数理解析研究所講究録
622巻 1987年 23-44

非可換トーラス上の Yang-Mills

横浜市立大　中神祥臣（Yoshiomi Nakagami）

1985年夏にIowa大学で開かれた“作用素環と数理物理学の会議”において、M. Rieffelは幾何学者が話題にしている Yang-Mills の理論を非可換微分幾何の枠組に取り入れ、無理数回転C*環A_θ 上の特定の加群に対して、Yang-Mills方程式を解き、解の成すゲージ同値類全体が具体的な位相空間と同相に成ることを示した。その後、この内容はA. Connesと共著で次のプレプリント

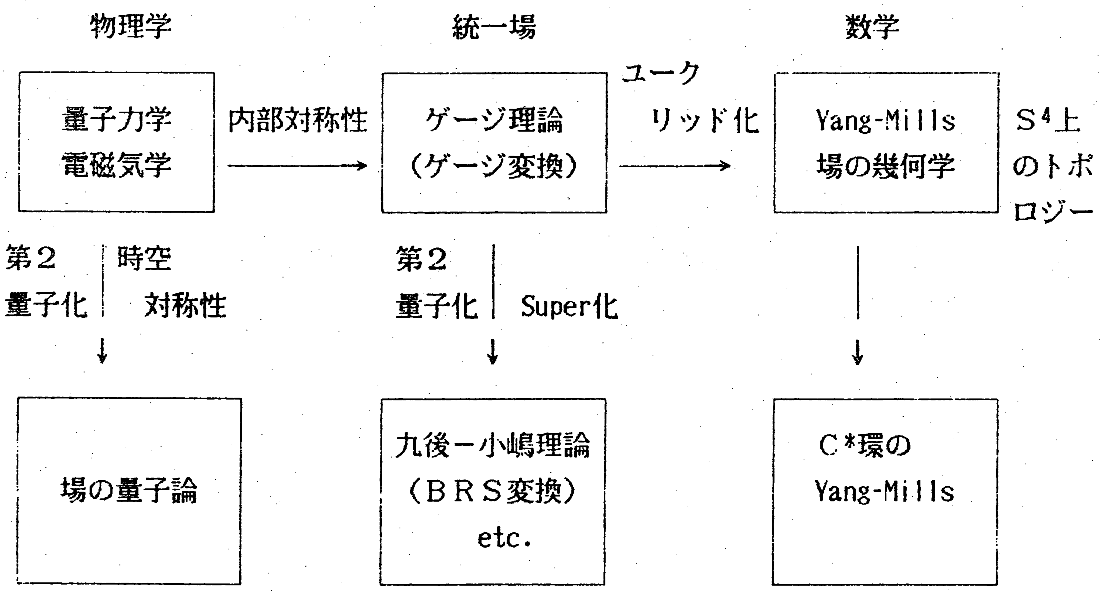
［1］ Yang-Mills for non-commutative two-tori, Operator Algebras and Mathematical Physics (Ed. Jorgensen and Muhly) Contemporary Math., 60 AMS, 1986, to appear.

にまとめられ、その前書きで、この研究の目的の1つは、非可換多様体に対応するC* 環から、その“多様体の影”を捉えることにあると述べている。ここでは、これと、この結果を利用した G. Elliott の

［2］ The diffeomorphism group of the irrational rotation C*-algebra, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 8, #5 (1986), 329-334.

の内容を紹介する。

元来 Yang-Mills理論というのは、物理学者が統一的場の理論を試みようとするゲージ理論の別名であったが、最近ではその中から生み出された数学的側面が広く知られるように成って来ている。



Connes達の非可換微分幾何　単位的C*環Aにおける微分構造は、それに作用する連結Lie群Gから導かれる。いま（A，G，α）をそのようなC*力学系とし、A^{∞} を作用αに関するC^{∞} ベクトルの全体とする。有限生成の射影的右A^{∞} 加群Ξに対し、線形写像$\nabla:\Xi\to\Xi\otimes\mathfrak{g}^*$ が各$X\in\mathfrak{g}$に対し

$$\nabla_X(\xi a)=(\nabla_X\xi)a+\xi\delta_X(a)\quad,\quad \xi\in\Xi\quad,\quad a\in A^{\infty}$$

をみたすとき、∇をΞの接続という。Ξ上にはAに値をもつ正定値内積$<\ ,\ >_A$ で$<\xi,\eta>_A^*=<\eta,\xi>_A$ と$<\xi,\eta a>_A=<\xi,\eta>_A a$をみたすものが在る。接続$\nabla$の中でも整合性の条件

$$\delta_X(<\xi,\eta>_A)=<\nabla_X\xi,\eta>_A+<\xi,\nabla_X\eta>_A$$

をみたす接続の全体をCC(Ξ)とする。接続∇に対し

$$\Theta_{\nabla}(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}\in \mathrm{End}_A(\Xi)$$

を∇の曲率（またはゲージ場）という。これは $\mathrm{End}_A(\Xi)$に値をもつ交代2形式である。これを用いてΞの Yang-Mills汎関数YMを

$$YM(\nabla)=-\tau_E(\{\Theta_{\nabla},\Theta_{\nabla}\})\quad,\quad \nabla\in CC(\Xi)$$

により定義する。ただし、2形式Φ，Ψの$\mathfrak{g}$値内積 $\{\Phi,\Psi\}$ の値は$\mathfrak{g}$の規格直交基底$\{Z_1,\cdots,Z_n\}$を用いて$\sum_{i<j}\Phi(Z_i,Z_j)\Psi(Z_i,Z_j)$で与え、$E=\mathrm{End}_A(\Xi)$上のトレイス$\tau$ の値をA上のG不変な忠実トレイスτを用いて$\tau_E(<\xi,\eta>_E)=\tau(<\eta,\xi>_A)$で与える。ここで、$<\xi,\eta>_E$は$<\xi,\eta>_E\zeta=\xi<\eta,\zeta>_A$で与えられる。この場合のゲージ群は$E=\mathrm{End}_A(\Xi)$のユニタリ元の全体U(E)であって、$YM(u\nabla u^*)=YM(\nabla)$，$u\in U(E)$が成り立つ。CC($\Xi$)の元のうちYMが極小値を取るものの全体MC($\Xi$)の商空間

MC(Ξ)／U(E)をΞのモジュラス空間といい、これを求めるのが本講の目的である。

定理([1])　ΞをA_θ^{∞} の有限生成射影加群とし、$d\in N$とする。Ξが他の有限生成射影加群との積でなければ、Ξ^dのモジュラス空間は$(T^2)^d/\Sigma_d$と同相である。ただし、Σ_dはd個の座標の置換群である。

この計算で用いられた方法を使うと

定理([2])　$\theta\notin Q$が Diophantine条件をみたせば、

$$\mathrm{Aut}(A_\theta^{\infty})\cong PU_0(A_\theta^{\infty})\rtimes\{T^2\rtimes SL(2,Z)\}\ .$$

ただし、$PU_0(A_\theta^{\infty})$は$U(A_\theta^{\infty})$の主連結成分を中心で割った商群である。

§1 Yang-Mills 汎関数

この§では，次のような一般的 C^*力学系 (A, G, α) に対して，Yang-Mills汎関数，ゲージ群，モジュラス空間などを定義する．

$$\begin{cases} G\text{は連結Lie群で，Lie環}\mathfrak{g}\text{は正定値内積をもつものとする．} \\ A\text{は}G\text{不変忠実トレイスをもつ単位的}C^*\text{環とする．} \end{cases}$$

