数理解析研究所講究録
623巻 1987年 87-98

対数正規分布と一般対数正規分布

—— 諸性質と母数推定 ——

東京理科大理工　清水　邦夫（Kunio Shimizu）

1．はじめに

Aitchison and Brown（1957）によるモノグラフとJohnson and Kotz（1970）による分布の本（14章）が出版されて以来，対数正規分布に関して，応用はもちろんのこと，諸性質，母数推定法，仮説検定法の研究の著しい増加が見られる（Crow and Shimizu eds.，準備中）．

実生活において現れる多くの量が正の値を取り，かつ分布を描いてみると対称とはならず正の方向に歪む場合が多いことは対数正規分布が当てはめられる一つの理由とされた．分布の適合という観点から見た場合は対数正規分布とは限らずガンマ分布が当てはめられることも多かった．一方，分布の生成を考慮した当てはめも見られる．鉱物の直径の分布は，

本研究は文部省科学研究費（No．321－6009－61530017）によって援助された．

比例効果則の逆プロセスにより，対数正規分布に近似的に従うと説明され，その体積の分布は，対数正規変量の積はまた対数正規分布に従うという性質により，やはり対数正規分布に従うという具合に都合よく説明された．その他対数正規分布の応用は，経済学，生物学，気象学，水文学，工学において見られる．

母数（関数）の推定は，2母数対数正規分布の場合と3母数対数正規分布の場合とでは著しく様相が異なる．本稿において扱うのは，2母数対数正規分布とそれの一般化における母数関数の推定である．

2．対数正規分布と一般対数正規分布

正値を取る確率変数Xの自然対数 $\ln X$ が平均 μ と分散 σ^2（$\sigma>0$）を持つ正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき，Xは2母数対数正規分布 $\Lambda(\mu,\sigma^2)$ に従うといわれる．それは，正の方向に歪み，無限分解可能，積に関して再生性を持ち，任意次数のモーメントを持つがモーメントによって分布は一意的に決まらない，Lorenz曲線は対角線に関し対称という性質を持つ分布である．

対数正規分布の一般化の方向はいろいろあろうが，ここでいう一般対数正規分布とはつぎのようなものを指すものとす

る．確率変数 Y を正規分布 N (μ, σ^2) に従うとし，f を recursive-type 関数 (Neyman and Scott, 1960) とする．recursive-type 関数というのは２階の微分方程式 $f^{(2)} = A+Bf$（AとBは実定数）を満たす関数のことである．例として $(y+c)^2$, c は実定数，$\exp(y)$, $\sin^2 y$, $\sinh^2 y$, $\cosh y$, $\sinh y$ をあげることができる．このとき確率変数 f(Y) の従う分布を母数 μ と σ^2 を持つ一般対数正規分布と呼ぶことにする．特に $f(y) = \exp(y)$ とすれば，対数正規分布に一致する．

対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の基準化変数の分布は σ が小さいとき標準正規分布で近似できることが知られている．これと類似の結果が一般対数正規分布についても成り立つ．すなわち，確率変数 X を母数 μ と σ^2 を持つ一般対数正規分布に従うとするとき，その基準化変数は $f^{(1)}(\mu) \neq 0$ の条件の下で

$$\frac{X-m}{s} = \mathrm{sgn}(f^{(1)}(\mu))U + \frac{A}{2}|f^{(1)}(\mu)|^{-1}(U^2-1)\sigma - \frac{A^2}{4}\{f^{(1)}(\mu)\}^{-2}U\sigma^2 - \frac{A^3}{8}|f^{(1)}(\mu)|^{-3}(U^2-1)\sigma^3 + O(\sigma^4), \quad B = 0,$$

$$\frac{X-m}{s} = \mathrm{sgn}(f^{(1)}(\mu))U + \frac{B}{2}|f^{(1)}(\mu)|^{-1}\{f(\mu) + \frac{A}{B}\}(U^2-1)\sigma + B\,\mathrm{sgn}(f^{(1)}(\mu))U[\frac{1}{6}U^2 - \frac{1}{2}\{f^{(1)}(\mu)\}^{-2}[\{f^{(1)}(\mu)\}^2 + \frac{B}{2}\{f(\mu) + \frac{A}{B}\}^2]]\sigma^2 + O(\sigma^3), \quad B \neq 0,$$

