

Geodesic Links in S^3

大阪市大・理 作間 誠 (Makoto SAKUMA)

針金で作った結び目を無重力空間の中に置き、それを帯電してやると、クーロンの法則に従って結び目の各部分は反発し合ひ、空間の中にできるだけ均等に広がるようにするであろう。そして、力のバランスが取れ、安定状態になった時の結び目の位置は、その knot type の特徴 (特に対称性) を良く反映しているのではないだろうか。この素朴な考えは次の様な問題として述べる事ができる。

各埋め込み $S^1 \hookrightarrow S^3$ に対して "エネルギー" を定義し、その極値を与えるものとして、knot type の "標準的位置" とするものを選び出せたりだろうか？ もし、その様なものがあるならば、knot の性質、特に対称性とどの様な関係があるか？

この問題を、 S^3 内の大円で作る link (geodesic link)

に限って考察するのが、本論の目的である。

§1. Geodesic Links in S^3

S^3 を 4次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 内の単位球面とする。

この時、 S^3 内の geodesic は 原点を通る 2-plane P と S^3 の交わりとして得られる。従って S^3 内の geodesic (resp. oriented geodesic) 全体が作る空間 \mathcal{G} (resp. $\tilde{\mathcal{G}}$) は Grassmann manifold $Gr_2(\mathbb{R}^4)$ (resp. oriented Grassmann manifold $\tilde{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$) と同一視される。互いに交わらぬ geodesic から成る S^3 内の link を geodesic link と呼ぶ。二つの geodesic link L と L' が geodesic link であるという性質を保つまま S^3 の ambient isotopy で重なる時、 L と L' は rigidly isotopic であると言ひ、 $L \cong L'$ で表わす。

Viro [7] は 5 component 以下の geodesic link の rigid isotopy に于る分類を行ひ、次の結果を得ている

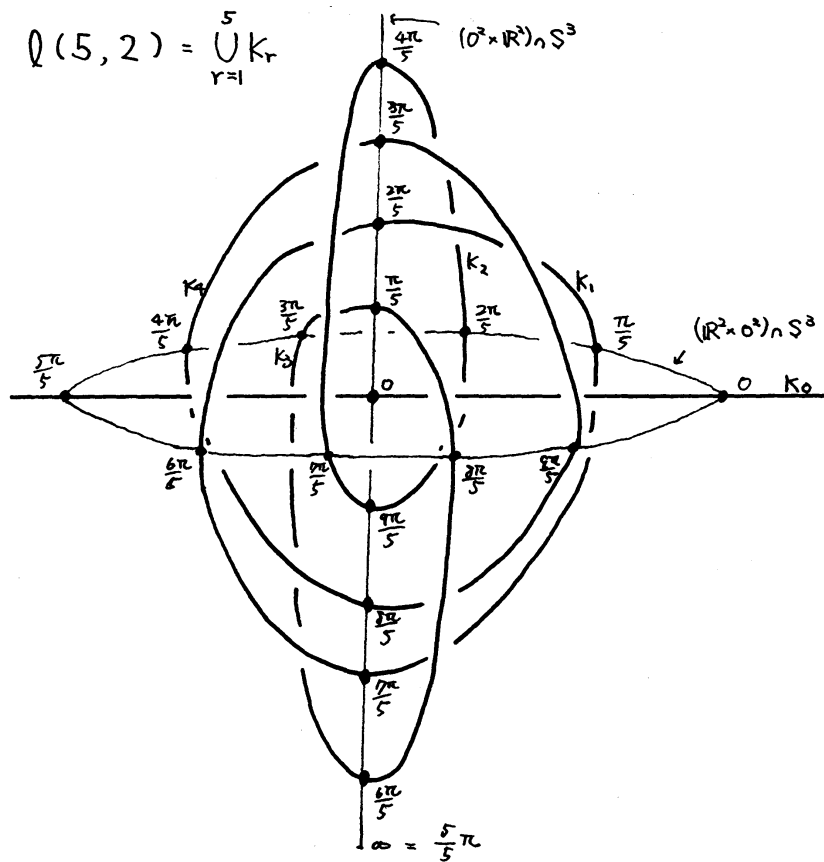
component の数	1	2	3	4	5	6	7
isotopy class の数	1	1	2	3	7	15	34
hyperbolic link の数	0	0	0	0	1	1	8

?

