

Dehn surgered manifolds and knots

九州大 理 茂手木 公彦 (Kimihiro Motegi)

§ 1. 序

本稿の目的は Dehn surgery で得られる多様体を通して S^3 の knot の間の関係を調べることである。

K を oriented S^3 の中の unoriented knot とし、 K に沿った $\frac{q}{p}$ -Dehn surgery で得られる oriented 3-manifold を $M(K; \frac{q}{p})$ と書く。 $(\frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, (p, q) = 1)$ 本稿を通して 3-manifold は oriented で、 \cong は orientation preserving homeomorphic を表わし、 \sim は knot の次の意味での同値関係を表わすものとする。 $K_1 \sim K_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} S^3$ の orientation preserving homeomorphism で K_1 を K_2 に写すものが存在する。

knot の surgery description を複数個もつような多様体はいくつ調べられているが、最初に考えられるのは次の問題である。

問題 $K_1, K_2 \subset S^3$ を K_1, K_2 なる knots とする。このとき、

$\{K_1 \text{ の Dehn surgery で得られる得られる 3-manifolds}\} \cap \{K_2 \text{ の Dehn surgery で得られる 3-manifolds}\}$ は高々有限個か?

しかし、この問題に対する答は、次の例が示すように NO である。

ある。

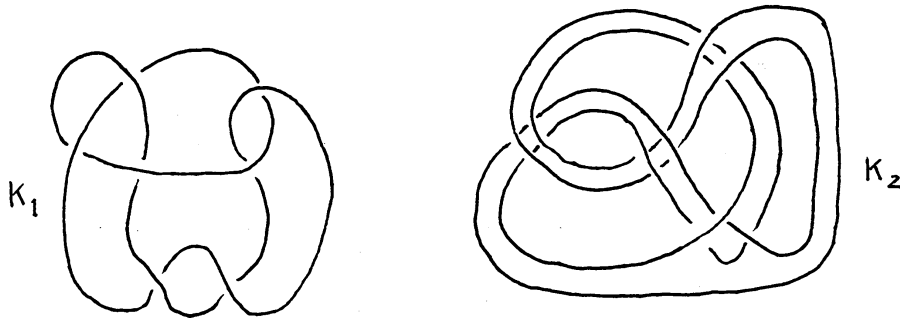
例 $K_1; (r_1, D_1)$ -torus knot, $K_2; (r_2, D_2)$ -cable knot about K_1
 $(r_i, D_i \geq 2)$ とする。Gordonの結果([2] Cor. 7.3.)を用いると。
 $|r_2 D_2 p - q| = 1$ をみたす $\frac{q}{p}$ に対して $M(K_2; \frac{q}{p}) \cong M(K_1; \frac{q}{r_2 p})$
 となる。従って $\{K_1$ の Dehn surgery で得られる 3-manifolds $\} \cap \{K_2$ の Dehn
 surgery で得られる 3-manifolds $\}$ は無限個。

この例では、Dehn surgery の係数は異なっているが、そこで係
 数が一致するという条件をつけしてみる。この条件のもとで
 先づ、

問題 $K_1, K_2 \subset S^3$, $K_1 \neq K_2$ なる knots で、ある $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ に対し
 $M(K_1; \frac{q}{p}) \cong M(K_2; \frac{q}{p})$ となるものが存在するか？

ということが問題になるが、この問題に関して Lickorish [8],
 Brakes [1], Livingston [9] がいくつかの例を構成している。

例 (Lickorish [8])



$$\Delta_{K_1}(t) = 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4$$

$$\Delta_{K_2}(t) = 1 - t + t^2$$

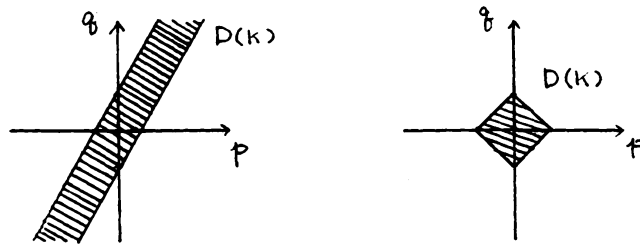
K_1, K_2 の -1 -Dehn surgery は同じ多様体になる。

Remark 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して N 個の異なる $+1$ -Dehn surgery

