

Normal Graded rings について (Divison class group, regularity)

東海大・理・情報数理 渡辺 敬一

(Kei-ichi Watanabe)

Normal graded rings の class group について, 筆者は Demazure の構成法 [3] を用いて, 体上有限生成の場合 [9], Rees 環の場合 [10] について計算してみたが, 良く考えてみれば, この結果は一般の normal graded rings に対して成立するものであった。また, $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ で R_0 が体のとき, R がいつ孤立特異点をもつかを Demazure の構成法の言葉であらわすのは, 以前から気になっていた事だが, この問題は, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ がいつ regular となるか? に帰着される。以上の2つのトピックを扱うのが本稿の目的である。

§1. Normal graded rings とその Proj.

本稿で扱う ring はすべて Noetherian とする。

Notation を次のように定める。

(1.1) $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$: normal graded ring

$$X = \text{Proj}(R), \quad \mathcal{O}_X(n) = R(n)^\sim$$

$$D_+(f) = \{g \in X \mid f \notin g\} \quad (f \text{ は } R \text{ の homogeneous element,}$$

$$D_+(f) = \text{Spec}((R_f)_0), \quad H^0(D_+(f), \mathcal{O}_X(n)) = (R_f)_n).$$

$$Y = \text{Spec}_X\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)\right), \quad Y' = \text{Spec}_X\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)\right).$$

R は R_0 上有限生成だから, ある N に対して, $R^{(N)} = \bigoplus_{n \geq 0} R_{n+N}$ は R_0 上 R_N で生成されてゐる ([1], §1, Lemme 2). $\therefore$ 之に, この N に対して, $\mathcal{O}_X(n+N) = \mathcal{O}_X(n) \cdot \mathcal{O}_X(N) \cong \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(N)$. ($\forall n \in \mathbb{Z}$). Y' は Y の open subset, $Y - Y' := S \cong V\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)\right) \cong X$ である.

$Z = \text{Spec}(R)$, $R_+ = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ とおくと, $f \in R_n$, $n > 0$ について, $H^0(D_+(f), \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)) = R_f$ だから, $Y' \cong Z - V(R_+)$.
これらの事実をまとめると次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y' & \xrightarrow{\sim} & Z - V(R_+) \\
 & & \downarrow \text{open} & & \downarrow \text{open} \\
 (1.2) \quad S & \xrightarrow{\text{closed}} & Y & \xrightarrow{\phi} & Z = \text{Spec}(R) \\
 & \searrow \sim & \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\
 & & X = \text{Proj}(R) & \xrightarrow{\psi} & W := \text{Spec}(R_0)
 \end{array}$$

ここで ϕ, ψ は projective morphism である. ([8], (1.1), [10] 参照).

R が normal だから, X, Y は normal. また, ϕ は

birational で, $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ は R 上 finite より, $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = R$.

我々の状況ではいろいろな種類の graded ring が現われるが, まず, 素イデアル R_+ の高さによって分類される. ($R_+ \neq 0$ と仮定する.) $\text{ht}(R_+) = \dim R$ のときは, R_0 が体の場合だが, その対極にあるのが $\text{ht}(R_+) = 1$ の場合である. なお, 便宜上, 次の同値な仮定をおく事にしよう.

(a) R の商体は次数 1 の同次元で $\neq 0$ なものをもつ.

(b) $R_n \neq 0, R_{n'} \neq 0$ で $(n, n') = 1$ なる n, n' が存在する.

(c) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathcal{O}_x(n) \neq 0$.

(次数をつけかえれば, R は必ずこの仮定をみたす.)

(1.3) 次の条件は同値

(a) $\text{ht}(R_+) = 1$

(b) ψ は birational

(c) R はある Rees 環と同型. 即ち, $R \cong \bigoplus_{n \geq 0} \alpha_n \cdot T^n$,

α_n は R_0 の fractional ideal.

