数理解析研究所講究録
621巻 1987年 108-114

Locally finite derivation について

福井大・教育　小野田 信春（Nobuharu Onoda）

以下、kは常に標数0の代数的閉体であると仮定する。アフィン空間 $\mathbb{A}_k^{n+1}$ への G_a の有理作用は、座標環 $A = k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ への G_a の有理作用を引き起こすが、このとき、A上の局所有限な k-導分Dを、その constant subring A^D が不変部分環 A^{G_a} と一致するように定義することができる。逆に、A上の局所有限 k-導分Dは、$\mathbb{A}_k^{n+1}$ への G_a の有理作用を定義する。このように、G_aの作用を局所有限 k-導分Dの作用に翻訳してその性質を論じることはひとつの有効な手段であると考えられ、その一端については以前にも述べたことがある（[3] 参照）。ここでは、弱干の補足的事項について論じることにする。以下、G_a は有理表現

$$\rho : G_a \longrightarrow GL_{n+1}$$

を通じて多項式環Aに作用しているものとする。まず、A^{G_a} の有限生成性を主張する Weizenböck の定理の証明（Seshadri

による）を振り返ってみよう。要点は、

$$G_a \ni \lambda \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2$$

によって、G_a を SL_2 の閉部分群とみなし、ρ を有理表現

$$\rho^* : SL_2 \longrightarrow GL_{n+1}$$

へ拡張できることを示すことにあった。そして

$$\widetilde{\rho^*} : SL_2 \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} \rho^*(x) & \\ & x \end{pmatrix} \in GL_{n+3}$$

を考え、$\widetilde{\rho^*}(SL_2) = G$、$\widetilde{\rho^*}(G_a) = H$ とおく。G は $k[\mathbb{A}^{n+3}] = k[x_0, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}]$ に作用するが、$x_{n+1} = 1$, $x_{n+2} = 0$ で定まる閉部分多様体 $W \subset \mathbb{A}^{n+3}$ を考えるとき、準同型写像

$$k[\mathbb{A}^{n+3}]^G \longrightarrow k[W]^H$$

が全射であることを示し、$k[\mathbb{A}^{n+3}]^G$ の有限生成性から $k[W]^H \cong k[\mathbb{A}^{n+1}]^{G_a}$ の有限生成性を導くというのがそのあらすじであった。ところで、$k[\mathbb{A}^{n+3}]^G$ が k 上有限生成であるというのは、SL_2 が半単純、従って線形可約であることをその根拠とするが、一般に、線形可約な代数群の有理作用のもとで不変部分環が有限生成となることの証明を今一度振り返ってみるとき、その要となる補題を k－導分の性質として捉え直すことを考えてみれば、次の問題は、興味深い題材を与えてくれるのではないかと考えられる：

<u>問題</u> 多項式環 A に局所有限な k－導分 D が与えられて

いるものとする。このとき、$F_1, F_2, \cdots, F_r \in A^D$ に対し、

$$(F_1, \cdots, F_r)A \cap A^D = (F_1, \cdots, F_r)A^D$$

が成り立つか。

結果が肯定的ならば、$A^D = A^{G_a}$ の有限生成性のより直接的な証明が得られることになる。

次に、$A^D = A^{G_a}$ の有限生成性を別の観点からながめてみることにする。G_a の有理表現 ρ から決まる k-導分 D は

$$\begin{pmatrix} D(x_n) \\ \vdots \\ D(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} \quad \text{但し} \quad M_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるとしてよい。ここで、$r = 1$ の場合が基本的なので、以下、$r = 1$ と仮定する。即ち、D は、$D(x_0) = 0$, $D(x_i) = x_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ で定まるものとする。ここで、

$$\varphi_j = \sum_{s=0}^{j-2} \frac{(-1)^s}{s!} x_0^{j-s-1} x_1^s x_{j-s} + \frac{(-1)^{j-1}(j-1)}{j!} x_1^j \qquad (2 \leqslant j \leqslant n)$$

