

Regular and semi-regular points of
Cohen-Macaulay partially ordered sets

名古屋大学・理学部

日比孝之

Department of Mathematics
Faculty of Science
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464, Japan

Takayuki Hibi

序. Cohen-Macaulay poset L が与えられた時, L が (i) integral $([H_1], [H-W_1], [Wat_2])$, (ii) Gorenstein, (iii) weakly Gorenstein, (iv) numerically Gorenstein $([H_1], [Wat_1])$, (v) level $([Sta_1], [H_3])$, (vi) canonical ideal (cf. $[H_4])$ を持つかといったこと等々は, Cohen-Macaulay poset L の分類とも関連した, 基本的な問題である. 例之ば, L を distributive lattice とする時, L が何時 (i), (ii), (iii), (iv), (vi) の性質を持つかということは完全に決定できる. しかしながら, (v) については全然わからない. そこで, 「どんな distributive lattice L が level poset であるか?」という素朴な問題を解決したいというのが研究の動機である.

a) さて, V を vertex set と呼ばれる有限集合とし, Δ を V 上の simplicial complex とする. 即ち, Δ は V

① subset ① set であって, (i) 任意の $v \in V$ に対して $\{v\} \in \Delta$, (ii) $\sigma \in \Delta, \tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in \Delta$ を満たすものである. Δ の次元を $\dim \Delta := \max\{\#(\sigma); \sigma \in \Delta\} - 1$ ($= d - 1$ と置く) で定義し, $\#(\sigma) = i + 1$ の時 σ を i -face と呼ぶ. そして $f_i = f_i(\Delta)$ で i -face の個数を表し, $f = f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ を Δ の f -vector と呼ぶ. $f_0(\Delta) = \#(V)$ である. また,

$$h_i = h_i(\Delta) = \sum_{j=0}^i \binom{d-j}{d-i} (-1)^{i-j} f_{j-1} \quad (0 \leq i \leq d)$$

(但し, $f_{-1} = 1$ とする) と定義し, $h = h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ を Δ の h -vector と呼ぶ. $h_0 = 1, h_1 = \#(V) - d$ である. この時, $a = a(\Delta) := \max\{s; h_s \neq 0\} - d$ (≤ 0) を Δ の a -invariant (cf. [G-W]) と呼ぶ.

次に, k を体とし, $k[\Delta]$ で, Δ の Stanley-Reisner 環

$$k[\Delta] = k[X_v; v \in V] / \left(\prod_{v \in \tau} X_v \mid \tau \notin \Delta \right)$$

を表す. $\deg(X_v) = 1$ とし, $k[\Delta]$ を次数付環 $\bigoplus_{n \geq 0} (k[\Delta])_n$ と考える. $k[\Delta]$ の k -algebra としての次元は $\dim \Delta + 1 = d$ である. また $k[\Delta]$ の Hilbert 関数 $H(k[\Delta], n)$ と Poincaré 級数 $P(k[\Delta], \theta)$ は

$$H(k[\Delta], n) := \dim_k (k[\Delta])_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{n-1}{i} & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

$$P(k[\Delta], \theta) := \sum_{n=0}^{\infty} H(k[\Delta], n) \theta^n = \frac{h_0 + h_1 \theta + \dots + h_d \theta^d}{(1-\theta)^d}$$

となる (cf. [Sta₂]).

一般に, $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ を homogeneous k -algebra, 即ち,

(i) $R_0 = k$, (ii) $R = k[R_1]$, (iii) $\dim_k R_1 < \infty$ を満たす次数

付環で $\dim R = d$ とすると, その Hilbert 関数 $H(R, n) :=$

$\dim_k R_n$ は $n \gg 0$ で, n の $d-1$ 次の多項式であり,

Poincaré 級数は

$$P(R, \theta) := \sum_{n=0}^{\infty} H(R, n) \theta^n = \frac{h_0 + h_1 \theta + \dots + h_s \theta^s}{(1-\theta)^d} \quad (h_s \neq 0)$$

