

Genus one fibered knots in lens spaces

神戸大自然 森元勘治 (Kanji Morimoto)

§0. Introduction.

M を a closed orientable 3-manifold とし、 K を M 内の knot とする。

定義。 $M - \mathring{N}(K)$ が、 meridian と fiber が 1 点で交わるような S^1 上の surface bundle となるとき、 K を fibered knot と呼ぶ。特に fiber が、 a torus with one hole のとき、 K を genus one fibered knot と呼ぶ。

次の定理はよく知られている。

定理。 (Burde and Zieschang [2], González-Acuña [4])

S^3 内の genus one fibered knots は trefoil と figure eight である。

さて、上記定理の一般化として次の問題が考えられる。

問題。 lens space 内の genus one fibered knots を決定せよ。

この問題は次の二つに分けられる。

- ① どのような lens space が genus one fibered knot を含むか。
 ② genus one fibered knot を含む時その knot type を決定せよ。
 次節以降でこの問題を研究する。

§1. Punctured torus bundles over S^1 and Dehn surgeried manifolds.

T を a torus with one hole とし、 $\mathcal{H}(T)$ を T の orientation preserving homeotopy group とすれば、 $\mathcal{H}(T) \cong SL(2, \mathbb{Z})$ である。
 x^*, y^* を 1 点で交わる T 上の oriented loops とし、 f, g を x^*, y^* に沿った Dehn twist とする。

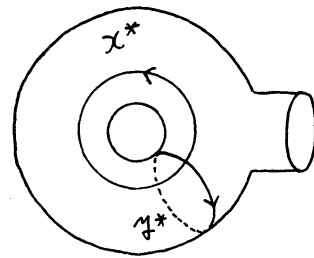
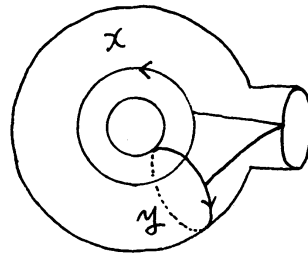


図1

次に、 ∂T 上に base point を 1 点固定し、 x^*, y^* と arc で結んで、



$\pi_1(T)$ の generators とする。(図1)

すなわち $\pi_1(T) = \langle x, y \rangle$ である。

f, g から導かれる $\pi_1(T)$ の自己同型を再び f, g と書くとして、

$$f: \begin{matrix} x \mapsto x \\ y \mapsto yx \end{matrix} \quad g: \begin{matrix} x \mapsto xy \\ y \mapsto y \end{matrix} \quad \text{である。故に } f, g \text{ に対応する}$$

$SL(2, \mathbb{Z})$ の行列を $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と決める。さらに

任意の $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、 A に対応する $\varphi \in \mathcal{H}(T)$ を

monodromy とする S^1 上の T-bundle を MA と書く。

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^{\pm 1} = \begin{pmatrix} a \pm b & b \\ c \pm d & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y^{\pm 1} = \begin{pmatrix} a & b \pm a \\ c & d \pm c \end{pmatrix}$ と $X^{\pm 1}: x \mapsto x$
 $Y^{\pm 1}: y \mapsto y$ に注意すれば、 A の $\pi_1(T)$ への作用を見ることが
 ができる。たとえば $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ のとき、 $A = X^{-1}Y^3X$ より

$$\begin{array}{l} X^{-1} \quad Y^3 \quad X \\ x \mapsto x \mapsto x y^3 \mapsto x y x y x y x \\ y \mapsto y x^{-1} \mapsto y^{-2} x^{-1} \mapsto x^{-1} y^{-1} x^{-1} y^{-1} x^{-1} \end{array} \quad \text{即ち } A: \begin{array}{l} x \mapsto x y x y x y x \\ y \mapsto x^{-1} y^{-1} x^{-1} y^{-1} x^{-1} \end{array}$$

次に V を solid torus とし、 z を ∂V 上の meridian とする。

$\pi_1(\partial MA) = \langle t, u \mid [t, u] = 1 \rangle$ 但し $u = x y x^{-1} y^{-1} \in \pi_1(T)$ とおけば、