とおくとき、次が成立する。

<u>補題</u> 1　$A^D[\frac{1}{x_0}] = k[x_0, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \frac{1}{x_0}]$

また、次のことに注意する。

<u>補題</u> 2　$0 \neq f \in A$ に対し、$f \mid D(f)$ ならば $D(f) = 0$

<u>証明</u>　f は同次多項式としてよい。このとき、$D(f) = 0$ 又は $D(f)$ は同次多項式でその次数は f の次数に等しい。従って、$f \mid D(f)$ ならば $D(f) = \alpha f$ $(\exists \alpha \in k)$ となる。D は局所有限ゆえ、ある $\ell \in \mathbb{N}$ に対し、$D^\ell(f) = 0$ であるが、すると、

$\alpha^2 f = 0$ から $\alpha = 0$ となり、従って $D(f) = \alpha f = 0$ を得る∎

系　$f, g \in A$ が互いに素のとき、$fg \in A^D$ ならば、$f, g \in A^D$ である。

証明　$D(fg) = fD(g) + D(f)g = 0$ ゆえ、仮定より、$f \mid D(f)$ かつ $g \mid D(g)$ となる。従って補題2より、$D(f) = D(g) = 0$ ∎

特に、A^D は素元分解整域となることがわかる。更に次も成り立つ。

補題3　$2 \leqq {}^\forall j \leqq n$ に対し、$A^D[\frac{1}{\varphi_j}]$ は k 上有限生成である。

証明は次のようにする。まず、$x_0 A \cap A^D = x_0 A^D$ に注意する。従って、準同型写像 $\tau : A \longrightarrow A/x_0 A = k[x_1, \cdots, x_n]$ は単射準同型写像 $A^D/x_0 A^D \hookrightarrow k[x_1, \cdots, x_n]$ を引き起こすが、これにより、$A^D/x_0 A^D$ を $B := k[x_1, \cdots, x_n]$ の部分環とみなす。多項式環 B に、$\overline{D}(x_1) = 0$, $\overline{D}(x_i) = x_{i-1}$ $(2 \leqq i \leqq n)$ で定まる k-導分 $\overline{D}$ を考えよう。この k-導分 $\overline{D}$ に対し、上で定義した φ_j に相当する多項式が決まるが、それを $\widetilde{\varphi_j}$ $(3 \leqq j \leqq n)$ とおく。このとき、次が示せる。

補題4　$A^D/x_0 A^D \subseteq B^{\overline{D}}$ かつ、$\widetilde{\varphi_j} \in A^D/x_0 A^D$ $(3 \leqq {}^\forall j \leqq n)$

証明　$f \in B$ に対し、$D(f) = \overline{D}(f) + x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1}$ となることは容易に示せる。従って、一般に、$f \in A$ に対し、$\overline{D}(\overline{f}) = \overline{D(f)}$ となる。但し、ここで、$\overline{f} = \tau(f)$ とする。このことから、前半の主張は明らかである。後半は、n についての帰納法で証

明するが、詳細は省略する∎

<u>注意</u>　$A^D/x_0A^D = B^D$ は一般に成立しない。

更にもうひとつ一般的な補題を準備する。

<u>補題5</u>　体 k を含む整閉整域 R が、次の条件を満たす素元 x をもつなら、R は k 上有限生成である：

(1)　R/xR および $R[\frac{1}{x}]$ は k 上有限生成である。

(2)　$\mathrm{tr.deg}_k\, R/xR = \mathrm{tr.deg}_k\, R - 1$

<u>証明</u>　まず、条件(1)の後半より、$\dim R = \mathrm{tr.deg}_k\, R$ となることに注意する。さて、R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を考えよう。いま、$x \in \mathfrak{m}$ ならば、条件(1)の前半より、$\mathfrak{m}$ は R の有限生成イデアルであり、また、条件(2)より、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = \dim R$ となる。ここで、R は整閉整域であるから、このことより、$R_{\mathfrak{m}}$ が k 上の局所域となることが示せる（詳細は省略する。[2] 参照）。次に、$x \notin \mathfrak{m}$ ならば、条件(1)の後半より、$R_{\mathfrak{m}} = (R[\frac{1}{x}])_{\mathfrak{m}R[\frac{1}{x}]}$ は k 上の局所域である。即ち、R のかってな極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し、$R_{\mathfrak{m}}$ は k 上の局所域となり、従って R は k 上有限生成である（[2] 参照）∎