(証明) (a) $\Rightarrow$ (c). K を R_0 の商体とし, S を R の

$R_0 - \{0\}$ による localization (即ち, R_+ に於ける homogeneous

localization) とすると, $S_0 = K$, S は 1 次元 normal より

regular. ^(positively graded) regular graded ring R で $R_0 = K$ ^(なるものは) K 上の多項式環

だから [5], $S = K[T]$, $T \in S_1$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (a) はあきらかである.

さて, [3] による R の構成法を復習しよう. $R = H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ だから, Y が決まれば R が決まる. $T \in R$ の商体の degree 1 の同次元とすると, $\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_n \cdot T^n$ とかける. $\mathcal{O}_n \subset k(X)$ (X の函数体), $\mathcal{O}_X(n)$ は reflexive だから, $\mathcal{O}_n$ は divisorial である. Y の T の divisor を考えると, $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} k(X) \cong k(X)[T]$ だから, $\text{div}_Y(T)$ は $S + (\text{fibre 方向の divisor})$ の形である. $\text{div}_Y(T) = S + E = S + \pi^*(D)$ と書く. 但し, 一般には π は分岐するので, D は有理数係数 (即ち, $\text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元) となる. つまり, $V \subset X$, $\text{codim. } 1$, irreducible closed subvar. に対して, $F_V = (\pi^{-1}(V) \text{ に reduced structure を与えたもの})$ とすると, $\pi^*: \text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(Y)$ は $\pi^*(V) = q_V \cdot F_V$, $E = \sum p_V \cdot F_V$ のとき, $D = \sum p_V / q_V \cdot V$ となる.

$f \in k(X)$, open set $U \subset X$ をとるとき, $\pi^*(f) \cdot T^n \in H^0(U, \mathcal{O}_Y)$

$$\Leftrightarrow \text{div}_{\pi^{-1}(U)}(\pi^*(f)) + n \cdot \text{div}_Y(T)|_{\pi^{-1}(U)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \pi^*(\text{div}_U(f)) + n \cdot E|_{\pi^{-1}(U)} \geq 0 \Leftrightarrow \text{div}_U(f) + n \cdot D|_U \geq 0$$

となる. 従って, $\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(nD) \cdot T^n$, 即ち, $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_X(nD)$ である事がわかる. ここで, 上記の分岐指数 q_V が問題になり, $Y = \text{Spec}_X(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD) \cdot T^n)$ として再構成してみると, 上記の p_V と q_V は互いに素でなければならぬ事がわかる.

(1.1) の N に対して, $\mathcal{O}_X(N) = \mathcal{O}_X(ND) \cdot T^N$ は ample だから,

まとめると,

IR (1.4). (Demazure [3]) normal Noetherian graded ring $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ と R の商体の homogenous, degree 1 の元 T の組 (R, T) と, (X, D) , X は normal Noetherian scheme, $D \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\exists N > 0$, ND は ample Cartier divisor の組は 1 対 1 に対応する.

以下, $R(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n$ と書く事にする.

注. ([5], Chapter 5, §1). 上の状況で, D 自身が ample Cartier divisor である事は次の条件 (#) と同値である.

(#) $\exists d_0, \forall d \geq d_0, R^{(d)}$ は R_0 上 R_d で生成される.

例. (i) $R = \mathbb{C}[x, y, z]/(z^2 - x^3 - y^3)$ ($x, y \in R_2, z \in R_3$) のとき, $R^{(d)}$ が R_d で生成される $\Leftrightarrow d$ は偶数.

(ii) $R = \mathbb{C}[x, y, z]/(z^2 - x^3 - y^6)$ ($x \in R_2, y \in R_1, z \in R_3$) のとき, $R^{(d)}$ が R_d で生成される $\Leftrightarrow d \geq 3$.

(ii) では D が Cartier divisor, (i) では $2D$ が Cartier divisor だが, D はそうではない.

§ 2. Divisor class group, canonical class.

以下の R の divisor class group の計算は [9] のものと同じである。(ただ, 余計な仮定をしなくて良い).