さて，C^*環の微分構造は，その上に微分子を与えることにより定まる．ここでは，A における Lie群の作用 α の（無限小）生成元により A の微分構造が与えられているものとする．作用 α に関する C^∞ベクトルの全体 A^∞ は A の稠密部分多元環である．α の生成元は Lie環 $\mathfrak{g}$ から A^∞ 上の微分子への表現

$$\delta_X(a) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\{(\exp tX)a - a\}, \quad X \in \mathfrak{g},\ a \in A^\infty$$

を与える．

有限生成の（以後，有限生成なものだけを考えるので，この言葉を省く）射影的右 A 加群 Ξ は通常，ベクトル空間

$$^t(A \oplus \cdots \oplus A) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_j \in A \right\}$$

上の冪等元 $e \in M_n(A)$ を用いて，$\Xi = e\,{}^t(A\oplus\cdots\oplus A)$ と表せる．とくに e が単位元のときには，射影的と言わず自由であるという．e は $^t(A\oplus\cdots\oplus A)$ 上の可逆元により，射影元と相似にできるので，予め e は C^*環 $M_n(A)$ の射影元に選ぶことができる．A の代りに A^∞ を用いても，射影的右 A^∞ 加群 Ξ^∞ を上のように考えることができる．射影元 e を同

型の範囲内で $M_n(A^\infty)$ の元に選び直すことにより，任意の Ξ は適当な Ξ^∞ により，$\Xi \cong \Xi^\infty \otimes_{A^\infty} A$ と表すことができる．以後，A，Ξ の代りに，主に A^∞，Ξ^∞ を扱う．

右 A^∞ 加群 Ξ^∞ 上には，A^∞ に値をもつエルミート計量 $\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ が存在する：$\xi, \eta \in \Xi^\infty$ に対し，$\langle \xi+\eta, \zeta\rangle_{A^\infty} = \langle \xi, \zeta\rangle_{A^\infty} + \langle \eta, \zeta\rangle_{A^\infty}$ の外に

$$\langle \xi, \eta\rangle_{A^\infty}^* = \langle \eta, \xi\rangle_{A^\infty}, \quad \langle \xi, \eta a\rangle_{A^\infty} = \langle \xi, \eta\rangle_{A^\infty} a, \quad a \in A^\infty.$$

（例えば，$\Xi^\infty = e^t(A\oplus\cdots\oplus A)$ の場合には，$\langle \xi, \eta\rangle_{A^\infty} = \xi^*\eta$ とすればよい）．ここで，$E = \mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ とする．任意の $\xi, \eta, \zeta \in \Xi^\infty$ に対し

$$\langle \xi, \eta\rangle_E \zeta = \xi \langle \eta, \zeta\rangle_{A^\infty}$$

とすれば，$\langle \xi, \eta\rangle_E$ は E の元であり，E の元はこのような $\langle \xi, \eta\rangle_E$，$\xi, \eta \in \Xi^\infty$ の有限1次結合で表される．したがって，Ξ^∞ は E-A^∞ 加群であり，$\langle\ ,\ \rangle_E$ は E に値をもつエルミート計量である：$\langle \xi+\eta, \zeta\rangle_E = \langle \xi, \zeta\rangle_E + \langle \eta, \zeta\rangle_E$ の外に，$\langle \xi, \eta\rangle_E^* = \langle \eta, \xi\rangle_E$，$\langle b\xi, \eta\rangle_E = b\langle \xi, \eta\rangle_E$，$b \in E$．（上の例のように，$\langle \xi, \eta\rangle_{A^\infty} = \xi^*\eta$ の場合には，$\langle \xi, \eta\rangle_E = \xi\eta^*$ である）．A 上に G 不変なトレイス τ が存在することを仮定しているので，E 上には

$$\tau_E(\langle \xi, \eta\rangle_E) = \tau(\langle \eta, \xi\rangle_{A^\infty})$$

をみたす忠実トレイス τ_E が存在する．（$\Xi^\infty = e^t(A\oplus\cdots\oplus A)$ の場合には，$\mathrm{End}_A(\Xi)$，$E = \mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ はそれぞれ C^* 環 $eM_n(A)e$ とその稠密部分多元環 $eM_n(A^\infty)e$ に同一視でき，τ_E は $M_n(A) = A \otimes M_n(\mathbb{C})$ 上の忠実トレイス $\tau \otimes \mathrm{Tr}$ を $eM_n(A)e$ へ制限したものと一致している）

E-A^∞ 加群 Ξ^∞ の双対加群 $\bar{\Xi}^\infty$ は集合 $\{\bar{\xi} : \xi \in \Xi\}$ に加群の演

算 $a\tilde{\xi}b+\tilde{\eta}=(b^*\xi a^*+\eta)^\sim$, $a\in A^\infty$, $b\in E$ が定義されたものであり、エルミート計量は通常 $\langle\tilde{\xi},\tilde{\eta}\rangle_{A^\infty}=\langle\xi,\eta\rangle_{A^\infty}$, $\langle\tilde{\eta},\tilde{\xi}\rangle_E=\langle\eta,\xi\rangle_E$ で与えられる. もちろん, $\tilde{\Xi}^\infty$ は A^∞–E 加群である. ($\Xi^\infty=e^t(A\oplus\cdots\oplus A)$ の場合には, $\tilde{\Xi}^\infty=(A^\infty\oplus\cdots\oplus A^\infty)e$) これを使うと,

$$\tilde{\xi}\otimes\eta\in\tilde{\Xi}^\infty\otimes_E\Xi^\infty\longmapsto\langle\xi,\eta\rangle_{A^\infty}\in A^\infty\quad(\Xi^\infty\text{ が full のとき})$$

$$\xi\otimes\tilde{\eta}\in\Xi^\infty\otimes_{A^\infty}\tilde{\Xi}^\infty\longmapsto\langle\xi,\eta\rangle_E\in E$$

はそれぞれ, 両側 A^∞ 加群, 両側 E 加群としての同型写像である. ($\Xi^\infty=e^t(A^\infty\oplus\cdots\oplus A^\infty)$ の場合は, $\tilde{\xi}\otimes\eta=\xi^*\eta$, $\xi\otimes\tilde{\eta}=\xi\eta^*$) ただし, 初めの同型写像は中への同型写像である. これが上への同型写像のとき, Ξ^∞ は full であるという.

<u>Ξ^∞ の接続 ∇</u>: Ξ^∞ を射影的右 A^∞ 加群とする. 線形写像 ∇: $\Xi^\infty\longmapsto\Xi^\infty\otimes\mathfrak{g}^*$ が, 各 $X\in\mathfrak{g}$ に対し

$$\nabla_X(\xi a)=(\nabla_X\xi)a+\xi\delta_X(a),\quad\xi\in\Xi^\infty,\ a\in A^\infty$$

をみたすとき, ∇ を Ξ^∞ の接続という. Ξ^∞ の2つの接続 ∇^1, ∇^2 の差 $\nabla^1_X-\nabla^2_X$ は, $E=\mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ の元である. したがって, Ξ^∞ の接続全体は E をベクトル空間とするアファイン空間である. つまり, ある定まった接続に E に値を取る $\mathfrak{g}$ 上の1形式を加えると, 任意の接続が得られる.