以上の準備のもとで、補題3を示そう。

<u>補題3の証明</u>　$R = A^D[\frac{1}{\varphi_j}]$ とおくとき、$x = x_0 \in R$ が補題5の条件を満たすことを示す。まず、明らかに R は整閉整域である。また、$x_0A \cap A^D = x_0A^D$ より、x_0 は A^D の、従って

Rの素元である。補題1より、$R[\frac{1}{x}]$ は k 上有限生成。更に $R/x_0R \cong (A^D/x_0A^D)[\frac{1}{x_j}]$ ゆえ、補題1と補題4より、$R/x_0R \cong k[x_1, \tilde{\varphi}_3, \cdots, \tilde{\varphi}_n, \frac{1}{x_1}]$ となることがわかり、従って、R/x_0R も k 上有限生成である。また、補題4より、$tr.deg_k R/x_0R = tr.deg_k R - 1$ も明らか。よって補題5より、R は k 上有限生成である ∎

注意　実は、$A^D[\frac{1}{\varphi_j}]$ は $k[\varphi_j, \frac{1}{\varphi_j}]$ 上 $(n-1)$ 変数の多項式環であることも示せるが、ここでは省略する。

さて、準同型写像　$\sigma: A \longrightarrow A/x_1A = k[x_0, x_2, \cdots, x_n]$ を考えよう。補題2の系より、$x_1A \cap A^D = (0)$ となり、従って、$S = \sigma(A^D)$ とおくとき、$A^D \cong S$ である。$\sigma(\varphi_j) = x_0^{j-1}x_j$ に注意すれば、上で示したことより、S は次の各条件を満たすことがわかる：

(イ)　S は素元分解整域

(ロ)　$k[x_0, x_0x_2, \cdots, x_0^{n-1}x_n] \subset S \subset k[x_0, x_2, \cdots, x_n]$

(ハ)　$x_0, x_0^{j-1}x_j$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$ は S の素元であり、$S[1/x_0^{j-1}x_j]$ は各 j に対し k 上有限生成

そこで、次の問題を考えてみることは意味のあることと考えられる。

問題　上記 (イ), (ロ), (ハ) の条件を満たす環 S は k 上有限生成であるか？　もしも、一般的に k 上有限生成とは限らないな

らば、そうなるためのよい充分条件を与えよ。

問題が肯定的に解けるなら、これも $A^D=A^{G_a}$ の有限生成性の別証明を与えることになる。

最後に、G_a の作用をこのような見方で捉えることの意義について述べる。以上のような視点から考察することは、単に不変部分環の有限生成性の別証明を与えるのみならず、その生成元も具体的に求まる可能性も大きいのではないかというのが理由のひとつである。もしそれが可能なら、それを利用して、A^{G_a} のもつ環論的性質を追求する際の手掛かりが得られるかもしれない。更に、A^{G_a} が有限生成となることの根拠がより明確となり、一般に、k 上のアフィン整域 B に G_a が作用する場合、B^{G_a} が有限生成となるための条件を与えることができるかもしれないという期待もあるわけである。

参　考　文　献

[1] J. Fogarty, Invariant theory, Benjamin (1969).

[2] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, Japan. J. Math. 10 (1984), 29-53.

[3] 小野田信春, 多項式環上のある derivation について, 第6回可換環論シンポジウム報告集, 227-232.