で得られる多様体の存在が Brakes, Livingston によって示されている。更に Livingston は任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、異なる knot でそれぞれ $\frac{1}{m}$ -Dehn surgery で得られる多様体が一致する例を構成している。

次に問題となるのは、無限個の $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して $M(K_1; \frac{q}{p}) \cong M(K_2; \frac{q}{p})$ になるような knot K_1, K_2 が存在するか、ということであるが、この問に対する答えとはいえないが、次が成り立つ。

定理 任意の knot $K \subset S^3$ に対して、次のような領域 $D(K) \subset \mathbb{R}^2$ ($D(K)$ は帯状領域か compact な領域) が存在する。ある $(p, q) \in \mathbb{R}^2 - D(K_1) \cup D(K_2)$ に対して、 $M(K_1; \frac{q}{p}) \cong M(K_2; \frac{q}{p})$ ならば $K_1 \sim K_2$ となる。



($D(K)$ がどちらの type になるかは knot exterior を torus 分解した際、 $\partial E(K)$ を含む piece が Seifert fibred か hyperbolic かによる。)

Dehn surgery のうち $\frac{1}{m}$ -Dehn surgery ($m \in \mathbb{Z}$) は homology 3-sphere を生み出し、 m -Dehn surgery (framed surgery) は 2-handle はり合わせることにより多様体の同境問題に関係するものであるが、このような type の Dehn surgery に関して、定理からわ

かる系をあげておく。(定理の帯状領域を調べればわかる。)

系 無限個の整数 m に対して、 $M(K_1; \frac{1}{m}) \cong M(K_2; \frac{1}{m})$ となるならば、 $K_1 \sim K_2$ 。

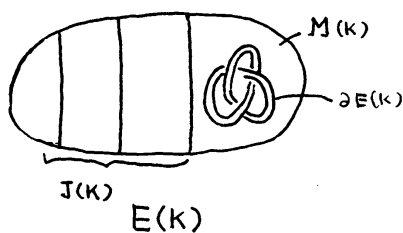
系 K_i を prime knot とする。無限個の整数 m に対して、 $M(K_1; m) \cong M(K_2; m)$ となるならば $K_1 \sim K_2$ 。

Remark knot の branched cover と knot について、S. Kojima は [7] において、任意の prime knot に対して次のような $N(K)$ が存在することを示している。 $m \geq \max(N(K_1), N(K_2))$ なる m に対して、 K_1, K_2 の m -fold branched cover が同相なる。 K_1 と K_2 は unoriented equivalent。

§ 2. Dehn surgery と dual knot

K を non-trivial knot とする。 K の exterior $E(K) = S^3 - \text{int } N(K)$ は、Alexander の定理より irreducible、また loop theorem, Dehn's Lemma より π -irreducible であることがわかる。このとき、 $E(K)$ は有限個の disjoint な essential torus の family $J(K)$ により (up to ambient isotopy で) 一意的に Seifert fibred piece と simple piece (incompressible torus が π -parallel) に分解される (Jaco-Shalen [4], Johannson [5])。更に、Thurston の uniformization theorem (Morgan-Bass [10]) から simple piece のうち Seifert fibred でないものには、体積有限の complete hyperbolic structure が入る

ことがわかる。つまり、 $E(K)$ は $J(K)$ によって Seifert fibred piece と hyperbolic piece に一意的に分解される。以下、 $E(K) - \text{int} N(J(K))$ の $\partial E(K)$ を含む piece を $M(K)$ と表わす。(K が torus knot または hyperbolic knot の時、 $M(K) = E(K)$ となる。)