つぎに, $\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ を Ξ^∞ 上のエルミート計量とする. 接続 ∇ が

$$\delta_X(\langle\xi,\eta\rangle_{A^\infty})=\langle\nabla_X\xi,\eta\rangle_{A^\infty}+\langle\xi,\nabla_X\eta\rangle_{A^\infty},\quad X\in\mathfrak{g}$$

をみたすとき, ∇ は $\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ と両立するという. このような, 両立する接続の全体を $CC(\Xi^\infty)$ で表す. ($\Xi^\infty=e^t(A^\infty\oplus\cdots\oplus A^\infty)$ に対しては, $\nabla_X\xi=e\tilde{\delta}_X(\xi)$

と置いて得られる接続をグラスマン接続という．ただし，

$$\tilde{\delta}_X(e\,{}^t(a_1,\cdots,a_n)) = e\,{}^t(\delta_X(a_1),\cdots,\delta_X(a_n)).$$

容易に検証できるように，グラスマン接続は $\langle\xi,\eta\rangle_{A^\infty}=\xi^*\eta$ で与えられるエルミート計量と両立している）

$CC(\Xi^\infty)$ の２元 ∇^1,∇^2 はともに $\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ と両立しているから，$\nabla^1_X-\nabla^2_X$ は $\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ に関して歪随伴である．E の歪随伴な元全体を E_s とすれば，$CC(\Xi^\infty)$ はベクトル空間として E_s をもつアファイン空間である．

また，Ξ^∞ 上の接続 ∇ に対して，$\hat\nabla_X\hat\xi=(\nabla_X\xi)^\sim$ とすれば，$\hat\nabla$ は双対加群 $\hat\Xi^\infty$ 上の接続である．

Ξ^∞の曲率：Ξ^∞の接続∇に対し

$$\Theta_\nabla(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]},\quad X,Y\in\mathfrak{g}$$

を∇の曲率という．これはEに値をもつ$\mathfrak{g}$上の交代２形式である．∇が$CC(\Xi^\infty)$の元のときは，Θ_∇はE_sに値をもつ$\mathfrak{g}$上の交代２形式である．$\mathfrak{g}$上には正定値内積が在るものと仮定している．そこで$\{\omega_j : j=1,2,\cdots\}$を$\mathfrak{g}^*$の規格直交基底とすれば

$$\Theta_\nabla=\sum_{i<j}(\Theta_\nabla)_{ij}\,\omega^i\wedge\omega^j,\quad (\Theta_\nabla)_{ij}\in E_s$$

と表せる．このような，交代２形式 $\Phi=\sum_{i<j}\Phi_{ij}\,\omega^i\wedge\omega^j$, $\Psi=\sum_{i<j}\Psi_{ij}\,\omega^i\wedge\omega^j$ のE値内積$\{\Phi,\Psi\}$を$\sum_{i<j}\Phi_{ij}\Psi_{ij}$と置く．

定義1.1　$CC(\Xi^\infty,\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty})$ 上の汎関数

$$YM(\nabla)=-\tau_E(\{\Theta_\nabla,\Theta_\nabla\}),\quad \nabla\in CC(\Xi^\infty)$$

をYang-Mills汎関数という．

この汎関数の変分問題の解全体，ここではこの汎関数が極小値を取るような接続の全体 $MC(\Xi^\infty)$ の性質を調べることが，Yang-Mills の問題であるが，以下では $MC(\Xi^\infty)$ のゲージ同値類の空間を調べることにする．（以上の議論はエルミート計量 $\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ の選び方に依らないことに注意しておく．いま，$\langle\ ,\ \rangle'_{A^\infty}$ をもう1つのエルミート計量とすれば，$\langle\xi,\eta\rangle'_{A^\infty}=\langle h\xi,\eta\rangle_{A^\infty}$ をみたす，E の正な可逆元 h が存在する．したがって，$\nabla\in CC(\Xi^\infty,\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty})\mapsto h^{1/2}\nabla h^{-1/2}\in CC(\Xi^\infty,\langle\ ,\ \rangle'_{A^\infty})$ なる全単射がある．$\Theta_{h^{1/2}\nabla h^{-1/2}}=h^{1/2}\Theta_\nabla h^{-1/2}$ であるから，$YM(h^{1/2}\nabla h^{-1/2})=YM(\nabla)$）．

$E=\mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ のユニタリ元の全体を $U(E)$ とし，これをゲージ群という．この群は $MC(\Xi^\infty)$ 上へ

$$\nabla\in CC(\Xi^\infty)\ \longmapsto\ u\nabla u^*\in CC(\Xi^\infty)$$

のように作用する．ただし，$(u\nabla u^*)_X\,\xi=u(\nabla_X(u^*\xi))$，$X\in\mathfrak{g}$ である．したがって，$\Theta_{u\nabla u^*}(X,Y)=u\,\Theta(X,Y)\,u^*$ となり，$YM(u\nabla u^*)=YM(\nabla)$ となる．したがって，$U(E)$ の元は $MC(\Xi^\infty)$ を不変にしている．このとき，

$$MC(\Xi^\infty)/U(E)$$

を Ξ^∞ のモジュラス空間といい，これを無理数回転 C^* 環 A_θ の場合に具体的に求めるのがここでの目的である．

§2 定曲率の接続

この§では G は可換 Lie 群とする．したがって，曲率は $\Theta_\nabla(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X$ となっている．とくに，Θ_∇ がスカラー値のとき，∇ は定曲

率の接続であるという($\nabla \in CC(\Xi^\infty)$).

定理2.1　$\mathfrak{g}$は可換とする.

i) $(\Xi^\infty, \langle\ ,\ \rangle_{A^\infty})$が定曲率の接続をもてば, $MC(\Xi^\infty)$は両立する定曲率の接続全体と一致する.

ii) i)の接続の曲率の値はすべて一致している.

この定理はYM汎関数の変分問題の解が, 交換関係という物理的にも意味のある接続を与えることを主張しており, 非可換論における接続の意味を考える上で参考になる.

