \leq i \leq d} g_i H$ に注意
 すれば、 $u_i = g_i(u_1) = (g_i H)(u_1)$ とあると。
 $u_i^r = g_i(u_1^r) = u_1^r \in H^n(X)^H \cong H^n(M^n)$ を得る。
 [Remark. X は d 種多様体ならば $H^n(X) \cong \mathbb{C}$ である。]

G は \mathbb{C} の上には trivial に作用している。]

$u^r \neq 0$ in $H^n(M^n)$ であり、 $u_1^r + \dots + u_d^r =$
 $d u_1^r \neq 0$ in $H^n(X)$ である。よって、 $u_1^r + \dots + u_d^r$
 は u_1, \dots, u_d に関して対称式なので、基本対称式
 $S_k = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} u_{i_1} \dots u_{i_k}$ ($1 \leq k \leq d$) の多項式として
 表わされる。従って、 S_k は $H^*(X)$ の元として
 non-zero である。又、明らかに S_k は G -invariant。
 従って、 $i = \deg S_k = k \cdot \deg u = k \binom{n}{r} < n$ に対して
 $H^i(X)^G \neq 0$ を得る。 \square

§3. Branch set

3次元以下では、branch set は locally flat
 submanifold に取り替わることができた。しかし、一般の次元で
 は、これは不可能である。実際次の事実が知られている。

$p: (M^n, \tilde{B}^{n-2}) \rightarrow (S^n, B^{n-2})$ branched covering \exists .

(1) (Bernstein - Edmonds [2]) B^{n-2} : locally flat submanifold, M^n : spin n manifold.

$$w(M^n)|_{\tilde{B}} = 1, w(M^n)|_{M^n - \tilde{B}} = 1.$$

但 $w(M^n)$ is M^n の Stiefel-Whitney class.

特 \Rightarrow quaternion projective space HP^{2n} ($n \geq 1$) is S^{8n} の locally flat submanifold \exists \Rightarrow branched cover \exists (cf. [1]).

(2) (Brand [3]) $M^n = \mathbb{C}P^n$

$\Rightarrow B$ is locally flat submanifold (cf. [1])

(3) (Brand [3]) $M^n = \mathbb{R}P^n$, B : locally flat

$$\Rightarrow n = 2^t \pm 1$$

(4) (Little [10]) $M^n = \mathbb{R}P^n$, B : locally flat

\Rightarrow orientable $\Rightarrow n = 1, 3, 7$

References

- [1] L. Bernstein and A. Edmonds: On the construction of branched of low-dimensional manifolds. Trans. A.M.S. 247 (1979), 87-124.
- [2] _____: The degree and branch set of a branched covering. Inv. Math. 45 (1978), 213-220.
- [3] N. Brand: Necessary condition for the existence of branched coverings. Inv. Math. 54 (1979), 1-10.
- [4] G. Bredon: Introduction to compact transformation groups. Pure and Applied Math. 46, Academic Press. 1972.

- [5] A. Edmonds: The degree of a branched covering of a sphere. Geometric topology, Academic Press (1979), 337-343.
- [6] R.H. Fox: A note on branched cyclic coverings of spheres. Revista Math. Hisp.-Amer. 32 (1972), 158-166.
- [7] H.M. Hilden: Three fold branched coverings of S^3 . Amer. J. Math. 98 (1976), 989-997.
- [8] U. Hirsh: On regular homotopy of branched coverings of the sphere. Manuscripta Math. 21 (1977), 293-306.
- [9] _____: Bordismus verzweigter Uberlagerungen von niderig-dimensionalen Sparen. Manuscripta Math. 29 (1979), 1-10.
- [10] R.D. Little: Projective n-space as a branched covering with orientable branch set.
- [11] J.M. Montesinos: Sobre la Conjectura de Poincare y los recubridores ramificados sobre un nudo, Thesis, Madrid 1971.
- [12] _____: Three manifolds as 3-fold branched covers of S^3 . Quart. J. Math. 27 (1976), 85-94.
- [13] _____: 4-manifolds, 3-fold covering spaces and ribbons. Trans. A.M.S. 245 (1979), 219-237.
- [14] _____: A note on moves and on irregular coverings of S^4 . Contemporary Math. 44 (1985), 345-349.