上の表で component 数が 6, 7 の場合は、筆者が数え挙げたものと一致するが、勿論この数で良いと思うが、まだ確定はしてない。

この様に、geodesic link は非常に特殊な対象ではあるが、
 次の様にして、Knot theorist と顔なじみの話ひ目から自然に
 出てくる系列がある。今、 K を spherical Montesinos knot
 - double cover $\Sigma_2(K)$ が spherical manifold とする knot -
 とする。この時、 $\Sigma_2(K)$ の universal cover $\widetilde{\Sigma_2(K)}$ は S^3 と
 なり、分岐被覆 $p: S^3 = \widetilde{\Sigma_2(K)} \longrightarrow S^3$ を得るか、
 $\downarrow \uparrow$
 $\Sigma_2(K)$

射影 p による K の逆像 $p^{-1}(K)$ は geodesic link である。
 例えば、2-bridge knot $K(p, q)$ から、この様にして得られる
 link $l(p, q)$ は下図の link とする。(例3.5参照)



尚. Burde [1] は $l(p, q)$ の linking number を使って 2-bridge knot の分類を行っている。

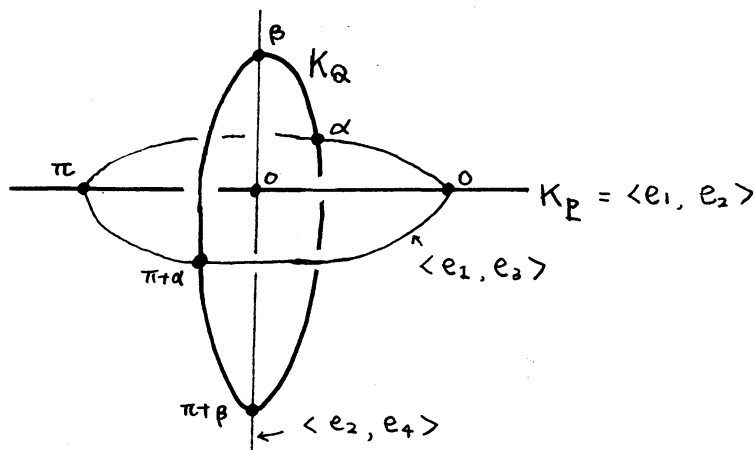
§2. Geodesic link の energy

$P, Q \in G_2(\mathbb{R}^4)$ の元とする。(原点を通る) P 上の line と平面 Q が成す角度の内、最大のものを α , 最小のものを β と置く。この pair を P と Q の principal angle と呼ぶ。この時、 P と Q の位置関係は principal angle α, β で定まる。

命題 2.1 (Gluck-Warner [3]) \mathbb{R}^4 の正規直交基底 e_1, e_2, e_3, e_4 での条件を満たすものがある。

$$\begin{cases} P = \langle e_1, e_2 \rangle \\ Q = \langle \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_3, \cos \beta \cdot e_2 + \sin \beta \cdot e_4 \rangle \end{cases}$$

対応する geodesic link $K_P \cup K_Q$ は次で与えられる。



定義 2.2 (1) $e(K_P, K_Q) \equiv \cot^2 \alpha + \cot^2 \beta \in K_P \cup K_Q$ のエネルギーと呼ぶ。

(2) Geodesic link $L = \bigcup_{r=1}^n K_r$ に対して

$e(L) \equiv \sum_{1 \leq r < s \leq n} e(K_r, K_s)$ を L のエネルギーと呼ぶ。

Principal angle が共に $\pi/2$ となる時 $e(K_P, K_Q) = 0$ となり、 α または β が 0 に近づく時、 K_P と K_Q は接近するが、 α も β も $\pi/2$ 、エネルギーも無限大に発散する。