証明　∇^0を定曲率の接続とし, $\Theta^0=\Theta_{\nabla^0}$とすれば, $\Theta^0=\kappa 1$, $\kappa\in\Lambda^2\mathfrak{g}^*$.
$\nabla\in CC(\Xi^\infty)$ならば, $\nabla_X-\nabla^0_X=\mu_X\in E_s$, $X\in\mathfrak{g}$. したがって

$$\Theta_\nabla(X,Y)-\Theta^0(X,Y)=[\nabla^0_X,\mu_Y]-[\nabla^0_Y,\mu_X]+[\mu_X,\mu_Y]\in E_s$$

ここで, $\hat\delta_X(t)=[\nabla_X,t]$, $t\in E$とすれば, $\hat\delta_X$はE上の微分である.
しかも, $\hat\delta_X(\langle\xi,\eta\rangle_E)=\langle\nabla_X\xi,\eta\rangle_E+\langle\xi,\nabla_X\eta\rangle_E$をみたすので, $\tau_E(\hat\delta_X\langle\xi,\eta\rangle_E)$
$=\tau(\langle\eta,\nabla_X\xi\rangle_{A^\infty}+\langle\nabla_X\eta,\xi\rangle_{A^\infty})=\tau(\delta_X\langle\eta,\xi\rangle_{A^\infty})=0$. ゆえに, $\tau_E\circ\hat\delta_X=0$.
ここで, $\Psi=\Theta_\nabla-\Theta^0$とすれば, $\{\Psi,\Psi\}$は非正定値であり, しかも

$$\{\Theta_\nabla,\Theta_\nabla\}=\{\Theta^0,\Theta^0\}+\{\Theta^0,\Psi\}+\{\Psi,\Theta^0\}+\{\Psi,\Psi\}.$$

$\tau_E(\Psi(X,Y))=0$であるから, $\tau_E(\{\Theta^0,\Psi\})=0$. ゆえに

$$YM(\nabla)=YM(\nabla^0)-\tau_E(\{\Psi,\Psi\}).$$

となり, YMは∇^0で最小値を取る.

YMが∇で最小値を取れば, $\tau_E(\{\Psi,\Psi\})=0$. τ_Eは忠実だから, $\{\Psi,\Psi\}=0$. ゆえに$\Psi=0$となり, $\Theta_\nabla=\Theta^0$.

§3 ハイゼンベルグ加群

この§以降，$A=A_\theta$，$G=\mathbb{T}^2(=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ の場合だけを考える．$e(t)=e^{2\pi it}$ とする．交換関係 $U_2U_1=e(\theta)U_1U_2$ をみたす2つのユニタリ作用素 U_1, U_2 の生成する C^*環が A_θ である．A 上への G の作用 α を

$$\alpha_{(r,s)}(U_1^mU_2^n)=e(rm+sn)U_1^mU_2^n$$

で与える．$\mathfrak{g}$ の標準規格直交基底を X_1, X_2 とし，$\delta_j=\delta_{X_j}$ とすれば

$$\delta_k(U_k)=2\pi i U_k, \quad \delta_k(U_j)=0 \quad (j\neq k)$$

となる．このとき，A^∞ の元であることと，それが $\mathbb{Z}^2$ 上の複素数値急減少関数 f を用いて $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} f(m,n)U_1^mU_2^n$ と表せることは同値である．

以後，エルミート計量をもつ射影的右 A^∞ 加群のうち，ハイゼンベルグ群の表現空間に成るようなものを考察する．

互いに素な整数の対 $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ または $(p,q)=(0,1)$ に対して，射影的右 A^∞ 加群を作ることにする．2つのユニタリ作用素 $w_1, w_2\in\mathcal{L}(K)$ $(\dim K<\infty)$ で

$$w_2w_1=\overline{e(p/q)}\,w_1w_2, \quad w_1^q=1=w_2^q$$

をみたすものを考える（有限群 $\mathbb{Z}_q$ の交換関係）．例えば

$$w_1=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad w_2=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{2\pi i p/q} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{2\pi i p(q-1)/q} \end{pmatrix}.$$

$\varepsilon=(p/q)-\theta$ とする．$\mathbb{R}$ 上の複素数値急減少関数全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R})(\subset$

$L^2(\mathbb{R})$)の上の2つのユニタリ作用素 V_1, V_2 を

$$(V_1\xi)(s) = \xi(s-\varepsilon) \quad , \quad (V_2\xi)(s) = e(s)\xi(s)$$

とすれば，$V_2V_1 = e(\varepsilon)V_1V_2$．ここで，$W_j = V_j \otimes w_j$ とすれば，$W_2W_1 = \overline{e(\theta)}\, W_1W_2$ となる．そこで，$\Xi^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K = \mathcal{S}(\mathbb{R}, K)$ とおき，その元 $\xi \in \Xi^\infty$ に対して，U_j を $\xi U_j = W_j \xi$ により定義すれば，$U_2U_1 = e(\theta)U_1U_2$ となる．したがって，Ξ^∞ は右 A^∞ 加群になる．さらに $\xi, \eta \in \Xi^\infty$ に対し，

$$\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \sum_{m,n} \langle \xi U_1^m U_2^n, \eta \rangle_{L^2(\mathbb{R},K)} U_1^m U_2^n$$

とすれば，$\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ はエルミート計量である．また，Ξ^∞ が射影的であることも，後に示す，Ξ^∞ が $\mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$-$A^\infty_\theta$ 加群であるという事実から導かれる．今後このようにして得られた加群をハイゼンベルグ加群といい，必要があれば p, q の添字を付けて $\Xi^\infty_{p,q}$ と書くこともある．

さて，ハイゼンベルグ群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

の表現 $\{\pi, L^2(\mathbb{R}, K)\}$ を

$$\left(\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix}\right)\xi\right)(u) = e\left(\frac{ru-t}{\varepsilon}\right)\xi(u+s) \ , \quad \xi \in L^2(\mathbb{R}, K)$$

で与える．H の実 Lie 環 $\mathfrak{h}$ の2つの元を

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．$\mathfrak{g}$ の任意の元 $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ に対して，$\nabla_X = d\pi(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)$ とすれば，∇ は $\Xi_{p,q}^\infty$ 上の接続を与えることがわかる．例えば

$$(\nabla_{X_1}\xi)(s) = \frac{2\pi i s}{\varepsilon}\xi(s) \ , \qquad (\nabla_{X_2}\xi)(s) = \frac{d\xi}{ds}(s)$$

と成っている．しかも，$[\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}] = -\frac{2\pi i}{\varepsilon}1$ からわかるように，Θ_∇ は定曲率であり，$\nabla \in MC(\Xi_{p,q}^\infty)$ となる．

モジュラス空間 $MC(\Xi_{p,q}^\infty)/U(E)$ の決定：　$E = \mathrm{End}_{A_\theta^\infty}(\Xi_{p,q}^\infty)$ とする．$MC(\Xi_{p,q}^\infty)$ の任意の元は $\nabla + \mu$ （$\mu_X \in E_s$）と表せる．μ_X は $L^2(\mathbb{R},K)$ 上の作用素とみても有界であるから，$\nabla_X + \mu_X$ は ∇_X の有界摂動である．そこで，$\nabla + \mu$ を生成元にもつ H の表現 $\{\rho, L^2(\mathbb{R},K)\}$ が存在する．この場合の C^∞ ベクトルは，表現 π の場合と同じように，$\mathcal{S}(\mathbb{R},K)$ になることも確められる．π の既約表現の重複度は $\dim K$ であり $\Delta_{X_1} + i\Delta_{X_2}$ の指数と一致している．この値は有界摂動で変わらないから，π と ρ はユニタリ同値である．つまり

$$\rho(x) = Q\,\pi(x)\,Q^* \ , \qquad x \in H$$

となる $L^2(\mathbb{R},K)$ 上のユニタリ作用素 Q が存在する．いま

$$\pi^j(t) = \exp(t\nabla_{X_j}) \ , \quad \rho^j(t) = \exp(t(\nabla_{X_j} + \mu_{X_j})) \qquad j=1,2$$

