数理解析研究所講究録
620巻 1987年 83-88

Constructions of Fibered 2-knots

東大理　斎藤 昌彦 (Masahico Saito)

Fibered 2-knots の構成法としてよく知られたものには, Zeeman の twist spinning とその拡張と, Asano-Yoshikawa の方法とがあるが, 前者は, fiber は豊富にできるが monodromy には finite order という制限がつき, 後者は, monodromy は豊富にできるが, fiber は punc($\# S^2 \times S^1$) だけである。この, fiber の豊富さと monodromy の豊富さとの背反関係は, fiber の Thurston norm と深いかかわりがあり, fiber が irreducible で豊富な monodromy をもつ fibered 2-knot を構成することの困難さにつながっている。([3]参照)

特に fiber が puncT^3 の場合は, [1] でくわしく調べられているが, ここでは, [3] で使われた方法を一般化した形で述べる。

構成法

KをS^{4}内のfibered ribbon 2-knot（fiberはpunc($\# S^2\times S^1$) $=(\# S^2\times S^1)^0$であり，monodromyをhとすれば，
$S^4 \setminus K = (\# S^2\times S^1)^0 \times I / h$ とかける）で，次の(i),(ii)を満たすものとする。

(i) essential simple closed curve $\gamma \subset (\# S^2\times S^1)^0$で，

$$h|_\gamma = \text{identity},$$

γ は homologous to 0 in $H_1((\# S^2\times S^1)^0 ; \mathbb{Z})$

をみたすものが存在する。

(ii) $\Gamma = \gamma \times I / h \subset (\# S^2\times S^1)^0\times I/h = S^4\setminus K \subset S^4$

とするとき，$\Gamma \cong T^2$であるが，このΓがS^4内でunknottedである。（i.e. solid torus $S^1\times D^2$をboundする）

このとき，Γに沿って"equivariant $\frac{1}{p}$-Dehn surgery"（各fiber内のγに沿って"$\frac{1}{p}$-surgery"となるような，S^4内でのΓに沿ったsurgery）をすると，新らしいfibered 2-knot $\tilde{K}\subset S^4$ができる。（用語の定義と証明については[3]参照）

$\tilde{K}$のfiberは$(\# S^2\times S^1)^0$をγに沿って"$\frac{1}{p}$-surgery"したものであり，monodromyはhから誘導されるものである。

とくに，fiberの1次元homology群上は，もとのKと同じなので，Alexander polynomialは不変である。

例

$\underset{4}{\#} S^2 \times S^1$ 内に，fig. 1 のような simple closed curve γ をとる。

$\underset{4}{\#} S^2 \times S^1 = (\underset{4}{\natural} S^1 \times D^2) \underset{\partial}{\cup} (\underset{4}{\natural} S^1 \times D^2)$ であるが，$F = \partial(\underset{4}{\natural} S^1 \times D^2)$ とおく。（F は fig. 1 において，ちょうど紙面に相当する。）

$\gamma \subset F$ であることに注意する。また，$\underset{4}{\#} S^2 \times S^1$ 内に，embedded tori T_i （$i = -2, -1, 0, 1, 2$）を fig. 2～6 の様にとる。

T_i は γ と disjoint であり，また，F に関して対称である。

T_i に沿った "right handed round Dehn twist"（right handed Dehn twist $\times S^1$，fig. 7 参照）を τ_i とし，

$$h = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_{-1} \circ \tau_{-2} \ : \ \underset{4}{\#} S^2 \times S^1 \circlearrowleft$$

とおく。 h は F に関して対称であり，h が induce する automorphisms $h_\# : \pi_1(\underset{4}{\#} S^2 \times S^1) \circlearrowleft$，$h_* : H_1(\underset{4}{\#} S^2 \times S^1 ; \mathbb{Z}) \circlearrowleft$ について，次のことが成り立つ。

（1） 群 $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, t \mid t, \ t x_1 t^{-1} h_\#(x_1)^{-1}, \cdots \ t x_4 t^{-1} h_\#(x_4)^{-1} \rangle$
は Andrews-Curtis moves で trivial presentation になる。
（$x_1, \cdots x_4$ は fig. 1 に図示された $\pi_1(\underset{4}{\#} S^2 \times S^1)$ の生成元）