$H\text{Div}(Y)$, $HP(Y)$ 等で, Y 上の homogeneous divisor, homogeneous principal divisor ("homogeneous" は grading $\mathcal{O}_Y = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)$ に関して) の群をそれぞれあらわす. R , Y' についてとも同様である. Samuel [11] により, $\mathcal{C}(R) \cong H\text{Div}(R)/HP(R)$ が知られている. また, $k(Y) = k(X)(T)$ だから, $HP(Y) = P(X) \oplus \mathbb{Z} \text{div}_Y(T)$ である. また, $H\text{Div}(Y') = H\text{Div}(Y)/\mathbb{Z} \cdot \text{div}_Y(T)$ である.

$\text{ht}(R_+) = 1$ のときと, $\text{ht}(R_+) > 1$ のときで, $\mathcal{C}(R)$ の計算方法は異なってくる.

(2.1) (i) $\text{ht}(R_+) > 1$ のとき, $\mathcal{C}(R) \cong \mathcal{C}(Y)$

(ii) $\text{ht}(R_+) = 1$ のとき, $\mathcal{C}(R) \cong \mathcal{C}(Y)$

(証明) divisor class group は codimension 2 以上の subset を除いても同型だから, $\text{ht}(R_+) > 1$ のとき, $\mathcal{C}(R) \cong \mathcal{C}(\mathbb{A}^n - V(R_+)) \cong \mathcal{C}(Y')$, $\text{ht}(R_+) = 1$ のとき, R は Rees 環だから, (1.2) の ϕ は codimension 2 以上の subspaces を除いても同型. ゆえに $\mathcal{C}(R) \cong \mathcal{C}(Y)$.

(2.2) Y , Y' の divisor class group は次の図式で計算できる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \rightarrow & P(X) & \rightarrow & \text{Div}(X) & \rightarrow & \mathcal{C}(X) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \\
 (2.2.1) \quad 0 & \rightarrow & HP(Y) & \rightarrow & H\text{Div}(Y') & \rightarrow & \mathcal{C}(Y') \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathbb{Z} \cdot \text{div}_Y(T) & \xrightarrow{\alpha'} & \bigoplus_{\nu} \mathbb{Z}/q_{\nu} \mathbb{Z} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

$$(\alpha'(1) = (p_v \bmod q_v)_v \in \bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z}).$$

$$(2.2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & P(X) & \rightarrow & \text{Div}(X) & \rightarrow & \mathcal{C}l(X) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & HP(Y) & \rightarrow & H\text{Div}(Y) & \rightarrow & \mathcal{C}l(Y) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z} \oplus \left(\bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z} \right) & \rightarrow & \bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

$$(\alpha(1) = (1, (p_v \bmod q_v)_v) \in \mathbb{Z} \oplus \left(\bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z} \right)).$$

定理 (2.3). ([9] (1.6), [8] (2.7)).

(i) $\text{ct}(R_+) > 1$ のとき, $\mathcal{C}l(R)$ は次の完全列で決る.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}l(X) \rightarrow \mathcal{C}l(R) \rightarrow \text{Coker}(\alpha') \rightarrow 0$$

但し, $\theta(1) = \mathcal{C}l(LD)$, L は $\{q_v \mid v \in X\}$ の最小公倍数.

(ii) $\text{ct}(R_+) = 1$ のとき, $\mathcal{C}l(R)$ は次の完全列で与えられる.

$$0 \rightarrow \mathcal{C}l(X) \rightarrow \mathcal{C}l(R) \rightarrow \bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

系 (2.4). (i) $\text{ct}(R_+) > 1$ のとき, R は factorial

$\Leftrightarrow \mathcal{C}l(X)$ は LD で生成される巡回群, $\{q_v \mid v \in X\}$ は pairwise に互いに素.

(ii) $\text{ct}(R_+) = 1$ のとき,

R は factorial $\Leftrightarrow R_0$ は factorial, $R \cong R_0[T]$.