とすれば，$\pi^j(t) = c^j(t)\rho^j(t)$ となる C^∞ ユニタリコサイクル c^j が存在する．c^j の C^∞ 性により，関数 $t \longmapsto Ad_{\pi^j(t)}(Q) = c^j(t)Q$ も C^∞ である．また，$\pi(x)Q\xi = Ad_{\pi(x)}(Q)\,\pi(x)\xi$，$\xi \in \Xi_{p,q}^\infty$ であるから，$Q\xi \in \Xi_{p,q}^\infty$ でもある．

上のユニタリ同値性から，$\nabla_X + \mu_X = Q\nabla_X Q^*$ となるが，さらに $\nabla_X + \mu_X = (W_j Q W_j^*)\nabla_X (W_j Q W_j^*)^*$ も成り立つ．したがって，$Q^* W_j Q W_j^*$ は ∇_X （$x \in \mathfrak{g}$）

と可換である．ゆえに $W_j Q W_j = Q(1\otimes u_j)$ となるユニタリ作用素 $u_j \in \mathcal{L}(K)$ が存在する．$Ad_{w_1w_2}(Q) = Ad_{w_2w_1}(Q)$ を用いると

$$(u_1w_1)(u_2w_2) = e(p/q)(u_2w_2)(u_1w_1)$$

が導けるが，u_jw_j を q 乗したものが 1 に成るとは限らない．そこで，K を q 次元部分空間 $K_1, \cdots, K_d$ の直和に分解し，各々の上で，w_1, w_2 が交換関係の既約表現を与えるようにする．u_1w_1, u_2w_2 に対しても同じように，$K = K_1' \oplus \cdots \oplus K_d'$ と既約分解すれば，各 K_k' 上で $(\overline{\beta_{jk}}\, u_jw_j)^q = 1$ となるような数 $\beta_{jk} = e(\varepsilon\sigma_j^k)$ が存在する．再び，交換関係の一意性を用いると，$vK_k = K_k'$ $(k=1,\cdots,d)$ かつ各 K_k 上で $v^*(\overline{\beta_{jk}}\, u_jw_j)v = w_j$ をみたすユニタリ作用素 $v \in \mathcal{L}(K)$ が存在する．

$\tilde{Q} = Q(1\otimes v)$ とすれば，$W_jQW_j^* = Q(1\otimes u_jw_jvw_j^*) = \tilde{Q}(1\otimes\beta_j)$ となる．ただし，β_j は分解 $K = K_1\oplus\cdots\oplus K_d$ に関する対角行列で，対角成分に $\beta_{j1},\cdots,\beta_{jd}$ をもつものとする．$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素

$$(M_k\xi)(s) = e(s\sigma_1^k)\xi(s) \quad , \quad (T_k\xi)(s) = \xi(s-\varepsilon\sigma_2^k)$$

を用いて，$L^2(\mathbb{R}, K_k)$ 上の作用素を $N_k = M_kT_k\otimes 1$，$L^2(\mathbb{R}, K)$ 上の作用素を $N = \sum_{k=1}^{d}{}^{\oplus} N_k$ とすれば，$W_jNW_j^* = (1\otimes\beta_j)^*N$ となる．ここで，$U = \tilde{Q}N$ とする．

$$Ad_{W_j}(U) = Ad_{W_j}(\tilde{Q})\,Ad_{W_j}(N) = \tilde{Q}(1\otimes\beta_j)(1\otimes\beta_j)^*N = U$$

となるから，$U \in \mathcal{U}(E)$．また，$N^*\nabla_{X_j}N = \nabla_{X_j} + \sigma_{X_j}$ となる．ただし，

$$\sigma_{X_j} = 2\pi i\begin{pmatrix} \sigma_j^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_j^d \end{pmatrix} \qquad j=1,2$$

したがって

$$U(\nabla_{x_j}+\sigma_j)U^* = (UN^*)\nabla_{x_j}(UN^*)^* = \tilde{Q}\,\nabla_{x_j}\tilde{Q}^* = \nabla_{x_j}+\mu_j$$

以上を要約すると

<u>命題 3.1</u>　$MC(\Xi^\infty_{p,q})/U(E)$ のどの元も $\nabla+\sigma$ なる形をした接続を含む.

§4　ハイゼンベルグ群のモジュラス空間

命題3.1により, $\nabla+\sigma$, $\nabla+\mu$

$$\sigma_{x_j} = 2\pi i\begin{pmatrix}\sigma_j^1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_j^d\end{pmatrix}\qquad \mu_{x_j} = 2\pi i\begin{pmatrix}\mu_j^1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_j^d\end{pmatrix}$$

なる形をした2つの接続が, 互いにゲージ変換で移り得るための条件を調べれば, $MC(\Xi^\infty_{p,q})/U(E)$ の形がわかる. そのためには $\Xi^\infty_{p,q} = (\Xi^\infty)^d$, $\Xi^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R},K)$ ($\dim K = q$) とおいて, Ξ^∞ について詳細に検討する. この場合には, $B=\mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ とおけば, $E(=\mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty_{p,q})) = M_d(B)$.

Ξ^∞ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_q)$ と表せるので, 加法群 $G=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_q$ とその2つの閉部分群 $H=\{n(\varepsilon,[p]) : n\in\mathbb{Z}\}$, $K=\{n(1/q,[1]) : n\in\mathbb{Z}\}$ を用いて解析する. これらを用いると, 2つの同相写像

$$(t,[k])\in G/K \longmapsto t-\frac{k}{q}\in\mathbb{T}\ (=\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

$$(t,[k])\in G/H \longmapsto \frac{1}{q}\left(\frac{t}{\varepsilon}-ak\right)\in\mathbb{T}$$

が考えられる. ただし, a は $ap-bq=1$ をみたす整数の1つを固定する. したがって, $C^*(H,G/K)$ が $\mathcal{S}(G)$ $(\subset L^2(G))$ の右側から

$$(\xi U_1)(t,[u]) = \xi(t-\varepsilon,[u-p]), \quad (\xi U_2)(t,[u]) = e\left(t-\frac{pu}{q}\right)\xi(t,[u])$$

により作用し，$C^*(K, G/H)$ が左側から

$$(Z_1\xi)(t,[u]) = \xi\left(t-\frac{1}{q},[u-1]\right), \quad (Z_2\xi)(t,[u]) = e\left(\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\varepsilon}-au\right)\right)\xi(t,[u])$$

により作用している．$U_2U_1 = e(\theta)U_1U_2$，$Z_2Z_1 = e(\theta')Z_1Z_2$ である．ただし，$\theta' = (a\theta-b)/(q\theta-p)$．ゆえに，$C^*(H, G/K) \cong A_\theta$，$C^*(K, G/H) \cong A_{\theta'}$ である．$\mathbb{T}^2$ の $C^*(K, G/H)$ への作用 α' を $\mathrm{Ad}_{\pi(x)}$ を用いて

$$\alpha'_{(r,s)}(Z_1^m Z_2^n) = e\left(\frac{rm+sn}{q\varepsilon}\right)Z_1^m Z_2^n$$

とすれば，$B = \mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ は力学系 $(A_{\theta'}, \mathbb{T}^2, \alpha')$ の C^∞ ベクトル全体と一致し，その元は $(\alpha'_{m,n}) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ により，$\sum \alpha'_{mn} Z_1^m Z_2^n$ と表される．α' の与え方から

$$[\nabla_{x_j}, Z_k] = \gamma\,\delta_{jk} Z_k, \quad \gamma = \frac{2\pi i}{q\varepsilon}$$