と展開される．ここで，mとs^2は一般対数正規分布の平均

$$E(X) = \begin{cases} f(\mu)+\frac{A}{2}\sigma^2, & B=0, \\ \{f(\mu)+\frac{A}{B}\}e^{B\sigma^2/2}-\frac{A}{B}, & B\neq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

と分散

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(X) \\ &= \begin{cases} \sigma^2[\{f^{(1)}(\mu)\}^2+\frac{A^2}{2}\sigma^2], & B=0, \\ \frac{1}{2}[(e^{B\sigma^2}-1)^2\{f(\mu)+\frac{A}{B}\}^2+\frac{1}{B}(e^{2B\sigma^2}-1)\{f^{(1)}(\mu)\}^2], & B\neq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

を表わし，sgnは符号関数を表わす．

このように対数正規分布のある性質はそのまま一般対数正規分布に遺伝する．他の諸性質についての遺伝の仕方は不明である．以下では，対数正規分布の母数関数と一般対数正規分布の平均と分散の一様最小分散不偏（UMVU）推定について考える．UMVU推定量とその分散は一般超幾何関数を用いて簡潔に表現されることが見られる．推定に関しても，ある部分では，対数正規分布における手法が一般対数正規分布においても有用なわけである．また，一般対数正規分布において議論を行うことの長所は，対数正規分布を定義する際に表れる対数関数または指数関数が議論を進める上でどれくらい本質的かを知ることができる点にあるだけでなく，応用上よく現れる変換を含んでいる点にあることに注意しよう．

3．対数正規分布の母数関数のUMVU推定

対数正規分布の多くの特性値は a, b, c を実定数として

$$\theta_{a,b,c} = \sigma^{2c}\exp(a\mu + b\sigma^2) \qquad (3.1)$$

とその一次結合で表わされる．例えば，平均は $\exp(\mu+\sigma^2/2)$，p次モーメントは$\exp(p\mu+p^2\sigma^2/2)$，中央値は$\exp(\mu)$，モードは $\exp(\mu-\sigma^2)$，分散は $\exp(2\mu+\sigma^2)\{\exp(\sigma^2)-1\}$，歪度の2乗は$(\omega-1)(\omega+2)^2$，尖度は$\omega^4+2\omega^3+3\omega^2-3$，変動係数の2乗は $\omega-1$で表わされる．ここで $\omega=\exp(\sigma^2)$ である．

X_1, X_2, ・・・, X_n , $n \geq 2$, を未知母数μとσ^2を持つ対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ からの確率標本とし

$$\overline{Y} = \Sigma_{i=1}^{n} Y_i/n \ , \ S = \Sigma_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2 \qquad (3.2)$$

とする．ここで $Y_i = \ln X_i$, $i = 1,2,\cdots,n$ ．$\overline{Y}$とSは平均μと分散σ^2を持つ正規分布の完備十分統計量だから母数関数 $g(\mu,\sigma^2)$ の$\overline{Y}$とSに基づく不偏推定量はそれのUMVU推定量である．

母数関数（３．１）のUMVU推定量を構成するさいに，Finney (1941) の方法を用いよう．統計量$\overline{Y}$とSは独立であり

$$E(\exp(a\overline{Y})) = \exp(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2n})$$

だから

$$\theta_{a,b,c} = \exp(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2n}) \times \sigma^{2c} \exp((b - \frac{a^2}{2n})\sigma^2)$$

のＵＭＶＵ推定量を求めるにはＳの関数ｈを

$$E(h(S)) = \sigma^{2c} \exp((b - \frac{a^2}{2n})\sigma^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(b - \frac{a^2}{2n})^k \sigma^{2(k+c)}$$

となるように求めればよい．このようなｈは

$$E(S^j) = \frac{2^j \Gamma((n-1)/2+j)}{\Gamma((n-1)/2)} \sigma^{2j} \qquad (j\text{は非負整数})$$

より

$$h(S) = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-1)/2+c)} (\frac{S}{2})^c \ {}_0F_1(\frac{n-1}{2} + c; \frac{2bn-a^2}{4n} S)$$

と求められる． こうして（３．１）のＵＭＶＵ推定量は

$$\hat{\theta}_{a,b,c}$$

$$= \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-1)/2+c)} e^{a\overline{Y}} (\frac{S}{2})^c \ {}_0F_1(\frac{n-1}{2} + c; \frac{2bn-a^2}{4n} S) \qquad (3.3)$$