また、knot K に沿って Dehn surgery した際の、attaching solid torus V の core の image を K^* で表わし、dual knot と呼ぶことにする。更に、 $M_{p, \delta}(K) = M(K) \cup_R V$ (R は $\frac{\delta}{p}$ -Dehn surgery に associate した ∂V から $\partial E(K)$ への homeomorphism) と表わす。

この章の目的は、Dehn surgery を実行した際の dual knot の behavior を調べることである。先にみたように $M(K)$ は Seifert fibred か hyperbolic であるが、先づ $M(K)$ が Seifert fibred の case について調べる。

補題 2.1. $M(K)$ は Seifert fibred とする。1つの Dehn surgery を除いて $M(K)$ の Seifert fibration は $M_{p, \delta}(K)$ に拡張し、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し、ある帯状領域 $B_N(K) \subset \mathbb{R}^2$ が存在し、 $(p, \delta) \in B_N(K)$ に対し K^* は $M_{p, \delta}(K)$ において index $> N$ なる exceptional fibre となる。

証明. $M(K)$ の Seifert fibration は up to isotopy で一意であり

(Jaco [3], Ⅶ.17. Theorem). 今その regular fibre が $\lambda^\alpha \mu^\beta$, 但し, (λ, μ) は $E(K)$ の longitude - meridian pair, と表わされるとする。 $\frac{p}{q}$ -Dehn surgery した時の V の meridian curve の image は $\lambda^p \mu^q$ と表わされ, $\lambda^\alpha \mu^\beta$ と $\lambda^p \mu^q$ の intersection number $|\alpha q - \beta p|$ が 0 でない時, V を fibred solid torus として, $M(K)$ の Seifert fibration を $M_{p/q}(K)$ に拡張できる。また, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, $B_N(K) = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid |\alpha q - \beta p| \leq N\}$ とおけば結果が従う。□

$M(K)$ は ∂ -irreducible であるが, $M_{p/q}(K)$ に関して次が成り立つ。

補題 2.2. $(p, q) \in B_1(K)$ に対して, $M_{p/q}(K)$ は ∂ -irreducible

証明. $(p, q) \in B_1(K)$ に対しては $M_{p/q}(K)$ は Seifert fibred であり, irreducible である (Jaco [3], Ⅶ.7. Lemma)。従って $M_{p/q}(K)$ が ∂ -irreducible であることを示すためには, solid torus でないことを示せばよいが, これは K^* が index ≥ 2 の exceptional fibre であることから示される。□

Remark 2.3. $M(K)$ は knot exterior に含まれる ∂ -irreducible な Seifert fibred manifold であるから, (r, δ) -torus knot space, (r, δ) -cable space, composing space のいずれか (Jaco [3], Ⅸ.22. Lemma) であり, $M(K)$ の regular fibre は最初の 2 つの case の時, $\lambda \mu^{\pm 1}$ と表わされ, 最後の case の時, μ と表わされる。従って特に $M(K)$ が composing space の時, $p=0$ (i.e. trivial な surgery) を

除いて $M_{p, \delta}(K)$ は ∂ -irreducible。

次に $M(K)$ が hyperbolic case について考える。ここでの議論は Thurston による hyperbolic Dehn surgery ([13] Chap. 5) 及び S. Kojima の結果 ([6] Lemma 5.1.) に基づいている。

補題 2.4. $\text{int } M(K)$ は体積有限な complete hyperbolic structure をもつものとする。このとき、ある compact set $C(K) = \{(p, \delta) \in \mathbb{R}^2 \mid |p| + |\delta| \leq N\}$ が存在して、 $(p, \delta) \in C(K)$ に対して $\text{int } M_{p, \delta}(K)$ も体積有限の complete hyperbolic structure をもつ。更に、任意の ε に対して compact set $C_\varepsilon(K) = \{(p, \delta) \in \mathbb{R}^2 \mid |p| + |\delta| \leq N_\varepsilon\}$ ($N_\varepsilon \geq N$) が存在し、dual knot K^* は $\text{int } M_{p, \delta}(K)$ において長さが ε より小なる閉測地線となる。