例 2.3 $l(p, q) = \bigcup_{r=1}^p K_r$ のエネルギー

$$\begin{aligned} e(l(p, q)) &= \sum_{1 \leq r < s \leq p} e(K_r, K_s) \\ &= \sum_{1 \leq r < s \leq p} \left\{ \cot^2 \frac{r-s}{p} \pi + \cot^2 \frac{(r-s)}{p} 2\pi \right\} \\ &= p \sum_{k=1}^{p-1} \cot^2 \frac{k\pi}{p} \\ &= \frac{1}{3} p(p-1)(p-2) \end{aligned}$$

となり、整数値を取る。ここで最後の等号は Hirzebruch-Zagier [4] Chapter II に依る。

例 2.4 Hopf fibration $h: S^3 \rightarrow S^2$ による S^2 内の有限点集合の逆像は geodesic link になるが、その点集合を正多面体の頂点に置いた時のエネルギーは次の様だ

整数値と出る。

頂点の数	4	6	8	12	20
正n面体	4	8	6	20	12
エネルギー	6	24	60	180	720
	"	"	"	"	"
	1·2·3	2·3·4	3·4·5	3 ² ·4·5	4·5·6 ²

§3. 基本的な事実と定義

Oriented Grassmann manifold $\widetilde{G}_2(\mathbb{R}^4)$ の構造を Gluck-Warner [3] に従って解説する。Oriented 2-plane $P \in \widetilde{G}_2(\mathbb{R}^4)$ に対して、正規直交基底 u, v を取り、その外積 $u \wedge v \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4$ を考えると、これは u, v の取り方に依らない。対応 $P \mapsto \omega_P = u \wedge v$ により、 $\widetilde{G}_2(\mathbb{R}^4)$ は $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ 内の単位球面に埋め込まれる。一方 $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ 上には $*$ operation $\omega \mapsto \omega^*$ が、 $\omega \wedge \eta^* = \langle \omega, \eta \rangle \Omega \in \Lambda^4 \mathbb{R}^4$ を満たすものとして定義されている。ここで \langle, \rangle は $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ 上の標準的な内積で、 $\Omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \in \Lambda^4 \mathbb{R}^4$ である。この時 $(\omega_P)^*$ は P の直交補空間 P^\perp かつ定まる元 ω_{P^\perp} に一致することに注意されたい。 $*$ -operator は $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ 上の involution であり、 $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ は固有空間 $E_+ = \{ \omega \mid \omega^* = \omega \}$ と $E_- = \{ \omega \mid \omega^* = -\omega \}$ の orthogonal sum に分解される。この時、 $E_+ \cong E_- \cong \mathbb{R}^3$ であり、 $S_\pm^2 = \{ \omega \in E_\pm \mid \|\omega\| = 1/\sqrt{2} \}$

とあると $\omega_P \in S_+^2 \times S_-^2$ と得る。

$$\begin{aligned} \text{命題 3.1 [3]} \quad \widetilde{\mathcal{G}} &\cong \widetilde{G}_2(\mathbb{R}^4) \cong S_+^2 \times S_-^2 \\ \mathcal{G} &\cong G_2(\mathbb{R}^4) \cong S_+^2 \times S_-^2 / (\omega_+, \omega_-) \sim (-\omega_+, -\omega_-) \end{aligned}$$

今 $P, Q \in \widetilde{G}_2(\mathbb{R}^4)$ が与えられたとある。対応する $S_+^2 \times S_-^2$ の元を $(\omega_P^+, \omega_P^-), (\omega_Q^+, \omega_Q^-)$ とし、 $\theta^\pm = \arg(\omega_P^\pm, \omega_Q^\pm)$ と置く。次に成り立つ。