と表すことが可能である. ここで, $h(R) := (h_0, h_1, \dots, h_s)$ を

R の h -vector と呼ぶ. 特に, R が Cohen-Macaulay ならば

$$h_s = \dim_k [K_R]_{-a(R)} \stackrel{(*)}{=} \mu(K_R) = \text{type}(R)$$

である. (*) で等号が成立する時, 即ち $h_s = \text{type}(R)$

となる時, R を level 環 (cf. [Sta₁]) と呼ぶ. 換言すれば,

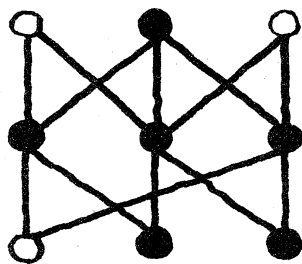
level 環とは, canonical module の生成元の次数が等し

く選べる Cohen-Macaulay 環のことである。

例えば, $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ ($R_0 = k$) が poset Q ($\subset R_1$) 上の ASL (algebra with straightening laws) 整域で, $\dim R \leq 3$ ならば, R は level 環である. また, $\Delta_i := \{\sigma \in \Delta; \#(\sigma) \leq i+1\}$ (i -skelton) とすると, Δ が k 上 Cohen-Macaulay, 即ち $k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay 環, ならば, $i < d-1$ の時, $a(\Delta_i) = 0$ で $k[\Delta_i]$ は level 環となる ($[H_3]$).

b) 以下, 体 k を固定し, Δ を vertex set V 上の Cohen-Macaulay complex とする. この時, $v \in V$ が regular vertex (w.r.t. Δ) であるとは, $\Delta - v := \{\sigma \in \Delta; v \notin \sigma\}$ が $V - \{v\}$ 上の Cohen-Macaulay complex で $\dim \Delta = \dim(\Delta - v)$ である時を言う.

他方, poset Q が与えられた時, $\Delta(Q) = \{Q \text{ の chains } \}$ と置くことによって, Q 上の simplicial complex と考える. この時は, regular vertex という代わりに, regular point と呼ぶことにする. 例えば, 次の poset



においては, \circ 印が regular point で, \bullet 印は regular point ではない.

定理 ([H₅]). L を distributive lattice とする時, $\alpha \in L$ が regular point である為の必要十分条件は, (i) $L - \{\alpha\}$ が pure (即ち, maximal chain の長さがすべて等しい) であり, (ii) $\text{rank}(L) (= \dim(\Delta(L))) = \text{rank}(L - \{\alpha\})$ となることである.

証明には, [Bjö] による lexicographically shellable poset の概念を使う. $L - \{\alpha\}$ が pure ということは, 容易に判定可能な combinatorial な性質だから, distributive lattice においては, $\alpha \in L$ が regular であるか否かはすぐにわかる.

一般に, regular vertex (w.r.t. Δ) 全体の集合を $\underline{R} = \underline{R}_k(\Delta)$ で表す. また, simplicial complex Δ の face σ に対して, $\text{star}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta; \sigma \cup \tau \in \Delta\}$ および $\text{link}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta; \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in \Delta\}$ を定義する. 環論的には $k[\text{star}_\Delta(\sigma)] = k[\text{link}_\Delta(\sigma)][v; v \in \sigma]$ である. そして, Δ が Cohen-Macaulay であれば, $\text{star}_\Delta(\sigma)$ も $\text{link}_\Delta(\sigma)$ も Cohen-Macaulay である (cf. [Hoc]).

定義. k を体, Δ を vertex set V 上の Cohen-Macaulay complex とする時, Δ の \underline{A} -invariant を

$$\underline{A} = \underline{A}_k(\Delta) = \max_{v \in R} [a(\Delta) - a(\text{link}_{\Delta}(\{v\}))]$$

で定義する. 但し, $\underline{R} = \underline{R}_k(\Delta) = \phi$ の時は $\underline{A} = \underline{A}_k(\Delta) = 0$ とする.

この時, $\underline{A}_k(\Delta) \geq 0$ であることが, f -vector および h -vector の計算で確認できる.

c) すると, $\underline{A}_k(\Delta) = 0$ となるのは何時か? ということが問題となる.

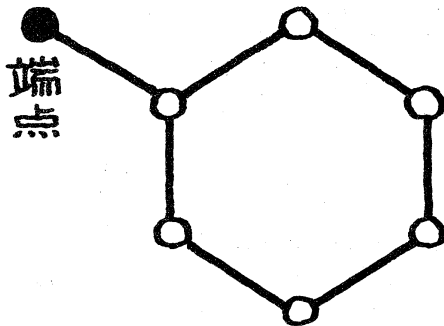
命題. Δ を k 上の Cohen-Macaulay complex とし, $k[\Delta]$ は level 環であると仮定せよ. この時, $\underline{A}_k(\Delta) = 0$ である.