任意の $\psi: \partial V \rightarrow \partial MA$: homeo. V に対し coprime integers

(a, b) が存在し、 $\psi(z) = u^a t^b \in \pi_1(\partial MA)$ となる。

故に $MA(a, b) = MA \underset{\psi}{\times} V$ とおく。

よって、 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して、

$$\pi_1(MA(a, b)) = \left\langle \begin{array}{l} x \\ y \\ t \end{array} \mid \begin{array}{l} t^{-1} x t = \pi x^{p_i} y^{q_i} \\ t^{-1} y t = \pi x^{r_i} y^{s_i} \\ [x, y]^a t^b = 1 \end{array} \right\rangle \quad \text{ここで} \quad \begin{array}{l} \sum p_i = p \quad \sum q_i = q \\ \sum r_i = r \quad \sum s_i = s \end{array}$$

$$H_1(MA(a, b)) = \left\langle \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \mid \begin{pmatrix} p-1 & q \\ r & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \mathbb{Z}_b$$

$|H_1(MA(a, b))| = |(p+s-2)b|$ if $p+s \neq 2$ である。

$MA(a, b)$ の Heegaard splittings について次の方がわかる。

命題 1.1

$MA(a, b)$ は genus 3 の Heegaard splitting を持つ。

§ 2. Casson-Gordon's rectangle condition.

本節において、Casson-Gordon が [3] で導入した、Heegaard splittings の irreducibility のある判定法を紹介する。

D を handlebody に proper に埋め込まれた disk とする。 D が boundary parallel でないとき D を essential という。

M を a closed 3-manifold とし、 $(V_1, V_2; F)$ を M の genus が 2 以上の Heegaard splitting とする。すなわち $M = V_1 \cup V_2$ かつ $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2 = F$ である。

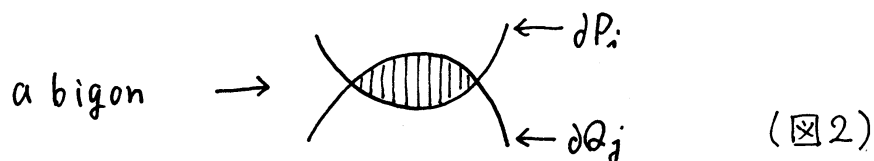
定義。以下が成立するとき、 $(V_1, V_2; F)$ は R -condition を満たすという。

$\exists \mathcal{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_{2g-3}\}$: a disjoint collection of mutually non-parallel essential loops in ∂V_1

$\exists \mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_{2g-3}\}$: a disjoint collection of mutually non-parallel essential loops in ∂V_2

such that

- ① l_i bounds an essential disk in V_1
- ①' m_i bounds an essential disk in V_2
- ② \mathcal{L} cuts ∂V_1 into $2g-2$ pants' $P_1, P_2, \dots, P_{2g-2}$
- ②' \mathcal{M} cuts ∂V_2 into $2g-2$ pants' $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2g-2}$
- ③ There are no bigons in $\partial P_i \cup \partial Q_j$ ($1 \leq i, j \leq 2g-2$)



④ $\forall P_i, \forall Q_j$ \subset

$\forall \alpha, \beta$: two components of ∂P_i

$\forall \gamma, \delta$: two components of ∂Q_j に対して.

$\exists \exists R$: a rectangle in F

s.t. $\partial R = \alpha' \cup \beta' \cup \gamma' \cup \delta'$, where α' is a sub arc of α and so are β', γ' and δ'
and $(\text{Int } R) \cap (\cup P_i \cup \cup Q_j) = \emptyset$

定義。 V_1, V_2 の meridian disks D_1, D_2 で ∂D_1 と ∂D_2 が 1 点で横断的に交わるものを $(V_1, V_2; F)$ の cancelling pair と呼ぶ。
以上の定義により次が示される。

定理 2.1 (Casson - Gordon)