命題 3.2 (1) [3] P と Q の principal angle を α, β とあると

$$\begin{cases} \theta^+ = \alpha - \beta \\ \theta^- = \alpha + \beta \end{cases} \text{ である。}$$

特に $K_P \cap K_Q = \emptyset$ であるためには $\theta^+ \neq \theta^-$ とする事が必要十分である。

$$(2) \quad e(K_P, K_Q) = 2 \times \frac{2 - \{ \langle \omega_P^+, \omega_Q^+ \rangle^2 + \langle \omega_P^-, \omega_Q^- \rangle^2 \}}{\{ \langle \omega_P^+, \omega_Q^+ \rangle - \langle \omega_P^-, \omega_Q^- \rangle \}^2}$$

但し、 \langle, \rangle は E_\pm の内積を 2 倍して、 S_\pm^2 が単位球面となる様に正規化したもの。

次に n -component geodesic link 全体が作る空間を考える。
 $\Delta_n = \{ (K_1, \dots, K_n) \in \mathcal{G}^n \mid K_r \cap K_s \neq \emptyset \text{ for some } r \neq s \}$ とある。

n 次の置換群 G_n は Q^n に成分の入れ替えとして作用するが、 Δ_n はこの作用に際して (setwise) 不変である。この時、 $L_n \equiv Q^n - \Delta_n / G_n$ は unoriented, unordered, geodesic link 全体の成る空間となり、non-compact, disconnected, $4n$ -dim. manifold となる。そして L_n の連結成分が n -component link の rigid isotopy type に対応している。 S^3 の (orientation-preserving) isometry group $Isom^+ S^3$ は L_n に作用し、その商空間 $\tilde{L}_n = L_n / Isom^+ S^3$ は S^3 の剛体変換で移る link を同一視して得られる空間であるが、これはもはや多様体ではない。エネルギー関数 $e: L_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ は $Isom^+ S^3$ の作用で不変であるので、 $e: \tilde{L}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ を導く。

定義 3.3 (1) $L \in L_n$ が minimal position にあるとは L を含む L_n の連結成分上で $e(L)$ が e の最小値になる時をいう。

(2) $L \in L_n$ が harmonic position にあるとは、 L が $e: L_n \rightarrow \mathbb{R}$ の critical point となる時をいう。

L_n の各連結成分 U に対して、 $(e|_U)^{-1}[0, c]$ ($c \in \mathbb{R}^+$) は compact であるので、geodesic link の各 rigid isotopy class は minimal position にある link を含む。

L を harmonic position にある link, $d^2e_L: T_L\mathcal{L}_n \times T_L\mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}$
 を L に於ける e の Hessian とする。 $\mu_L: \text{Isom}^+ S^3 \rightarrow \mathcal{L}_n$
 を $\mu_L(g) = gL$ で定めると, $d\mu_L(T_e \text{Isom}^+ S^3)$ は d^2e_L
 の null space になる。

定義 3.4 Harmonic position にある link L が stable
 であるとは d^2e_L が $T_L\mathcal{L}_n/d\mu_L(T_e SO(4))$ 上の positive
 definite form であるときをいう。 そうでない時, L は unstable
 であるという。

以下、本論では次の問題を考察する。

問題 L が対称性の高い位置にあるならば harmonic
 か? stable か? 又、逆に、(stable) harmonic position
 にある link から、その link type が持つ対称性を読み
 取れるか?

次のセクションへ移る前に、 $\text{Isom}^+ S^3$ の $\tilde{\mathcal{G}}$ への作用を記述
 しておく。 \mathbb{R}^4 を 4元数体 $\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \rangle$ と同一視し、 S^3 を
 その単位球, $S^2 = S^3 \cap \langle i, j, k \rangle$ とする。 S^3 は積に関して
 群を成し、 $\text{Isom}^+ S^3$, $\text{Isom}^+ S^2$ は次の様に記述される。(cf [6])

