

高次元結び目と球対のつくる可換群

佐賀大学 丸本嘉彦 (Yoshihiko Marumoto)

ここでは n 次元結び目で type μ と呼ばれるものの代数的構造について報告する。くわしくは [1] を見られたい。

n 次元結び目 K^n が type μ であるとは次をみたす時である:

S^{n+2} 内は K^n と交わらないいくつかの $n-\mu+1$ 次元球面からなる link L が存在して,

- (1) L は S^{n+2} 内で trivial link であり,
- (2) S^{n+2} を L に沿って trivial surgery して得られる多様体内で K^n は $(n+1)$ 次元球の境界となる。

すなわち次が成り立っていることが示される,

定理 1 ([1], [2])

- (1) ribbon n -knot であることは type 1 であることは同値
- (2) すべての 2-knot は type 2 である。

先の type \mathcal{P} の定義と同値なものとして, もう少し constructive なものを採用できることを次の定理が保証してくれる;

定理 2. $K^n \subset S^{n+2}$ が type \mathcal{P} であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

- D^{n+3} の自明なハンドル分解 $D^{n+3} = D_0^{n+3} \cup \bigcup h_i^{\uparrow} \cup \bigcup h_i^{\uparrow+1}$
 及び $(n+1)$ 次元球 $\Delta^{n+1} \subset \partial D_0^{n+3}$ が存在して次をみたす,
- (1) $\Delta \cap h_i^{\uparrow} = \emptyset$ for $\forall i$,
 - (2) $\partial \Delta \cap h_i^{\uparrow+1} = \emptyset$ for $\forall i$,
 - (3) $(S^{n+2}, K^n) = (\partial D^{n+3}, \partial \Delta)$

上の定理において, $V = D_0^{n+3} \cup \bigcup h_i^{\uparrow}$, d_i を $h_i^{\uparrow+1}$ の V への attaching map とするとき, $(V, \{d_i\}, \Delta)$ を K^n の \mathcal{P} -decomposition と呼ぶ。もちろん type \mathcal{P} knot K^n の \mathcal{P} -decomposition は本質的に異なるものがいくつも存在し得る。

上の定理 2 から次は容易に得られる;

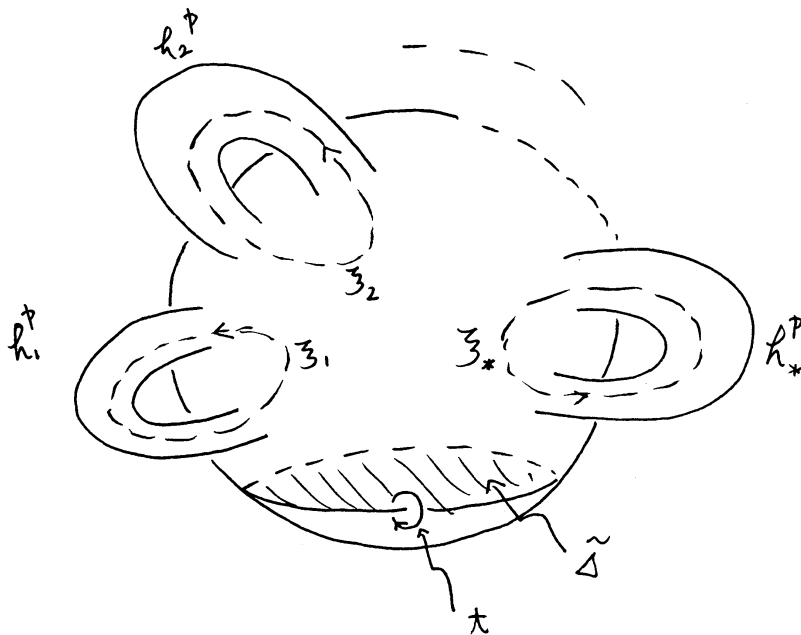
系 2.1.