また、hyperbolic manifold は \mathbb{H}^3 で cover され、 \mathbb{H}^3 は irreducible だから、hyperbolic manifold は irreducible。よって、

系 2.5. $(p, \delta) \in C(K)$ に対して、 $M_{p, \delta}(K)$ は ∂ -irreducible。

§3. dual knot の特徴付け

この § では、§2 の結果を利用して Dehn surgered manifold における dual knot を特徴づけることを考える。

$E(K)$ における exceptional fibres と closed geodesics 全体に対して次のように “weight” w を定義する。

$$w(\text{exceptional fibre}) = \frac{1}{\text{index}(\text{exceptional fibre})}$$

$$w(\text{closed geodesic}) = \text{length}(\text{closed geodesic})$$

$E(K)$ は compact だから exceptional fibre は高々有限個であり、Margulis constant より短い長さの閉測地線は有限個 (Morgan-Bass [10] V.6) であることがわかる。そこで、 $E(K)$ における weight の最小値を $\min\{w\}$ と書くことにする。また、 $\text{int}M(K) - N$ (N は K に対応する torus cusp の small horoball neighborhood) において閉測地線の長さの infimum は hyperbolic Dehn surgery deformation に関して連続である。

従って、補題 2.1, 2.4 から dual knot K^* を次のようにできる。 $B_N(K)$ あるいは $C_\varepsilon(K)$ を適当にとれば、 $(p, \vartheta) \notin B_N(K)$ or $C_\varepsilon(K)$ に対して、 $\frac{1}{\text{index}(K^*)} < \min\{w\}$, あるいは、 $\text{length}(K^*) < \min\{w\}$ かつ K^* は $\text{int}M_{p, \vartheta}(K)$ において unique shortest closed geodesic となる。以下、このような $B_N(K)$ あるいは $C_\varepsilon(K)$ を $D(K)$ と定める。trivial knot に対しては $D(K) = \emptyset$ とする。

$E(K)$ の unique な torus 分解を与える essential torus の family を $J(K)$ と表わしたが、Dehn surgered manifold $M(K; \frac{\vartheta}{p})$ の unique な torus 分解に対して次がわかる。(best possible ではないが後で使うのは次の形で十分。)

補題 3.1. $(p, \vartheta) \notin D(K)$ に対して、 $M(K; \frac{\vartheta}{p})$ の unique な torus 分解はやはり $J(K)$ によって与えられる。

証明. 補題 2.2, 系 2.5 より、 $M_{p, \vartheta}(K)$ は ϑ -irreducible であり、

$M_{p,q}(K)$ が Seifert fibred の時、その Seifert fibration は up to isotopy で unique だから結果が従う。□

こゝで、 $M(K; \frac{q}{p})$ における exceptional fibre と closed geodesic 全体に先と同様にして "weight" w を定義できるが、このとき、 K^* は $M(K; \frac{q}{p})$ において unique minimal weight をもっている。

§ 4. 定理の証明

trivial knot K_1 の $\frac{q}{p}$ -Dehn surgery で得られる多様体は lens space $L(q, p)$ ($q=1$ の時 S^3 , $q=0$ の時 $S^2 \times S^1$) であるから ([2])、 K_2 が non-trivial knot とすると、 $(p, q) \in \mathbb{R}^2 - D(K_2)$ に対して、 $M(K_1; \frac{q}{p}) \cong M(K_2; \frac{q}{p})$ であるから、以下 K_1, K_2 は non-trivial とする。