（2） $\det(tI - h_*) = t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 6t + 1$

したがって Asano-Yoshikawa の方法により，h を monodromy とする fibered ribbon 2-knot $K \subset S^4$ ができ，γ は h で不変である。

また，$B = (\underset{4}{\natural} S^1 \times D^2) \times I / h$ は homotopy 4-ball，∂B は homotopy 3-sphere である。 $\partial B \supset \Gamma = \gamma \times I / h$ であるから，

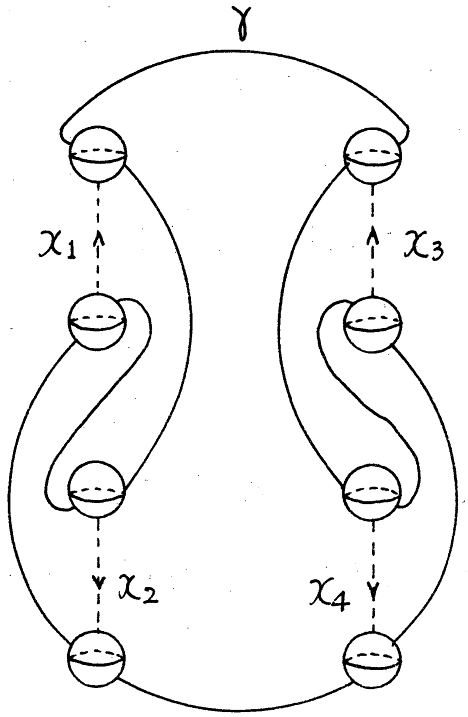

fig. 1

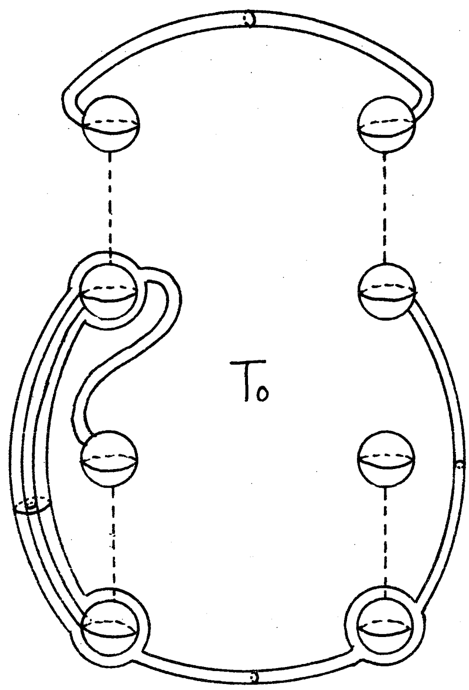

fig. 2

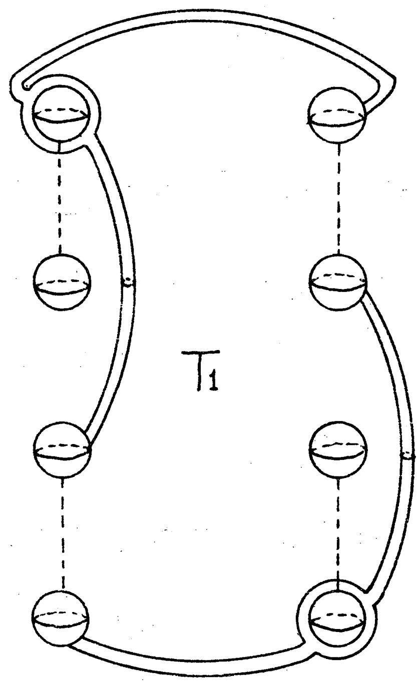

fig. 3

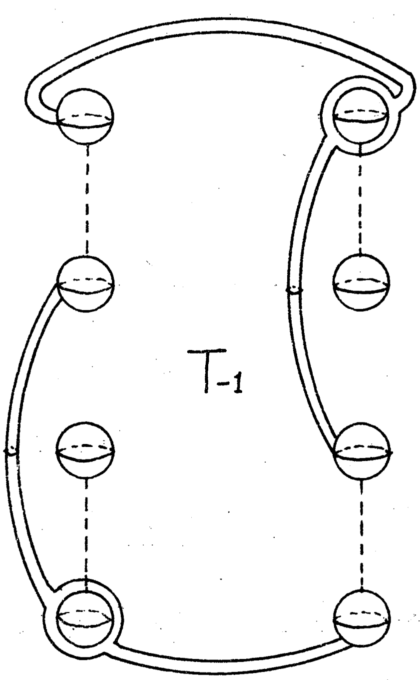

fig. 4

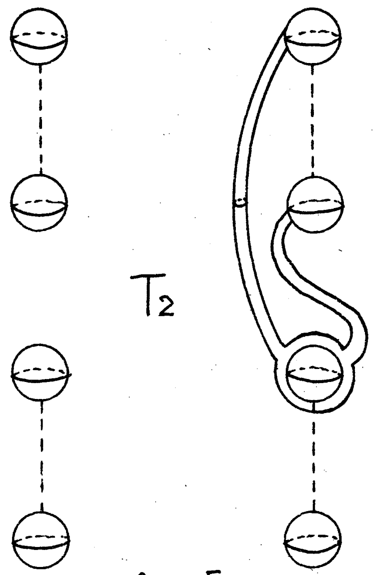

fig. 5

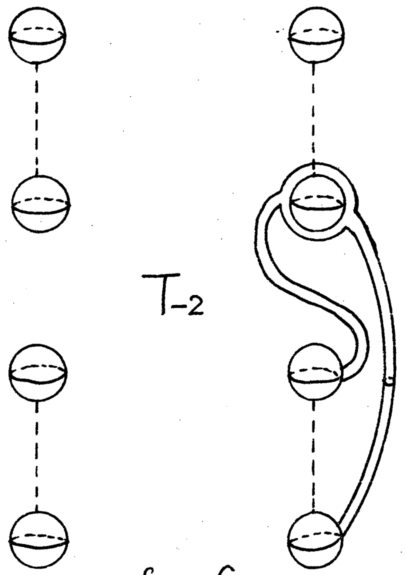

fig. 6

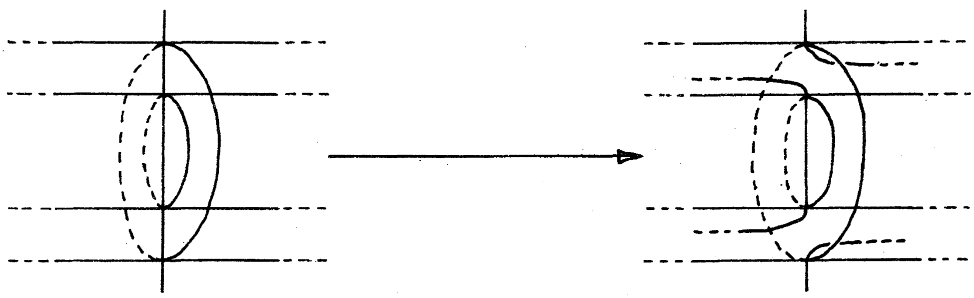

fig. 7

Γ は S^4 内で homotopically unknotted である。したがって構成法の(i)は満たし，(ii)は"unknotted"のかわりに"homotopically unknotted"であるような K，γ が得られた。これから homotopy S^4 内の fibered 2-knot $\tilde{K}$ で，fiber が irreducible であるものが構成できる。これが実際 S^4 と diffeomorphic であることを示すためには，[2]で用いられた様に，Montesinos の handle presentation で，Andrews-Curtis moves を handle sliding で実現しなければならない。

（この例自体は(2)の Alexander polynomial の対称性からしても[3]の例と一致してしまう可能性がある。）

References

[1] I.R. Aitchison, J.H. Rubinstein
Fibered knots and involutions on homotopy spheres
Contemporary Math. A.M.S. 35 (1984) 1-74

[2] I.R. Aitchison, D.S. Silver
On certain fibered ribbon disc pairs (preprint)

[3] M. Saito
Fibered 2-knots and Thurston norm
数理解析研究所講究録 575 (1985) 198-212