$$1 \rightarrow \langle (-1, -1) \rangle \rightarrow S^3 \times S^3 \xrightarrow{\phi} \text{Isom}^+ S^3 \rightarrow 1$$

$$\text{但し } \phi(g_1, g_2) : S^3 \xrightarrow{\cong} S^3 \\ g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$$

$$1 \rightarrow \langle -1 \rangle \rightarrow S^3 \xrightarrow{\psi} \text{Isom}^+ S^2 \rightarrow 1$$

$$\text{但し } \psi(g) : S^2 \xrightarrow{\cong} S^2 \\ w \mapsto g w g^{-1}$$

E_{\pm} の直交基底として次が取れる。

$$\begin{cases} \varepsilon_i^{\pm} = \frac{1}{2} \{ 1 \wedge i \pm (1 \wedge i)^* \} \\ \varepsilon_j^{\pm} = \frac{1}{2} \{ 1 \wedge j \pm (1 \wedge j)^* \} \\ \varepsilon_k^{\pm} = \frac{1}{2} \{ 1 \wedge k \pm (1 \wedge k)^* \} \end{cases}$$

$\varepsilon_i^{\pm}, \varepsilon_j^{\pm}, \varepsilon_k^{\pm}$ に i, j, k を対応させると相似写像 $E_{\pm} \rightarrow \langle i, j, k \rangle$ (伸張率 = $\sqrt{2}$) が得られるが、これにより S_{\pm}^2 は単位球 $S^2 \subset \langle i, j, k \rangle$ と同一視できる。この時、 $\phi(g_1, g_2) \in \text{Isom}^+ S^3$ の \tilde{g} への作用 $\phi_*(g_1, g_2)$ は次で与えられる。

$$\phi_*(g_1, g_2) = \psi(g_1) \times \psi(g_2) : S_+^2 \times S_-^2 \rightarrow S_+^2 \times S_-^2$$

この時、 \tilde{g} の自然なリーマン計量に関して、 $\text{Isom}^+ S^3$ は \tilde{g} の isometry として作用していることに注意したい。

例 3.5 p と q を互いに素な自然数とする。

$$G_{p, q} = \langle (e^{i \frac{q-1}{p} \pi}, e^{i \frac{q-1}{p} \pi}), (j, j) \rangle \subset S^3 \times S^3 \quad \text{とすると}$$

$\Phi(G_{p, \delta})$ は order $2p$ の dihedral group D_p になり.

$\text{Fix } \Phi(G_{p, \delta}) = \mathcal{L}(p, \delta)$ を得る。 $\mathcal{L}(p, \delta)$ の components $\{K_r \mid 0 \leq r \leq p-1\}$ は \mathbb{R}^2 と \mathbb{R} とある。

$$K_r \leftrightarrow \left(e^{i \frac{2r(\delta+\pi)}{p}} \cdot j, e^{i \frac{2r(\delta-\pi)}{p}} \cdot j \right) \in S_+^2 \times S_-^2$$

§ 4. The principle of symmetric criticality

定理 4.1 Geodesic link L が $\text{Isom}^+ S^3$ の有限部分群 G の固定点集合 $\text{Fix } G = \{x \in S^3 \mid \text{st}_G(x) \neq \{1\}\}$ にあるならば、 L は harmonic position にある。

これより $\mathcal{L}(p, \delta)$ が harmonic であるのかわかる。この定理は、Symmetric Criticality の原理 (Palais [5] 参照) より得られる次の定理の特別な場合である。

定理 4.2 G を $\text{Isom}^+ S^3$ の有限部分群とする。もし geodesic link $L \in \mathcal{L}_n$ が G の \mathcal{L}_n への作用 $G_*: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$ の孤立固定点であるならば、 L は Harmonic position にある。

(証明: [5] 参照) $e: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}$ は G -invariant であるので gradient vector field $\text{grad } e$ は G -invariant

である。一方 L は $G: L_n \supset$ の isolated fixed point であるので $\text{Fix}[dG: T_L L_n \supset] = \{0\}$ となり、従って $\text{grad} e_L = 0$ となり $de_L = 0$ を得る。