- (1) type \mathcal{P} knot は null-cobordant である。
- (2) $2 \leq \mathcal{P} \leq n-1$ とするとき, type \mathcal{P} knot K^n に対して $\pi_1(S^{n+2} - K^n) \cong \mathbb{Z}$ である。

type \mathcal{P} n -knot 全体の集合を $\mathcal{K}_n(\mathcal{P})$ と表すことにすると,
 $\mathcal{K}_n(\mathcal{P})$ は結び目の connected sum を和として可換群となる。

以下 $2 \leq p \leq n-1$ として話をすすめる。

$K^n \in \mathcal{K}_n(\mathcal{P})$ に対し, K の p -decomposition $(V, \{\alpha_i\}, \Delta)$ を
 1つ選ぶ。すると $V - \tilde{\Delta}$ は $S^1 \vee S_1^1 \vee S_2^1 \vee \dots$ とホモトピー同
 値であり, $\pi_1(V - \tilde{\Delta}) \cong \mathbb{Z}$ であり, $\pi_p(V - \tilde{\Delta})$ は $\mathbb{Z}\pi_1$ -加群とし
 て自由加群となり, V を構成する各 p -handle が自然にその
 生成元 $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ が得られる。今 $\pi_1(V - \tilde{\Delta})$ の生成元を α で表し,
 $\Lambda = \mathbb{Z}\pi_1$ と書くことにする。ただしここで $\tilde{\Delta}$ は Δ の interior を
 V の interior に押し込めて得られる V に proper に埋め込まれた
 $n+1$ 次元球である。



attaching map α_j によつて V に着けられる $(p+1)$ -handle h_j^{p+1} の attaching sphere を a_i とすると, a_i は $\pi_p(V-\Delta)$ の元を表していると思ふと, Λ -module の元として,

$$a_j = \sum_i \lambda_{ij}(t) \zeta_i \quad (\lambda_{ij}(t) \in \Lambda)$$

と表せる。このときできる正方行列 $(\lambda_{ij}(t))$ を K^n の (p -decomposition $(V, \{\alpha_i\}, \Delta)$ に対応する) attaching matrix と呼ぶ。もちろん K^n の p -decomposition が unique に決まらないうちで, attaching matrix は unique に決まらないうち, 1つの p -decomposition に対しても, attaching sphere a_i と base point の結び方により異なる attaching matrix になる。

次にいくつかの可換群を以下の様に定義する:

Λ 上の正方行列 $M(t)$ で $\det M(t) = \pm 1$ となるもの全体の集合を $\text{Mat}(\Lambda)$ と書くことにする。次の操作 $T_1 \sim T_4$ あるいはその逆操作を有限回くり返すことによる $\text{Mat}(\Lambda)$ 上の同値関係を \sim と表す:

- $T_1.$ 2つの行 (あるいは列) を入れ換える,
- $T_2.$ 1つの行 (あるいは列) に Λ の単元をかける,
- $T_3.$ 1つの行 (あるいは列) の Λ の単元倍を他の行 (or 列) に加える,

T_4 . M を $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で置換える。

(上の $T_1 \sim T_4$ は Whitehead 群を定義する時に用いられる操作と同じものである。)

このとき, $\mathcal{M}_1(\Lambda) = \text{Mat}(\Lambda) / \sim$ とかき, 行列のブロック和から自然に得られる演算を $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ に考えると, $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ は可換半群となる (逆元を持たない元が存在するので群とはならない)。同様にして

$$\mathcal{M}_0(\Lambda) = \{ M(x) \in \text{Mat}(\Lambda) \mid \exists m, M(x): \Lambda^m \rightarrow \Lambda^m : \text{全射} \} / \sim$$

と定義すれば, これも可換半群となる。

以上の準備の元で次が示される,

定理 3 ([1])

$2 < 2p \leq n$ の時, 可換半群としての完全系列

$$\mathcal{M}_0(\Lambda) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}_1(\Lambda) \xrightarrow{\psi} \mathcal{K}_n(p) \longrightarrow \{1\}$$

が存在する。

ここで φ は包含写像であり, ψ は $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ の元に対してそれを attaching matrix とする p -decomposition から得られる n -

knotを対応させる。

(証明は [1] を見よ))

定理3から次のことが分かる (というよりも、実は定理3の証明のための Lemmas として証明されるべきことであるが),

- * $K^n \in \mathcal{K}_n(p)$ の attaching matrix に対する変形 $T_1 \sim T_4$ が幾何学的な操作として実現される。
- * attaching matrix が同じなら同じ knot type を表す,
- * $\mathcal{P}(M_0(1))$ の元を attaching matrix として持つ $K^n \in \mathcal{K}_n(p)$ は unknot である。
- * $\mathcal{K}_n(p)$ に属する knots は本質的に無限個ある。

References

- [1] Y. Marumoto, Some higher dimensional knots, to appear
- [2] Y. Marumoto, Knots & immersed disks, 数理研講究録 575 (1985), 174~184.