となる．

さて，ここで $\Xi^\infty_{p,q} = (\Xi^\infty)^d$，$E = M_d(B)$ の場合へ戻って，$\nabla+\sigma$，$\nabla+\mu$ を考える．ゲージ変換 $U \in \mathcal{U}(E)$ により，$U(\nabla+\sigma)U^* = \nabla+\mu$ とする．U の $d\times d$ 行列表示 (U_{kl}) を用いて，$\nabla U - U\nabla = U\sigma - \mu U$ を展開すると，$U_{kl} \neq 0$ ならば，$\sigma_j^l - \mu_j^k \in \varepsilon q\mathbb{Z}$ $(j=1,2)$ となることがわかる．ところで，U は可逆であるから，$\{1,\cdots,d\}$ の置換 ρ を適当に選べば，$U_{1\rho(1)} \neq 0, \cdots, U_{d\rho(d)} \neq 0$ とできるので，この場合には

$$\sigma_j^1 - \mu_j^{\rho(1)} \in \varepsilon q\mathbb{Z}, \quad \cdots, \quad \sigma_j^d - \mu_j^{\rho(d)} \in \varepsilon q\mathbb{Z} \quad (j=1,2)$$

となる．ここで，$\mathbb{R}/\varepsilon q\mathbb{Z}$ と $\mathbb{T}$ が同相であることに注意すれば，次の定理が得られる

定理4.1　$p, q\ (q>0)$ は互に素な整数，または $(p, q)=(0, 1)$ で $p/q \neq \theta$ とする．$\Xi^\infty_{p,q}$ がハイゼンベルグ加群ならば，

$$MC(\Xi^\infty_{p,q}) \cong (\mathbb{T}^2)^d/\Sigma_d$$

ただし，Σ_d は d 個の座標の置換群であり，d は $\Xi^\infty_{p,q}$ をさらに小さな射影的右 A^∞_θ 加群へ直和分解したときの個数である．

§5　一般の射影的 A^∞_θ 加群のモジュラス空間

ここでは，一般の射影的右 A^∞_θ 加群のモジュラス空間を前§のハイゼンベルグ加群の結果へ帰着させることを試みる．

$A=A_\theta$，$\delta = d\alpha$ は前のもの，Ω はエルミート計量 $\langle\ ,\ \rangle_{A^\infty}$ をもつ射影的右 A^∞_θ 加群，$\nabla \in MC(\Omega, \delta)$，$B=End_{A^\infty}(\Omega)$，$\hat{\delta}_X(b)=[\nabla_X, b]$ $(X\in \mathfrak{g},\ b\in B)$ とする．

Ξ が射影的右 B 加群ならば，$\Xi\otimes_B\Omega$ は射影的 A^∞_θ 加群である．このとき

(i)　∇' が $(\Xi, \hat{\delta})$ 上の接続ならば，$\nabla''=\nabla'\otimes 1_\Omega + 1_\Xi\otimes\nabla$ は $(\Xi\otimes_B\Omega, \delta)$ 上の接続である．

(ii)　$\nabla, \nabla', \nabla''$ の曲率をそれぞれ $\Theta, \Theta', \Theta''$ とすれば，$\Theta''(X, Y) = \Theta'(X, Y)\otimes 1_\Omega + 1_\Xi\otimes\Theta(X, Y)$，$X, Y\in\mathfrak{g}$．

(iii)　∇' が定曲率をもてば，∇'' も定曲率をもつ．

(iv)　∇' が両立すれば，∇'' も両立する．

などが成り立つ．ただし，(iv) では，Ξ のエルミート計量 $\langle\ ,\ \rangle_B$ に対し，

$\Xi \otimes_B \Omega$ のエルミート計量を $\langle \xi\otimes\omega, \xi'\otimes\omega' \rangle_{A^\infty} = \langle \omega, \langle \xi', \omega \rangle_B \omega' \rangle_{A^\infty}$ で考える.

とくに, Ω のエルミート計量の値域の線形拡大が A_θ^∞ と一致しているとき, Ω は full であるという. この場合には, Ω が B-A_θ^∞ 加群であるだけでなく, A_θ^∞ と B は森田同値である. この上で

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\xi} = (\nabla_X \xi)^\sim \quad , \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \xi \in \Omega$$

とすれば, $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{\Omega}$ 上の接続である. 仮定により, $\nabla \in MC(\Omega, \delta)$ であるから

(v) $\tilde{\nabla} \in MC(\tilde{\Omega}, \delta)$

でもある. さらに, A^∞ は $\tilde{\Omega} \otimes_B \Omega$ と, B は $\Omega \otimes_{A^\infty} \tilde{\Omega}$ と同一視できるので, ∇, $\tilde{\nabla}$ がエルミート計量と両立する条件は

(vi) $A^\infty = \tilde{\Omega} \otimes_B \Omega$ 上で, $\delta_X = \tilde{\nabla}_X \otimes 1_\Omega + 1_{\tilde{\Omega}} \otimes \nabla$

$B = \Omega \otimes_{A^\infty} \tilde{\Omega}$ 上で, $\hat{\delta}_X = \nabla_X \otimes 1_{\tilde{\Omega}} + 1_\Omega \otimes \tilde{\nabla}_X$

と表せる.

命題 5.1 $A, \delta, \Omega, \nabla, B, \hat{\delta}$ を上と同じとし, Ξ をエルミート計量をもつ射影的右 B 加群とする. Ω が full ならば

(i) 写像

$$\nabla' \in MC(\Xi, \hat{\delta}) \mapsto \nabla' \otimes 1_\Omega + 1_\Xi \otimes \nabla \in MC(\Xi \otimes_B \Omega, \delta)$$

$$T \in \mathrm{End}_B(\Xi) \mapsto T \otimes 1_\Omega \in \mathrm{End}_{A_\theta^\infty}(\Xi \otimes_B \Omega)$$

はともに全単射である.

(ii) この全単射により, Ξ と $\Xi \otimes_B \Omega$ のモジュライ空間を同一視することができる.

この証明は $\Xi\otimes_B\Omega\otimes_A\tilde{\Omega}=\Xi$, $(\Xi\otimes_B\Omega)\otimes_A\Omega\otimes_B\tilde{\Omega}=\Xi\otimes_B\Omega$ などの事実を用いて達成される.

命題 5.2　θ は任意の実数とする. Λ が射影的右 A_θ^∞ 加群ならば,

$$\Lambda\cong(\Xi^\infty)^d\otimes_{A_{\theta'}^\infty}\Omega$$

となるような射影的右 A_θ^∞ 加群 Ω と ハイゼンベルグ右 $A_{\theta'}^\infty$ 加群 Ξ^∞ が次の条件をみたすように存在する.

(i)　Ω は full である.

(ii)　$\mathrm{End}_{A_\theta^\infty}(\Omega)$ を完備化して得られる C^* 環は $A_{\theta'}$ である.