$(V_1, V_2; F)$ が R-condition を満たせば、 $(V_1, V_2; F)$ は cancelling pair を持たない。

定理 2.1 と Bonahon - Otal ([17]) の結果より、次の系が得られる。

系 2.2

$(V_1, V_2; F)$ が R-condition を満たせば、 M は genus 1 の Heegaard splitting を持たない。

§ 3. Heegaard diagrams of $MA(a, 1)$

M を genus one fibered knot を含む orientable closed 3-manifold とすれば、 M はある $MA(a, 1)$ に同相である。以下で $MA(a, 1)$ の Heegaard diagram の描き方を示す。

$\varphi: T \rightarrow T$ を T 上の homeo. T の φ の行列を $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ とする。

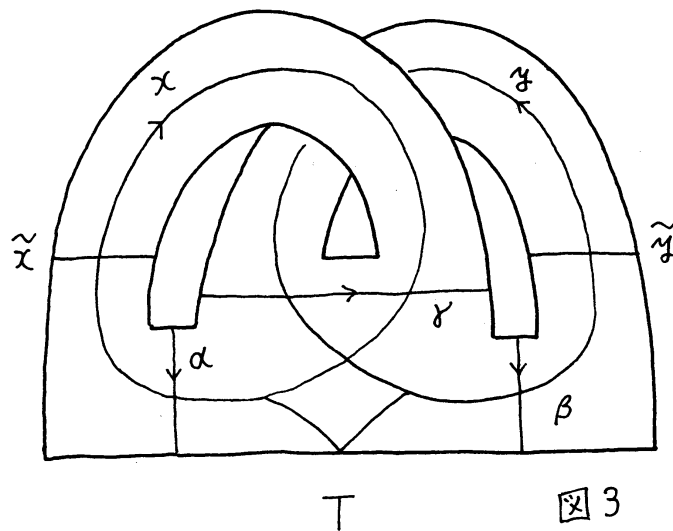
$\pi_1(T) \ni \alpha, \beta$ を § 1 の如くとし、 α, β, γ を T 内の oriented proper arcs とし、 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を T 内の proper arcs とする (右図)。

$\varphi|_{\partial T} = id$ としてよい。

このとき $\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma)$

は $\partial\varphi(\alpha) = \partial\alpha, \partial\varphi(\beta) = \partial\beta, \partial\varphi(\gamma) = \partial\gamma$

なる oriented arcs である。 $\varphi(\alpha)$ が $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ と交わることに
よって得られる α, β の word を再び $\varphi(\alpha)$ と書くと、



$\varphi(\alpha) = \gamma^{-1} \varphi(\gamma)$
 である。
 (右図参照)

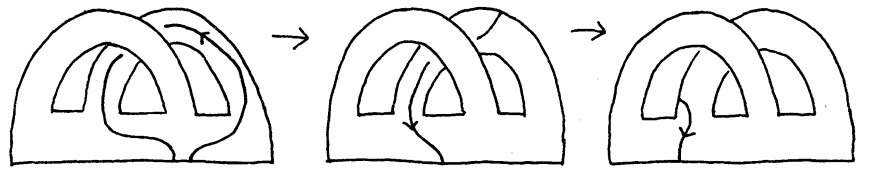


図4

同様に、 $\varphi(\beta) = \chi^{-1} \varphi(\chi)$, $\varphi(\gamma) = \gamma^{-1} \varphi(\gamma) \varphi(\alpha)^{-1} \chi$ である。