となる．ここで，${}_0F_1$ は一般超幾何関数の一員で，α を複素定数で z を複素変数とするとき

$$ {}_0F_1(\alpha; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(\alpha)_j j!},$$

$$(\alpha)_j = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1), & j \geq 1, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$$

である．（注：一般超幾何関数は，α_i，β_k を複素定数で p と q を非負の整数とするとき，

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \cdots, \alpha_p; \beta_1, \cdots, \beta_q; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j \cdots (\alpha_p)_j}{(\beta_1)_j \cdots (\beta_q)_j} \frac{z^j}{j!}$$

と記される．それは，$p < q + 1$ ならば有限複素平面のあら

ゆる点で絶対収束，p＝q＋1ならば｜z｜＜1に対して絶対収束，p＞q＋1ならば有限級数とならない限りはすべてのz≠0に対して発散する．）ここに都合の悪いことがおきる．すなわち，$\theta_{a,b,c}>0$にもかかわらずa，b，nの組み合わせによって$\hat{\theta}_{a,b,c}<0$となる場合がある．そのような場合，この推定量を用いることは不適であろう．

分散の計算には一般超幾何関数についての諸公式を用いる方法やBhattacharyya下界への収束を用いる方法がある．（3．3）の分散は

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{a,b,c}) = \theta^2_{a,b,c}\{\frac{\Gamma((n-1)/2)\Gamma((n-1)/2+2c)}{\Gamma^2((n-1)/2+c)} e^{2(\frac{a^2}{n}-b)\sigma^2} \times {}_2F_2(\frac{1}{2}(n-2+2c),\frac{n-1}{2}+2c;\frac{n-1}{2}+c,n-2+2c;\frac{2(2bn-a^2)}{n}\sigma^2)-1\}$$

で与えられる．特にc＝0ならば

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{a,b,0}) = \theta^2_{a,b,0}\{e^{a^2\sigma^2/n}\ {}_0F_1(\frac{n-1}{2};\frac{(2bn-a^2)^2}{4n^2}\sigma^4)-1\}$$

と表わされる．また，c＝0のときの（3．1）の一次結合

$$\theta = \Sigma\ C_{a,b}\,\theta_{a,b,0}$$

のUMVU推定量の分散は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\hat{\theta})\\ &= \sum_{(a,b)} C^2_{a,b}\, e^{2a\mu+2b\sigma^2}\{e^{a^2\sigma^2/n}\ {}_0F_1(\frac{n-1}{2};\frac{(2bn-a^2)^2}{4n^2}\sigma^4)-1\}\\ &+2\sum_{(a,b)\neq(a',b')} C_{a,b}C_{a',b'}\, e^{(a+a')\mu+(b+b')\sigma^2}\\ &\qquad\times\{e^{aa'\sigma^2/n}\ {}_0F_1(\frac{n-1}{2};\frac{1}{4n^2}(2bn-a^2)(2b'n-a'^2)\sigma^4)-1\}.\end{aligned}$$

こうして母数関数（3．1）とその一次結合のUMVU推定

量およびその分散は一般超幾何関数を用いて簡潔に表現された．

4．一般対数正規分布の平均と分散のUMVU推定

未知母数μとσ^2を持つ一般対数正規分布からの確率標本を$X_1, X_2, \cdots, X_n$, $n \geqq 2$，とする．これらは正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う変数$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$から$X_i = f(Y_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$，として得られるとしてよい．fはrecursive-type関数である．以下では，$Y_1, \cdots, Y_n$から平均（2．1）と分散（2．2）のUMVU推定量を構成し，それらの分散を定式化する．

$\overline{Y}$とSは正規分布の場合と同じ（3．2）で定義されるとする．そうすると，（2．1）と（2．2）のUMVU推定量はそれぞれ

$$\hat{\theta} = \begin{cases} f(\overline{Y}) + \dfrac{A}{2n} S, & B = 0, \\ \{f(\overline{Y}) + \dfrac{A}{B}\}\ {}_0F_1\left(\dfrac{n-1}{2}; \dfrac{B}{4}(1 - \dfrac{1}{n}) S\right) - \dfrac{A}{B}, & B \neq 0, \end{cases}$$

$$\hat{\phi}^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}\left[S\{f^{(1)}(\overline{Y})\}^2 + \dfrac{(n-2)A^2}{2n(n+1)} S^2\right], & B = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left[\{\Xi(4B(1-\dfrac{1}{n})) - \Xi(2B(1-\dfrac{2}{n})) - \Xi(2B) + 1\}\{f(\overline{Y}) + \dfrac{A}{B}\}^2 \right. \\ \left. + \dfrac{1}{B}\{\Xi(4B(1-\dfrac{1}{n})) - \Xi(2B(1-\dfrac{2}{n})) + \Xi(2B) - 1\}\{f^{(1)}(\overline{Y})\}^2\right], \\ \qquad B \neq 0, \end{cases}$$