(iii)　接続 $\nabla\in MC(\Omega)$ を適当に選べば, これから導かれる $A_{\theta'}^\infty$ 上の微分子 $\hat{\delta}_X(u)=[\nabla_X,u]$ と $A_{\theta'}$ 上への $\mathbb{T}^2$ の自然な作用 α' の微分 $\delta'=d\alpha'$ とは定数倍しか違わない.

(iv)　$\Xi^\infty\otimes_{A_{\theta'}^\infty}\Omega$ は他の射影的右 A_θ^∞ 加群を直和因子として持たない.

証明　$K_0(A_\theta)$ の正錐を考えることにより, 予め Λ は他の射影的右 A_θ^∞ 加群を直和因子として持たないものと仮定できる (今までの議論の $d=1$ の場合). そこで, 次の 3 つの場合に分けて考える.

a)　$\theta\notin\mathbb{Q}$ で Λ が自由でない場合. この場合には, Λ がハイゼンベルグ加群 Ξ^∞ と同型であることが知られている. したがって, $\Xi^\infty=\Lambda$, $A_{\theta'}=A_\theta$, $\Omega=A_\theta^\infty$ とすればよい.

b)　θ が任意で, Λ が自由な場合. $\Lambda=A_\theta$ である. この場合には適当な θ' とハイゼンベルグ右 $A_{\theta'}^\infty$ 加群 Ξ^∞ を見つけて

$$A_\theta^\infty=\mathrm{End}_{A_{\theta'}^\infty}(\Xi^\infty)$$

とすることができる．いま，$\mathbb{T}^2$ の $A_{\theta'}$ への作用を α'，その微分を $\delta' = d\alpha'$，Ξ^∞ 上の接続を ∇ とする（$\nabla_x(\xi b) = (\nabla_x \xi) b + \xi \delta'_x(b)$, $b \in A^\infty_{\theta'}$）．このとき，$\hat{\delta}_x(a) = [\nabla_x, a]$, $a \in A^\infty_\theta$ は A_θ 上の元の微分子 δ_x と定数倍しか違わないから，$\hat{\Xi}^\infty$ 上の接続 $\hat{\nabla}$ は $MC(\hat{\Xi}^\infty)$ の元である．したがって，$\Omega = \hat{\Xi}^\infty$ とすれば，$\hat{\delta}_x(b) = [\hat{\nabla}_x, b]$, $b \in A^\infty_{\theta'}$ と δ'_x とは定数倍しか違わず，$\Lambda = A^\infty_\theta = \Xi^\infty \otimes_{A^\infty_{\theta'}} \Omega$ となっている．

c) $\theta \in \mathbb{Q}$ で Λ が自由でない場合．まず，射影的右 C 加群は自由であるか，またはハイゼンベルグのいずれかである．ただし $C = C(\mathbb{T})$.

$A_\theta = C$ のときは，$\theta \notin \mathbb{Q}$ の場合と同様にすればよい．

$A_\theta \not\cong C$ ならば，$A^\infty_\theta \cong \mathrm{End}_C(\Omega')$ となるような右 C 加群 Ω' が存在する．したがって，$\Omega = (\Omega')^\sim$ とすれば，Ω は full である．ここで $\Xi^\infty = \Lambda \otimes_{A^\infty_\theta} \Omega'$ とすれば，

$$\Lambda \cong (\Lambda \otimes_{A^\infty_\theta} \Omega') \otimes_C \Omega = \Xi^\infty \otimes_C \Omega.$$

Ξ^∞ は射影的右 C 加群であるから，自由でなければ，ハイゼンベルグ加群である．もし Ξ^∞ が自由ならば，Λ が他の射影的右 A^∞_θ 加群を直和因子として持たないという仮定から，$\Xi^\infty = C$，つまり $\Lambda \cong \Omega$ である．したがって，b) の場合と同様に，$C \cong \mathrm{End}_{A^\infty_{\theta'}}(\Xi)$ となるようなハイゼンベルグ右 $A^\infty_{\theta'}$ 加群 Ξ が存在する．ゆえに

$$\Lambda \cong \Xi \otimes_{A^\infty_{\theta'}} (\hat{\Xi} \otimes_C \Omega)$$

ここで改めて，$\hat{\Xi} \otimes_C \Omega$ を Ω とすればよい．

以上の命題を合わせると直ちに次の定理が得られる．

定理 5.3　Λ を射影的右 A_θ^∞ 加群で，他の射影的右 A_θ^∞ 加群を直和因子にもたないものとする．Λ^d にエルミート計量を与えれば，

$$MC(\Lambda^d) \cong (\mathbb{T}^2)^d / \Sigma_d .$$

これにより，任意の射影的右 A_θ^∞ 加群のモジュラス空間が適当な d により，$(\mathbb{T}^2)^d/\Sigma_d$ と同相に成ることがわかる．

§6　$Aut(A_\theta^\infty)$ について

ここでは，§§4, 5 において明らかに成った，射影的右 A_θ^∞ 加群 Λ の解空間 $MC(\Lambda)$ の構造を用いて，A_θ^∞ の自己同型群の構造を決定する．

$K_1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ であるから，$Aut(A_\theta)$ から $GL(2,\mathbb{Z})$ への準同型写像がある．$(n_{jk}) \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対し

$$\beta : U_j \longmapsto e\left(\frac{n_{1j}\, n_{2j}\, \theta}{2}\right) U_1^{n_{1j}} U_2^{n_{2j}} \qquad (j=1,2)$$

とすれば，β は A_θ の自己同型写像であるだけでなく，$SL(2,\mathbb{Z})$ の A_θ 上への作用に成っている．従って，$Aut(A_\theta)$ から $GL(2,\mathbb{Z})$ への準同型写像の像は $SL(2,\mathbb{Z})$ を含むことがわかる [Brenken, 綿谷]．実はこの像が $SL(2,\mathbb{Z})$ と一致するのではないかと予想されているが未解決である．$K_1(A_\theta) = K_1(A_\theta^\infty)$ であるから，同様な問題が A_θ^∞ に対しても考えられる．ここではその部分的解決を示す．

§3で与えた $\mathbb{T}^2$ の作用 α とこの β とを合わせたものは半直積 $\mathbb{T}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ の A_θ^∞ 上への作用を与えていることに注意する．

定義6.1. 無理数θに対し，$|1-e(n\theta)|^{-1}$がnの関数として多項式の早さの増大度をもつとき，θはDiophantine条件をみたすまたはgenericであるという．

定理6.2　θがgenericならば

$$\mathrm{Aut}(A_\theta^\infty) \cong PU_0(A_\theta^\infty) \rtimes (\mathbb{T} \rtimes SL(2,\mathbb{Z}))$$

ただし，$U_0(A_\theta^\infty)$は$U(A_\theta^\infty)$の主連結成分で，$PU_0(A_\theta^\infty) = U_0(A_\theta^\infty)/\{e(\lambda)1 : \lambda \in \mathbb{T}\}$である．

補題6.3　$h_j \in A_\theta^\infty$は歪随伴，$\tau(h_j)=0$かつ$\delta_1 + ad_{h_1}$と$\delta_2 + ad_{h_2}$が可換であるならば，$h_j = u^*\delta_j(u)$　$j=1,2$　をみたす$u \in U_0(A_\theta^\infty)$が存在する．(定数倍を除いて一意的に定まる)