問. factorial は graded ring ほんとなのか? と考え

る。 $\dim R = 2$, R_0 が代数閉体の場合には [6] で分類されている。 $\dim R = 3$, $\text{ht}(R_+) = 2$, R_0 が local ring とするとうなるだろうか? $X = \text{Proj}(R)$ は $\mathbb{P}_{R_0}^1$ の他にどのような可能性があるだろうか?

次に, canonical class を計算しよう。 [9], §2 に於て, 次が示されている。 (K_X を X の canonical divisor と, ω_X , ω_Y を dualizing sheaf をあらわす。 $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ である。)

$$(2.5) \quad \omega_Y = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(K_X + \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V + nD) \cdot T^n$$

$$(2.6) \quad K_R \text{ (} R \text{ の canonical module) が free} \Leftrightarrow$$

$$(i) \text{ ht}(R_+) > 1 \text{ のとき, } \exists a \in \mathbb{Z}, \exists f \in k(X),$$

$$K_X + \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V = aD + \text{div}_X(f)$$

$$(ii) \text{ ht}(R_+) = 1 \text{ のとき, } \exists f \in k(X), K_X + \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V + D = \text{div}_X(f).$$

例 (2.7). $A \in \text{D.V.R.}$, $v \in A$ の valuation とする。

$$R = A[f \cdot T^n \mid n \geq 0, v(f) \geq -\frac{p}{q} \cdot n] \quad X = \text{Spec}(A),$$

とおくと, (p と q は互いに素とする)。 $\frac{1}{q}D = \frac{p}{q} \cdot V$ として

$$(2.6) (ii) \text{ を適用できるから, } R \text{ が Gorenstein} \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{q}.$$

実際, $p = cq + 1$ とし, A の極大イデアルの生成元を x とすると, $R = A[\bar{x}^c \cdot T, \bar{x}^{c-1} \cdot T^q] \cong A[Y, Z]/(Y^q - xZ).$

§ 3. $\mathbb{Z}$ -graded regular graded rings.

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が positively graded のとき, R が regular ならば, R_0 は regular である ([2], 1.11). 逆に, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ が $\mathbb{Z}$ -graded のとき, R_0 は $\mathbb{A}^1$ には regular である. 実際,

(3.1). (i) $R = k[x, y, u, v]$, ここで k は体, $x, y \in R_1$, $u, v \in R_{-1}$ とすると, R_0 は $k[x, y]$ と $k[u, v]$ の Segre product である regular である.

(ii) $A = k[x, y, z]/(y^2 - xz) \cong k[s^2, st, t^2]$, $p = (x, y)$ とおくと $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} p^{(n)} \cdot T^n$ (ただし, $p^{(-n)} = (p^{(n)})^{-1}$ とする) とおくと, $p^{(2)} = (x)$ である.

$R = A[xT, yT, xT^2, x^{-1}T^{-2}] = k[T^{-1}, yT, xT^2, (xT^2)^{-1}]$ である regular である.

$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ が regular のとき, R_0 はどのような性質で特徴づけられるか? というのが目的である.

この問題は, 体 k 上の normal graded ring, $R = R(X, D)$,

($R_0 = k = H^0(X, \mathcal{O}_X)$) が isolated singularity をもつような,

(X, D) はどのように特徴づけられるか? という応用をもつ.

即ち, R が isolated singularity $\Leftrightarrow Y'$ は regular であり,

$\mathcal{O}_{Y'} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$ であるから, $\mathcal{O}_{Y'}$ は $\mathcal{O}_X$ 上の $\mathbb{Z}$ -graded ring である.

以下に於て, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ は regular graded ring, $R_0 = A$ は local ring, A の maximal ideal を $\mathfrak{m}$ とする.

(3.2). R は factorial

(証明) [以下の証明は後藤四郎氏による].