である．ここで，

$$\Xi(x) = {}_0F_1(\frac{n-1}{2};\frac{x}{4}S).$$

それらの分散は

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{n}\sigma^2[\{f^{(1)}(\mu)\}^2+\frac{A^2}{2}\sigma^2], \quad B=0, \\ \frac{1}{2}[e^{2B\sigma^2/n}[\{f(\mu)+\frac{A}{B}\}^2+\frac{1}{B}\{f^{(1)}(\mu)\}^2]+\{f(\mu)+\frac{A}{B}\}^2 \\ -\frac{1}{B}\{f^{(1)}(\mu)\}^2]e^{B(1-1/n)\sigma^2}\ {}_0F_1(\frac{n-1}{2};\frac{B^2}{4}(1-\frac{1}{n})^2\sigma^4) \\ -\{f(\mu)+\frac{A}{B}\}^2e^{B\sigma^2}, \quad B\neq 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\phi}^2) = \begin{cases} \frac{2}{n-1}\sigma^4[f^{(1)}(\mu)\}^4+4A^2\sigma^2\{f^{(1)}(\mu)\}^2+\frac{n^3+n^2-3n+6}{n^2(n+1)}A^4\sigma^4], \\ \hfill B=0, \\ \frac{1}{8}[\{\lambda_1(e^{4B\sigma^2/n}+e^{-4B\sigma^2/n})+2\lambda_2+4\lambda_3-2(e^{B\sigma^2}-1)^4\}\{f(\mu)+\frac{A}{B}\}^4 \\ +\frac{2}{B}\{\lambda_1(3e^{4B\sigma^2/n}-e^{-4B\sigma^2/n})-2\lambda_2-2(e^{B\sigma^2}-1)^2(e^{2B\sigma^2}-1)\} \\ \times\{f(\mu)+\frac{A}{B}\}^2\{f^{(1)}(\mu)\}^2+\frac{1}{B^2}\{\lambda_1(e^{4B\sigma^2/n}+e^{-4B\sigma^2/n}) \\ +2\lambda_2-4\lambda_3-2(e^{2B\sigma^2}-1)^2\}\{f^{(1)}(\mu)\}^4], \quad B\neq 0, \end{cases}$$

で与えられる．ここで，

$$\lambda_1 = e^{4B\sigma^2}\Psi(16B^2(1-\frac{1}{n})^2)+e^{2B\sigma^2}\Psi(4B^2(1-\frac{2}{n})^2)$$
$$-2e^{3B\sigma^2}\Psi(8B^2(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})),$$
$$\lambda_2 = e^{2B\sigma^2}\Psi(4B^2)-2e^{B\sigma^2}+1,$$
$$\lambda_3 = e^{2B\sigma^2}\Psi(4B^2(1-\frac{2}{n}))-e^{3B\sigma^2}\Psi(8B^2(1-\frac{1}{n}))+e^{2B\sigma^2}-e^{B\sigma^2},$$
$$\Psi(x) = {}_0F_1(\frac{n-1}{2};\frac{x}{4}\sigma^4).$$

こうして母数関数（２．１）と（２．２）のＵＭＶＵ推定量およびその分散は一般超幾何関数を用いて簡潔に表現された．

5．2変量一般対数正規分布

確率ベクトル $(X, Y)'$ は平均ベクトル $\mu = (\mu_1, \mu_2)'$ と共分散行列 Σ を持つ2変量正規分布に従うとする．Xの分散は $\sigma_1{}^2$ $(\sigma_1 > 0)$，Yの分散は $\sigma_2{}^2$ $(\sigma_2 > 0)$，XとYの相関係数は ρ $(|\rho| < 1)$ とする．fとgは recursive-type 関数とし．それぞれ $f^{(2)} = A + Bf$ と $g^{(2)} = \alpha + \beta g$ を満たすとする．このとき，$(f(X), g(Y))'$ が従う分布を2変量一般対数正規分布と呼ぶことにする．