$L \in L_n$ が有限群作用の孤立固定点であるための条件は次で与えられる。

命題 4.3 $G \in \text{Isom}^+ S^3$ の有限部分群, $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ を G -不変な geodesic link とする。この時、 L が G の L_n への作用の孤立固定点であるための必要十分条件は、各 r ($1 \leq r \leq n$) には $\exists T$ (K_r が $\text{st}_G(K_r) = \{g \in G \mid g(K_r) = K_r\}$ の Q への作用の孤立固定点となることである。

命題 4.4 $H \in \text{Isom}^+ S^3$ の有限部分群, K を H -不変な geodesic とする。 K が H の Q への作用の孤立固定点となるための必要十分条件は、 H が次の (1) または (2) の形の群と $\text{Isom} S^3$ 内で conjugate であることである。

$$(1) \langle \phi(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}) \rangle \cong \mathbb{Z}_n$$

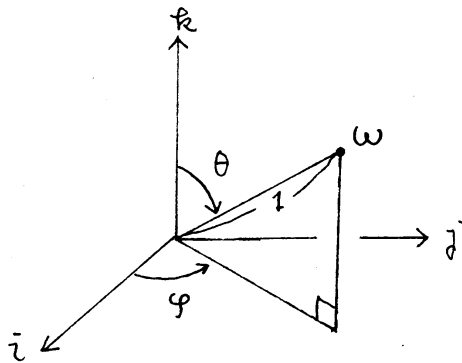
$$\left(\text{Fixed points on } Q = S^2 \times \{\pm i\} \subset Q \right)$$

$$(2) \langle \phi(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}), \phi(i, k) \rangle \cong D_n$$

$$\left(\text{Fixed points on } Q = S^1 \times \{\pm i\} \subset Q \right)$$

§5. Calculation

$\tilde{g} \cong S_+^2 \times S_-^2$ の点を記述するために、各 S_\pm^2 に次の様な極座標 $(\theta^\pm, \varphi^\pm)$ を導入する。


 (θ, φ)
 \downarrow

$$\sin\theta \cos\varphi \cdot i + \sin\theta \sin\varphi \cdot j + \omega \theta k$$

Oriented geodesic knot $K = (\omega^+, \omega^-) \in S_+^2 \times S_-^2 = \tilde{g}$ は

4つの角度の組 $(\theta^+, \varphi^+), (\theta^-, \varphi^-)$ で表わされる。

二本の geodesic knot $K_r = (\omega_r^+, \omega_r^-) = ((\theta_r^+, \varphi_r^+), (\theta_r^-, \varphi_r^-))$

($r=1, 2$) に対して、その間のエネルギー $e = e(K_1, K_2)$ は次の様になる (命題 3.2)。

$$e = 2 \times \frac{2 - \{A_+^2 + A_-^2\}}{\{A_+ - A_-\}^2}$$

$$\text{但し } A_\pm = \langle \omega_1^\pm, \omega_2^\pm \rangle$$

$$= \omega \theta_1^\pm \omega \theta_2^\pm + \sin\theta_1^\pm \sin\theta_2^\pm \omega (\varphi_1^\pm - \varphi_2^\pm)$$

従って e の全微分 de は次で与えられる。

$$de = \frac{4}{\{A_+ - A_-\}^3} \times \left[\{A_+^2 + A_+ A_- - 2\} dA_+ + \{-A_+^2 - A_+ A_- + 2\} dA_- \right]$$

ここで、 dA_\pm は $d\theta_1^\pm, d\theta_2^\pm, d\varphi_1^\pm - d\varphi_2^\pm$ の一次結合である。

2階の全微分 (= Hessian) は 8 次の対称行列で表わされるが、一般形は複雑なのでここで書き下すのはやめ、次の特別な場合のみを考える。

Case 1 $\theta_1^\pm = \theta_2^\pm = \frac{\pi}{2}$ の場合

例 3.5 の $l(p, \varphi)$ はこの条件を満たす。

Case 2 $(\theta_1^-, \varphi_1^-) = (\theta_2^-, \varphi_2^-) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の場合

Hopf fibration の逆像を 12 個得られる link (multiple Hopf link) はこの条件を満たす。

Case 1 $\theta_1^\pm = \theta_2^\pm = \pi/2$ の場合.