Lemma (3.3). (一般に), $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ は graded ring, $R_0 = (A, \mathfrak{m})$ local とする. このとき R は unique homogeneous maximal ideal $\mathfrak{m}_e$ をもち,

(i) R が次数が 0 でない homogeneous unit をもつとき,
 $R/\mathfrak{m}_e \cong A/\mathfrak{m}[T, T^{-1}]$, $\deg(T) = N > 0$.

(ii) R が次数が 0 でない homogeneous unit をもたないとき,
 $R/\mathfrak{m}_e \cong A/\mathfrak{m}$.

(証明は容易なので省略).

((3.2) の証明) R の height 1 の homogeneous prime ideal $\mathfrak{p}$ をとる. $R_{\mathfrak{m}_e}$ は regular local ring より, $\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{m}_e}$ は単項. さらに $\mathfrak{p}$ も単項である.

問. (3.3) (ii) の場合に, R_0 はどんな性質をもつだろうか?
^{ess. of finite type}
 R が標数 0 の体上 の場合などには, Boutot の定理 (Grauert-Riemenschneider vanishing Theorem を使う) により R_0 は rational singularity. 従って Cohen-Macaulay だが, Noetherian の仮定だけで R_0 が Cohen-Macaulay が出るだろうか?

以下, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ は regular graded ring, $R_0 = (A, m)$ は local ring, $\exists f \in R_N$ ($N > 0$) unit とする. N は unit が存在するような最小の整数とする. 標数 0 のとき, A は位数 N の cyclic group による invariant subring なのだが, 一般の場合には "cyclic quotient singularity" の概念を拡張しておこう.

Proposition-Definition (3.4). 体 $k \cong A/m$ を含む d 次元 local ring (A, m) と, 正整数 N に対し, 次の条件は同値. このとき A を "cyclic quotient singularity" と呼ぶ.

(i) $\mathbb{N}^d$ の normal subsemigroup

$$H = \{ (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d \mid \sum_{i=1}^d a_i s_i \equiv 0 \pmod{N} \}$$

$((a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d)$ が存在して, $\hat{A} \cong k[[T_1^{s_1} \dots T_d^{s_d} \mid (s_1, \dots, s_d) \in H]]$,
更に, $T_1, \dots, T_d$ は A 上 integral.

(ii) $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -graded である A の over ring $B = \bigoplus_{n=0}^{N-1} B_n$ で,

$B_0 = A$, B は regular local ring, 極大 ideal $\mathfrak{m}$ で, $B_1, \dots, B_{N-1} \subset \mathfrak{m}$ なるものが存在する.

(証明) (i) $\Rightarrow$ (ii) $\hat{B} = k[[T_1, \dots, T_d]]$ は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -graded ring であり $T_1, \dots, T_d$ は $\hat{B}$ の homogeneous element と見做す.

$B = A[[T_1, \dots, T_d]]$ とおくと, $\hat{B} = k[[T_1, \dots, T_d]]$ だから, B は regular local ring. $B_0 = A$ だから, (ii) の条件がみたされる.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + (B_1, \dots, B_{N-1})$ と与えられる. $\mathfrak{m}, B_1, \dots, B_{N-1}$

がすべて u^2 に含まれるという事はないから, homogeneous な t_1 , $t_1 \in u \setminus u^2$ ととる事ができる. $B/t_1 B$ も $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -graded regular local ring だから, この操作を繰り返して, homog. ではない B の regular parameter system $(t_1, \dots, t_d)$ がとれる. $t_i \in B_{a_i}$ とすれば, $\hat{B} = k[[t_1, \dots, t_d]]$, $\hat{A} = \hat{B}_0$ は (i) のようになる.

定理 (3.5). $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ が regular graded ring, 前頁の仮定をみたすとき, R_0 は "cyclic quotient singularity".

(証明) (本質的に Flenner [4]).

$B = R/(f-1)R$ とおく. B は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -graded ring, $B_0 = A$ だから, B が regular local ring である事を示せば十分. local は N の最小性より容易に得られる.