σ_1，σ_2，ρ が未知母数のとき，$\theta_1 = E(f(X))$ と $\theta_2 = E(g(Y))$ のUMVU推定量 $\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ およびそれらの分散は4節ですでに与えられているとしてよい．$\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ との共分散は，$B = \beta = 0$ のとき

$$\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{n}\sigma_{12}\{f^{(1)}(\mu_1)g^{(1)}(\mu_2) + \frac{A\alpha}{2}\sigma_{12}\},$$

$B = 0$ かつ $\beta \neq 0$ のとき

$$\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{n}\sigma_{12}\{f^{(1)}(\mu_1)g^{(1)}(\mu_2) + \frac{A\beta}{2}(g(\mu_2) + \frac{\alpha}{\beta})\sigma_{12}\}e^{\beta\sigma_2^2/2},$$

$B \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ のとき，${}_0F_1$ を用いて

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \\
&= \frac{1}{2}e^{(B\sigma_1^2+\beta\sigma_2^2)/2}[\{f(\mu_1) + \frac{A}{B}\}\{g(\mu_2) + \frac{\alpha}{\beta}\}\{(e^{\sqrt{B\beta}\sigma_{12}/n} + e^{-\sqrt{B\beta}\sigma_{12}/n}) \\
&\times {}_0F_1(\frac{n-1}{2}; \frac{B\beta}{4}(1-\frac{1}{n})^2\sigma_{12}^2) - 2\} + \frac{1}{\sqrt{B\beta}}f^{(1)}(\mu_1)g^{(1)}(\mu_2) \\
&\times (e^{\sqrt{B\beta}\sigma_{12}/n} - e^{-\sqrt{B\beta}\sigma_{12}/n})\,{}_0F_1(\frac{n-1}{2}; \frac{B\beta}{4}(1-\frac{1}{n})^2\sigma_{12}^2)]
\end{aligned}$$

と表現される．ここで $\sigma_{12}=\sigma_1\sigma_2\rho$．

f と g が指数関数の場合，すなわち $(\exp(X),\exp(Y))'$ が2変量対数正規分布の場合には，つぎのことが言える．確率標本を $(X_{1i},X_{2i})'$, $i=1,\cdots,n$, $n\geq 3$, とし，$j=1,2$ に対し $\overline{Y}_j=\sum_{i=1}^{n}\ln X_{ji}/n$ ，$S_j=\sum_{i=1}^{n}(\ln X_{ji}-\overline{Y}_j)^2$ とおくとき，母数関数

$$\theta_{a_j,b_j}=\exp(a_j\mu_j+b_j\sigma_j^2)$$

のUMVU推定量は

$$\hat{\theta}_{a_j,b_j}=e^{a_j\overline{Y}_j}\ {}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{2nb_j-a_j^2}{4n}S_j\right),$$

であり，それらの共分散はやはり ${}_0F_1$ を用いて

$$\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_{a_1,b_1},\hat{\theta}_{a_2,b_2})=\theta_{a_1,b_1}\theta_{a_2,b_2}$$
$$\times(e^{a_1a_2\sigma_1\sigma_2\rho/n}\ {}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{1}{4n^2}(2nb_1-a_1^2)(2nb_2-a_2^2)\sigma_1^2\sigma_2^2\rho^2\right)-1).$$

で与えられる．

6．むすび

対数正規分布と一般対数正規分布のいくつかの母数関数のUMVU推定量とその分散や共分散が一般超幾何関数によって簡潔に書かれることを見た．勿論，他の母数関数に関しても，さまざまな関数を用いれば，UMVU推定量とそれらの分散や共分散を表現することは可能である．本稿でのねらいは一般超幾何関数の範囲内での表現を試みることにあったわ

けである。

最後に，B＝0の場合はB≠0の場合においてゼロへの極限を取れば得られるが，この計算はやっかいであることに注意する。

文献

Aitchison,J. and Brown,J.A.C.(1957). The Lognormal Distribution,Cambridge University Press,Cambridge.

Crow,E.L. and Shimizu,K. eds.(準備中). Lognormal Distributions: Theory and Applications,Marcel Dekker,Inc.,New York.

Finney,D.J.(1941). On the distribution of a variate whose logarithm is normally distributed, J.R. Statist.Soc.Suppl.,7,155-161.

Johnson,N.L. and Kotz,S.(1970). Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions-1, Houghton Mifflin Company, Boston.

Neyman,J. and Scott,E.L.(1960). Correction for bias introduced by a transformation of variables, Ann. Math.Statist., 31: 643-655.