この時、 d^2e は 3 つの 2 次形式の直和 $E(\varphi) + E(\theta^+) + E(\theta^-)$ に分解される。各成分は次の通りである。

$$\begin{aligned} E(\varphi) = & \left\{ \frac{3}{2} \cot^4 \tau^+ + 2 \cot^2 \tau^+ \right\} \left\{ (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+) + (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-) \right\}^2 \\ & + \left\{ \frac{3}{2} \cot^4 \tau^- + 2 \cot^2 \tau^- \right\} \left\{ (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+) - (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-) \right\}^2 \\ & + (d\varphi_1^+ - d\varphi_2^+)^2 + (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\theta^+) = & \left\{ 1 + \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- + (\cot \tau^+ - \cot \tau^-)^2 \right\} \\ & \times \left[\left\{ 1 - \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- \right\} \left\{ (d\theta_1^+)^2 + (d\theta_2^+)^2 \right\} + \frac{2}{\sin \tau^+ \cdot \sin \tau^-} \cdot d\theta_1^+ d\theta_2^+ \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\theta^-) = & \left\{ 1 - \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- + (\cot \tau^+ + \cot \tau^-)^2 \right\} \\ & \times \left[\left\{ 1 + \cot \tau^+ \cdot \cot \tau^- \right\} \left\{ (d\theta_1^-)^2 + (d\theta_2^-)^2 \right\} + \frac{-2}{\sin \tau^+ \cdot \sin \tau^-} \cdot d\theta_1^- d\theta_2^- \right] \end{aligned}$$

但し $\tau^+ = \frac{1}{2} \{ (\varphi_1^+ - \varphi_2^+) + (\varphi_1^- - \varphi_2^-) \}$

$\tau^- = \frac{1}{2} \{ (\varphi_1^+ - \varphi_2^+) - (\varphi_1^- - \varphi_2^-) \}$

∴ $E(\varphi)$ は 2次元 null space $\{d\varphi_1^\pm = d\varphi_2^\pm\}$ を持つ positive form である事に注意す(1)。

今、harmonic position にある geodesic link $L = \bigcup_{r=1}^n K_r$

($K_r = ((\theta_r^+, \varphi_r^+), (\theta_r^-, \varphi_r^-))$) が 条件 $\theta_r^\pm = \pi/2$ ($1 \leq r \leq n$)

を満たすとする。 $d^2e(L) = \sum d^2e(K_r, K_s)$ であるので、

L は φ_r^\pm 方向に安定となり、残りの θ_r^\pm 方向について

のみ調べれば良いことになる。特に、 $l(p, q)$ における

Hessian d^2e は 次の形となる。

	$d\theta_r^+$	$d\theta_r^-$	$\dots d\varphi_r^+ \dots d\varphi_r^- \dots$
$d\theta_r^+$	$E^+(p, q)$	0	0
$d\theta_r^-$	0	$E^-(p, q)$	
$d\varphi_r^+$	0		positive
$d\varphi_r^-$			

∴ $E^+(p, q) \cong E^-(p, p-q)$ である事がわかる。

又、dihedral group D_p の isometry として作用している事

より、 $E^+(p, q)$ の固有値 $\{\alpha_u^+\}_{u=0}^{p-1}$ は次で与えられるのがわかる。

(i) p : odd の時 $\tau = 2\pi/p$ とすると

$$\alpha_u^+ = \sum_{r=1}^{p-1} \{ 1 + \cot r\tau \cdot \cot r\tau + (\cot r\tau - \cot r\tau)^2 \} \left\{ \frac{\cos u r\tau - \cos(1+q)r\tau}{\sin r\tau \cdot \sin r\tau} \right\}$$