先づ、 $M(K_1) = E(K_1)$ i.e. K_1 は torus knot か hyperbolic knot の場合を考える。 K_1 が torus knot の時、 $M(K_1; \frac{q}{p}) \stackrel{R}{\cong} M(K_2; \frac{q}{p})$ ($(p, q) \in \mathbb{R}^2 - D(K_1) \cup D(K_2)$ かつ、 K_2 も torus knot であり、 K_1^* は $M(K_1; \frac{q}{p})$ において unique maximal index の exceptional fibre となっている。 R は fibre preserving homeomorphism に homotopic だから、 $M(K_1; \frac{q}{p})$ から $M(K_2; \frac{q}{p})$ への orientation preserving homeomorphism で K_1^* を K_2^* にうつすものが存在する。次に、 K_1 が hyperbolic knot とする。このときも、条件から K_2 も hyperbolic knot であり、 K_1^* は $M(K_1; \frac{q}{p})$ において unique shortest closed geodesic になっている。Mostow

の剛体性定理より与えられた homeomorphism は isometry に homotopic。従って、 $M(K_1; \frac{q}{p})$ から $M(K_2; \frac{q}{p})$ への orientation preserving homeomorphism で K_1^* を K_2^* にうつすものが存在する。

次に $M(K_1) \neq E(K_1)$ i.e. K_1 が satellite knot の場合を考える。
次の補題に注意する。

補題 4.1. $(P, q) \in \mathbb{R}^2 - D(K_1) \cup D(K_2)$ に対して、 $M(K_1; \frac{q}{p}) \cong M(K_2; \frac{q}{p})$ とする。 $M(K_1)$ が Seifert fibred ならば $M(K_2)$ も Seifert fibred である。

証明 補題 3.1. より、 $M(K_i; \frac{q}{p})$ の unique な torus 分解は $J(K_i)$ によって与えられ、 $R: M(K_1; \frac{q}{p}) \cong M(K_2; \frac{q}{p})$ は (ambient isotopy で修正することにより) torus 分解を保つ (i.e. $R(J(K_1)) = J(K_2)$) としてよい。

今、 $w(K_1^*) = \frac{1}{m}$ (= unique minimal) とおく。 $M(K_2)$ が Seifert fibred でないとすると $M(K_2)$ は hyperbolic であり、 K_2^* は unique minimal な weight をもつ閉測地線となっている。 R は $M_{P,q}(K_1)$ を $M(K_2; \frac{q}{p})$ のある Seifert fibred piece にうつしているが (Seifert fibred manifold は、体積有限の complete hyperbolic manifold になりえない)、 $R|_{M_{P,q}(K_1)}$ は fibre preserving homeomorphism に isotopic だから $R(M_{P,q}(K_1))$ は index $\frac{1}{m}$ の exceptional fibre をもつ。一方 $w(K_2^*)$ は unique minimal より $w(K_2^*) < \frac{1}{m}$ であり、Mostow の剛体性定理より、 $R^{-1}(\text{int } M_{P,q}(K_2))$ は $w(K_2^*)$ の長さの

閉測地線が存在することになる。これは、 K_1^* の weight が unique minimal であることに反する。よって、 $M(K_2)$ は Seifert fibred。□

この補題より $M(K_1)$ が Seifert fibred ならば $M(K_2)$ も Seifert fibred であり、 K_1^* は $M(K_1; \frac{1}{p})$ における unique maximal index の exceptional fibre。従って、 $M_{p,q}(K_1)$ は $M_{p,q}(K_2)$ にうつされ、 $M_{p,q}(K_1)$ の制限は fibre preserving homeomorphism に isotopic だから、 $M(K_1; \frac{1}{p})$ から $M(K_2; \frac{1}{p})$ の orientation preserving homeomorphism で K_1^* を K_2^* にうつすものが存在する。 $M(K_1)$ が hyperbolic のとき、補題 4.1. より $M(K_2)$ も hyperbolic で、 K_1^* は $M(K_1; \frac{1}{p})$ において unique shortest closed geodesic だから、 $M_{p,q}(K_1)$ は $M_{p,q}(K_2)$ にうつされる。また、 $M(K_1; \frac{1}{p})$ から $M(K_2; \frac{1}{p})$ の orientation preserving homeomorphism で、 $M_{p,q}(K_1)$ の truncated space の制限が isometry になるものが得られるので、 $M(K_1; \frac{1}{p})$ から $M(K_2; \frac{1}{p})$ の orientation preserving homeomorphism で K_1^* を K_2^* にうつすものが得られる。