この補題の$h_j = u^*\delta_j u$から直ちに，$Ad_u \circ (\delta_j + ad_{h_j}) = \delta_j \circ Ad_u$であることがわかる．

証明　自由なA_θ^∞加群$\Lambda = A_\theta^\infty$上の接続としてグラスマン接続$\nabla_X = \partial_X$を取る．$\nabla$の曲率は0である．$\nabla'_{X_j} = \nabla_{X_j} + h_j$とすれば，$\nabla'$も$\Lambda$上の接続であるが，$\delta_1 + ad_{h_1}$と$\delta_2 + ad_{h_2}$の可換性を使うと，その曲率も0である．ゆえに，$\nabla, \nabla' \in MC(\Lambda)$．　命題5.2の証明のb)を用いると，$\nabla, \nabla'$は適当なハイゼンベルグ加群のMCの元と見做すことができる．したがって，命題3.1により，適当なゲージ変換$v_j \in U(E)$を用いて

$$v_1 \nabla_X v_1^* = \nabla_X + \sigma_1 \quad , \quad v_2 \nabla'_X v_2 = \nabla'_X + \sigma_2$$

と表せる．したがって，$v = v_1^* v_2$は$\nabla'_X - v^*\nabla_X v = \sigma_2 - \sigma_1$を導く．ハイゼンベルグ群は直和因子を持たないように選べるので，$\sigma_2 - \sigma_1 \in \mathbb{C}1$．

したがって，$v^*\nabla_x v = \nabla_x + v^*\delta_x(v)$ となることをつかうと $h_j - v^*\delta_j(v)$
$= \nabla'_{x_j} - (\nabla_{x_j} + v^*\delta_{x_j}(v)) \in \mathbb{C}1$ となる．

さて，ここで選んだ $v \in U(A_\theta^\infty)$ の $K_1(A_\theta) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ における値が $(-n_1, -n_2)$ ならば，$w = U_1^{n_1}U_2^{n_2}$ を用いて作る $u = wv$ の値は $(0, 0)$ である．したがって，$u \in U_0(A_\theta^\infty)$ となり $\tau(u^*\delta_j(u)) = 0$．$w^*\delta_j(w) \in \mathbb{C}1$ であるから，$u^*\delta_j(u) = w^*\delta(w) + v^*\delta(v)$．ゆえに，$h_j - u^*\delta_j(u) = h_j - v^*\delta_j(v) - w^*\delta_j(w) \in \mathbb{C}1$．仮定により，$\tau(h_j) = 0$ であるから，$h_j = u^*\delta_j(u)$．

$h_j = (u')^*\delta_j(u')$ をみたす u' が在ったとすれば，$(uu')^*\delta_j(uu'^*) = 0$．ゆえに $\delta_j(uu'^*) = 0$．ゆえに $uu'^* \in (A_\theta^\infty)^\alpha = \mathbb{C}1$．

定理の証明　自然な準同型写像 $\mathrm{Aut}(A_\theta^\infty) \longrightarrow GL(2, \mathbb{Z})$ の像が $SL(2, \mathbb{Z})$ に含まれることは [J. Cuntz, G.A. Elliott, F.M. Goodman, P.E.T. Jorgensen : On the classification of non commutative tori II, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 7 (1985), 189–194] で示されている．したがって，その核が $PU_0(A_\theta^\infty) \rtimes \mathbb{T}^2$ と同型になることを示せばよい．$\mathbb{T}^2$ の A_θ^∞ 上への作用 α の内部的な部分は $\mathrm{Ad}_{U_1^m U_2^n}$，$(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ と書ける．したがって，$\{\alpha_{(r,s)} : (r, s) \in \mathbb{T}^2\}$ と $\{\mathrm{Ad}_u : u \in U_0(A_\theta^\infty)\}$ との共通部分は恒等写像しかない．

$K_1(A_\theta^\infty)$ を不動にする $\mathrm{Aut}(A_\theta^\infty)$ の元を γ とする．$\gamma^{-1}\circ\delta_j\circ\gamma$ $(j = 1, 2)$ は互いに可換な微分子である．θ が Diophantine 条件をみたすので，$\gamma^{-1}\circ\delta_j\circ\gamma = \delta'_j + \mathrm{ad}_{h_j}$ と書ける．ただし，δ'_j は δ_1 と δ_2 の実1次結

合であり, h_j は自随伴な A_θ^∞ の元である. 写像 $\delta \longmapsto \tau(U_k^*\delta(U_k))$ $k=1,2$ は内部的微分子の上では 0. したがって U_j を $\gamma(U_j)$ に代えてもその値は変わらない. ゆえに

$$\tau(U_k^*\delta_j'(U_k)) = \tau(\gamma(U_k)^*\delta_j(\gamma(U_k)))$$
$$= \tau(U_k^*\delta_j(U_k)).$$

いま, $\delta_j' = \lambda_1\delta_1+\lambda_2\delta_2$ $(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R})$ とする. $U_k^*\delta_j'(U_k) = (\lambda_1\delta_{1k}+\lambda_2\delta_{2k})1$, $U_k^*\delta_j(U_k)=\delta_{jk}1$ であるから, $j=1$ ならば $\lambda_1=1, \lambda_2=0$; $j=2$ ならば $\lambda_1=0, \lambda_2=1$. ゆえに $\delta_j'=\delta_j$.

また h_j の代りに, $h_j-\tau(h_j)$ を用いて, $\tau(h_j)=0$ と仮定できるので, 補題6.3が使えて, $\mathrm{Ad}_u\circ(\gamma^{-1}\circ\delta_j\circ\gamma)=\delta_j\circ\mathrm{Ad}_u$ をみたす $u\in U_0(A_\theta^\infty)$ が存在する. ゆえに, $\gamma\circ(\mathrm{Ad}_u)^{-1}$ は δ_1, δ_2 と可換だから, $\gamma\circ(\mathrm{Ad}_u)^{-1}$ は α の各固有空間 $\mathbb{C}U_1^mU_2^n$ $((m,n)\in\mathbb{Z}^2)$ を不変にする. したがって, $(\gamma\circ(\mathrm{Ad}_u)^{-1})(U_1^mU_2^n)=\lambda(m,n)U_1^mU_2^n$ をみたす, $\mathbb{Z}^2$ 上の関数 λ が存在する. $\gamma\circ(\mathrm{Ad}_u)^{-1}$ は自己同型写像であるから, $\lambda(m,n)=\lambda(1,0)^m\lambda(0,1)^n$. ゆえに $\lambda(m,n)=e(rm+sn)$ となる $(r,s)\in\mathbb{T}^2$ が存在する. つまり, $\gamma\circ(\mathrm{Ad}_u)^{-1}=\alpha_{(r,s)}$ である. したがって, γ は $\{\alpha_{(r,s)} : (r,s)\in\mathbb{T}^2\}$ と $\{\mathrm{Ad}_u : u\in U_0(A_\theta^\infty)\}$ のそれぞれの元の積に成っている. (最近, [F.M. Goodman - P.E.T. Jorgensen : Smooth Lie group actions on non commutative tori] によれば, A_θ^∞ には, θ が Diophantine 条件をみたしている場合には, 非可換 Lie 群が作用しないことや, コンパクト半単純 Lie 群の作用は内部的なものに限られることがわかる.)