$\alpha: R \rightarrow B[U, U^{-1}]$ と, $\alpha(g) = \{g \bmod (f-1)R\} \cdot U^n$ ($g \in R_n$) と定義すると, $B[U, U^{-1}] \cong R[U]/(U^N - f) \cdot R[U]$ と容易にわかる. $B[U, U^{-1}]$ が regular を示せば良い. さて, $m \in R$ の唯一つの graded maximal ideal とすると,

$$(R[U]/(U^N - f) \cdot R[U]) \otimes_R R/m \cong (R/m)[U]/(U^N - f) \cong k[f, f^{-1}, U]/(U^N - f) \cong k[U, U^{-1}].$$

$R \rightarrow R[U]/(U^N - f) \cdot R[U]$ は明らかに flat だから, $R[U]/(U^N - f) \cdot R[U]$ が regular である.

さて, このような R は A の fractional divisor D によって,

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A(nD) \cdot T^n \text{ と書ける. } R_N = f \cdot A \text{ だから, } A(ND) = (f/T^N).$$

である。($D \in \text{Div}(A)$ ならば, D は fractional ideal $\mathcal{O}_T$ と対応し, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_T(n) \cdot T^n$ と書ける) のため, $D \in \text{Div}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ならば, $A(nD)$ という notation を使わせて頂く.)

(3.6). $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A(nD)$ が regular ならば, $\text{Cl}(A)$ は LD で生成された cyclic group.

(証明) (2.2.1) を $X = \text{Spec}(A)$, $Y' = \text{Spec}(R)$ に適用する.

$fT^n \in U(R)$ だから, $N \cdot \text{div}_R(T) = \text{div}_R(f^{-1}) \therefore \text{Colan}(\pi^*) \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

(3.2) より $\text{Cl}(R) = 0$ だから,

$$0 \rightarrow \text{Cl}(A) \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha'} \bigoplus_{\mathcal{V}} \mathbb{Z}/q_{\mathcal{V}}\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は exact.

(3.7) 逆に, A が (3.4) のような "cyclic quotient singularity" とする. このとき, A は "toric" singularity だから, $\text{Cl}(A) \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. $\text{Cl}(A)$ の生成元 D とし, $T_1, \dots, T_d$ の monomials で生成される ideal がとれる. $R = R(A, \frac{p}{q}D) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A(\frac{n}{q}pD) \cdot T^n$, p と $\text{Cl}(A)$ の位数が互いに素とすると, R は factorial. かつ monomial で記述できるから, R は regular となり, 従って, cf. [7]

定理 (3.8). X が体 k 上の projective normal scheme, $D \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, ND が ample Cartier divisor ($N > 0$) とする. このとき, もし $R(X, D)$ が孤立特異点なら, X は高々 "cyclic quotient singularity" のみをもつ. 逆に, X が "cyclic quotient singularity" のみをもつとき, $D \in \text{Div}(X)$ と ND が ample

Cartier divisor ($\exists N > 0$), X の各特異点 x に対し, D_x が, $\mathcal{O}_x$ の生成元であるようにとれば, $R(X, D)$ は孤立特異点である。

REFERENCES.

- [1] Bourbaki, Algèbre Commutative, Chapter III.
- [2] D.L.Costa, Retracts of polynomial rings, J. of Alg. 44, 492-502 (1977).
- [3] M. Demazure, Anneaux gradués normaux, preprint, Ecole Polytechnique, (1979).
- [4] H. Flenner, Rationale quasi-homogene Singularitäten, Arch. Math. 36 (1981), 35-44.
- [5] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.
- [6] S. Mori, Graded factorial domains, Japan. J. Math. 3 (1977), 223-238.
- [7] T. Oda, Lectures on torus embeddings and applications, Tata Inst. Lect. Note 58 (1978).
- [8] M. Tomari and K. Watanabe, Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution, in preprint.
- [9] K. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.
- [10] 渡辺 敏一; Normal filtration について, 第7回可換環論シンポジウム報告集 (京都, 1985).
- [11] P. Samuel, Lectures on Unique Factorization Domains, Tata Lecture Note (1964).