以上より、定理の条件をみたすような Dehn surgery をした際に、 $M(K_1; \frac{1}{p}) \cong M(K_2; \frac{1}{p})$ ならば、 $f: M(K_1; \frac{1}{p}) \xrightarrow{\cong} M(K_2; \frac{1}{p})$ で $f(K_1^*) = K_2^*$ なるものが存在する。 $M(K_1; \frac{1}{p}) - \text{int } N(K_1^*)$ は、 $S^3 - \text{int } N(K_1)$ だから、 f は $E(K_1)$ から $E(K_2)$ の orientation preserving homeomorphism f' を induce する。 $f'(\lambda_1^p \mu_1^q) = (\lambda_2^p \mu_2^q)^\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) ((λ_i, μ_i) は $E(K_i)$ における longitude-meridian pair) である。

更に、longitude は knot exterior において homologically trivial だから $f'(\lambda_1) = \lambda_2^{\varepsilon'}$ ($\varepsilon' = \pm 1$)。ここで、 f' は orientation を保つから $\varepsilon\varepsilon' = 1$ である。 $f'(\mu_1) = \mu_2^{\varepsilon''}$ ($\varepsilon'' = \pm 1$, $\varepsilon \cdot \varepsilon'' = 1$) を得る。こうして、 S^3 から $S^3 \setminus \Lambda$ の orientation preserving homeomorphism で K_1 を K_2 にうつすものが得られる。 (証明終り)

Remark. 定理より cable knot を除いた prime knot はそれぞれ $\frac{p}{q}$ -Dehn surgery で得られる多様体が無限個一致すれば、それらは同値であることがわかる。

証明および他の応用については [1] を参照して下さい。

References

- [1] Brakes, W.R., : Manifolds with multiple knot-surgery descriptions, Proc. Cambridge Phil. Soc. 87 (1980), 443-448.
- [2] C. McA. Gordon, : Dehn surgery and satellite knots, Trans. Amer. Math. Soc. 275 (1983), 687-708.
- [3] W. Jaco, : Lectures on three-manifold topology, Conf. Board Math. Sci., 43 Amer. Math. (1977).
- [4] W. Jaco - P. Shalen, : Seifer fibred space in 3-manifolds, Mem. Amer. Math. Soc., #220 (1979).
- [5] K. Johannson, : Homotopy equivalences of 3-manifolds

- with boundaries, Lecture Notes in Math., #761 (1979).
- [6] S. Kojima, : Bounding finite groups acting on 3-manifolds, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 96 (1984), 269-281.
- [7] S. Kojima, : Determining knots by branched covers, to appear in the Proceedings of symposia at Warwick and Dunham, edited by D.B.A. Epstein. (1986).
- [8] W. Lickorish, : Surgery on knots, Proc. of Amer. Math. Sci. 60 (1976).
- [9] C. Livingston, : More 3-manifolds with multiple knot-surgery and branched-cover descriptions, Math. Proc. Camb. Phil. Sci. 91 (1982), 473-475.
- [10] J. Morgan - H. Bass, : The Smith conjecture, Pure and Applied Math. Academic Press. (1984).
- [11] K. Motegi, : Dehn surgered manifolds and knots, preprint.
- [12] D. Rolfsen, : Knots and links, Mathematics Lecture Series, No. 7, Publish or Perish, Berkley, Calif., 1976.
- [13] W. Thurston, : The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Note, Princeton University. (1978).