この命題によって, $k[\Delta]$ が level 環となるための combinatorial 必要条件が得られる.

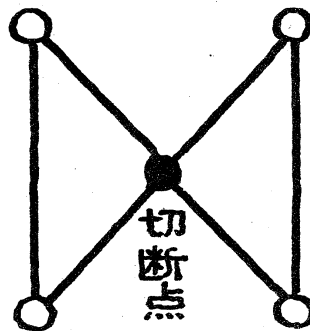
簡単な例として, $\dim \Delta = 1$ の時を考える. この時, Δ が
 ① geometric realization $|\Delta|$ は graph となり, Δ が
 Cohen-Macaulay, level, Gorenstein, として, $\underline{A}_k(\Delta) = 0$ と
 なる為の必要十分条件を graph 理論の言葉で記述すると

| Cohen-Macaulay | level | Gorenstein | $\underline{A}_k(\Delta) = 0$ |
|----------------|--------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| connected である. | 切断点を持たないか, または tree である. | cycle または高々3個の頂点を持つ線分である. | 端点を持たないか または tree である. |

となる.



$\underline{A}_k(\Delta) = 1$



$\underline{A}_k(\Delta) = 0$

d) そこで, $\underline{A}_k(\Delta(L)) = 0$ となる distributive lattice L を探そう.

定理 ($[H_5]$). L を distributive lattice, X をその join-irreducible 元全体の成す subposet とする. この時, $\underline{A}_k(\Delta(L)) = 0$ となる為の必要十分条件は, 「 $\alpha, \beta \in X$ が $\text{depth}_X(\alpha) + \text{height}_X(\beta) > \text{rank}(X)$ を満たせば $\alpha \leq \beta$ となる」が成立することである.

更に, $\Delta(L)$ が Gorenstein となる為の必要十分条件は, X が clutter の ordinal sum であるという既知の事実を \underline{A} -invariant の言葉で書き表すと

系. L を distributive lattice, X をその join-irreducible 元全体の成す subposet とする. この時, $\Delta(L)$ が Gorenstein となる為の必要十分条件は, X が pure で, $\underline{A}_k(\Delta(L)) = 0$ となることである.

さて, $\underline{A}_k(\Delta(L)) = 0$ なる条件で, level の候補となる distributive lattice が選ばれたわけであるが, 特に, L が planer distributive lattice, 即ち, L の Hasse diagram の edge が交わらない様に平面上に描ける distributive lattice の時には, $\underline{A}_k(\Delta(L)) = 0$ となる L から level となるものを探し, 分類することが可能である (cf. $[H_5]$)

REFERENCES

- [Bjö] A.Björner: Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. 260 (1980), 159-183.
- [G-W] S.Goto and K.-i.Watanabe: On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.
- [H₁] T.Hibi: Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, to appear.
- [H₂] T.Hibi: Union and glueing of a family of Cohen-Macaulay partially ordered sets, to appear.
- [H₃] T.Hibi: Level rings and algebras with straightening laws, submitted.
- [H₄] T.Hibi: Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, preprint.
- [H₅] T.Hibi: Regular and semi-regular points of Cohen-Macaulay partially ordered sets, in preparation.
- [H-W₁] T.Hibi and K.-i.Watanabe: Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains I, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 27-54.
- [H-W₂] T.Hibi and K.-i.Watanabe: Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains II, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 321-340.
- [Hoc] M.Hocster: Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring Theory II, Proc. of the second Oklahoma Conf., Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26, Dekker, New York, 1977, 171-223.

- [Sta₁] R.Stanley: Cohen-Macaulay complexes, Higher Combinatorics (M.Aigner, ed.), NATO Advanced Study Institute Series, Reidel, Dordrecht and Boston, 1977, 51-62.
- [Sta₂] R.Stanley: "Combinatorics and Commutative Algebra", Progress in Math., Vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1983.
- [Sta₃] R.Stanley: "Enumerative Combinatorics, Volume I", Wadsworth, Monterey, CA, 1986.
- [Wat₁] K.-i.Watanabe: Study of algebras with straightening laws of dimension 2, Algebraic and Topological Theory — to the memory of Dr. Takehiko Miyata (M.Nagata et al., eds.), Kinokuniya, Tokyo, 1985, 622-639.
- [Wat₂] K.-i.Watanabe: Study of four-dimensional Gorenstein ASL domains, I (Integral posets arising from triangulation of a 2-sphere), to appear.