(ii) p : even の時 $\tau_0 = \pi/p$ とおくと

$$\alpha_u^+ = \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ 1 + \cot r\tau_0 \cdot \cot r_g\tau_0 + (\cot r\tau_0 - \cot r_g\tau_0)^2 \right\} \left\{ \frac{\cos 2ur\tau_0 - \cos(1+g)r\tau_0}{\sin r\tau_0 \cdot \sin r_g\tau_0} \right\}$$

$p \leq 5$ の時の d^2e の $d\theta_r^2$ 方向の固有値は次の様になる。

(p, g)	固有値
(2, 1)	2, 2, 0, 0
(3, 1)	8, 8, $16/3$, 0, 0, 0
(4, 1)	32, 18, 18, 10, 0, 0, 0, -6
(5, 1)	72, 72, 32, 32, 16, 0, 0, 0, -16, -16
(5, 2)	24, 24, 24, 24, 16, 16, 0, 0, 0, 0

従って $l(2, 1)$, $l(3, 1)$, $l(5, 2)$ は安定であるが, $l(4, 1)$, $l(5, 1)$ は不安定である。又、 $p \geq 6$ の時は全ての $l(p, g)$ は不安定であり、 $\dim(\text{negative space}) < \frac{1}{4} \dim L_p$ が成立する様である。 $l(p, g)$ が amphicheiral の時は、各成分一本づつの変動に関しては安定である事がわかる。

Case 2 $(\theta_r^-, \varphi_r^-) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ($r=1, 2$) の場合

この時、 $de = \frac{1}{(A_+ - 1)^2} dA_+$ であり、 d^2e は 3 個の二次形式の直和 $E(\theta^+, \varphi^+) + E(\theta^-) + E(\varphi^-)$ に分解する。各成分は次で与えられる。

$$E(\theta^+, \varphi^+) = \frac{4}{(1-A_+)^2} d^2 A_+ + \frac{8}{(1-A_+)^3} (dA_+)^2$$

$$E(\theta^-) = \frac{4(2-A_+-A_+^2)}{(1-A_+)^3} (d\theta_1^- - d\theta_2^-)^2$$

$$E(\varphi^-) = \frac{4(2-A_+-A_+^2)}{(1-A_+)^3} (d\varphi_1^- - d\varphi_2^-)^2$$

ここで de は $d\theta_r^+, d\varphi_r^+$ ($r=1, 2$) のみの一次結合であり、

$E(\theta^-), E(\varphi^-)$ は positive form である事に注意されたい。

従って任意の (multiple) Hopf link は Hopf fibration を崩す方向の変動に関しては、安定の特異点である。よって Hopf link が harmonic であるかどうか、又安定であるかどうかという問題は、対応する S^2 上の point configuration の問題に置き換えられる。

付記 津田塾大学の福原真二氏も同様の発想を以前から持っておられ、本論とは異なる方向から knot の標準的位置の研究をされておられる ([2])。

References

- [1] G. Burde: Verschringungsinvarianten von Knoten und Verkettungen mit zwei Brücken, Math. Z. 145 (1975) 235-242.
- [2] S. Fukuhara: Lecture at Tsuda college, 1986
- [3] H. Gluck and F.W. Warner: Great circle fibrations of the three sphere, Duke Math. J. 50 (1983) 107-132.
- [4] F. Hirzebruch and D. Zagier: The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory, Math. Lect. Nore Series 3, Publish or Perish Inc.
- [5] R.S. Palais: The principle of symmetric criticality, Commun. Math. Phys. 69 (1979) 19-30.
- [6] P. Scott: The geometry of three manifolds, Bull. London Math. Soc. 15 (1983) 401-487.
- [7] O.Ya. Viro: Topological problems concerning lines and points of three-dimensional space, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 528-531.