さて、 $T \times I$ において $\varphi: T \times \{1\} \rightarrow T \times \{0\}$ と考えると、
 $M_A = T \times I / (x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$ である。ここで T -bundle としての
 S^1 方向は $T \times I$ 内で $T \times \{0\} \rightarrow T \times \{1\}$ に与る。 $H_1 = T \times [0, \frac{1}{2}]$,
 $H_2 = T \times [\frac{1}{2}, 1]$ とおく。 a solid torus V に対して、 $\tau: \partial V \rightarrow$
 ∂M_A は $b=1$ 故 $\tau(B) = \partial T \times [\frac{1}{2}, 1]$ としてよい。ここで B は
 core が V の core と isotopic な ∂V 上の annulus である。
 故に $V_1 = H_1$, $V_2 = H_2 \times V$ とおけば、 $M_A(a, 1) = V_1 \cup V_2$ は
 genus 2 の Heegaard splitting である。 $D_\alpha^1 = \alpha \times [0, \frac{1}{2}]$, $D_\beta^1 =$
 $\beta \times [0, \frac{1}{2}]$, $D_\gamma^1 = \gamma \times [0, \frac{1}{2}]$, $D_\alpha^2 = \alpha \times [\frac{1}{2}, 1]$, $D_\beta^2 = \beta \times [\frac{1}{2}, 1]$, $D_\gamma^2 =$
 $\gamma \times [\frac{1}{2}, 1]$ とおけば、 $D_\alpha^i, D_\beta^i, D_\gamma^i$ ($i=1, 2$) は V_i 内の meridian
 disks である。ここで $V_2 = H_2$

とみなした。故に attaching
 homeo. $h: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$ は、
 $h|_{T \times \{1/2\}}: T \times \{1/2\} \rightarrow T \times \{1/2\} = \text{id}$
 $h|_{T \times \{1\}}: T \times \{1\} \rightarrow T \times \{0\} = \varphi$
 $h|_{\partial T \times [1/2, 1]}: \partial T \times [1/2, 1] \rightarrow$
 $\partial T \times [0, 1/2] = \text{Dehn twists}$

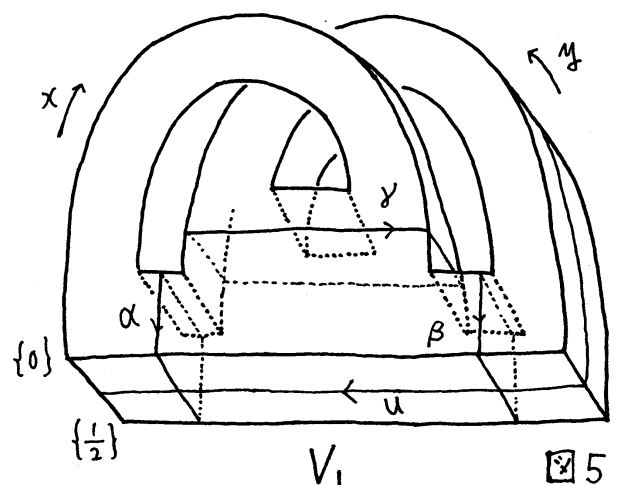


図5

along u である。但し $u = \partial T \times \frac{1}{4}$ 。故に Heegaard diagram は、 a -times twists と $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$ によって描くことができる。

次に、 φ と R-condition について一つの結果を述べる。

C を次のような 8 つの words の set とする。

$$C = \{ x y x^{-1}, x y^{-1} x^{-1}, x^{-1} y x, x^{-1} y^{-1} x, y x y^{-1}, y x^{-1} y^{-1}, y^{-1} x y, y^{-1} x^{-1} y \}$$

定義。 $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$ のうちの少なくとも一つが、 C の word で始まるか又は C の word で終わるとき、 φ は condition \bar{C} を満たすという。 φ が condition \bar{C} を満たさないとき、 φ は condition C を満たすという。

このとき次が得られる。

命題 3.1.

φ が condition C を満たすならば、 $|a| > 1$ のとき、

$(V_1, V_2; F)$ は R-condition を満たす。

証明略。

§ 4. Two lemmas

本節において二つの補題を準備する。

補題 4.1 (lemma of [2])

$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, $T = p + s$ とする。このとき A は $GL(2, \mathbb{Z})$ において次の行列に共役である。

$$\begin{pmatrix} T-s' & q' \\ r' & s' \end{pmatrix} \quad \text{但し, } \begin{aligned} T > 0 &\Rightarrow 0 \leq s' < T \text{ and } s' \leq T-s' \\ T < 0 &\Rightarrow T < s' \leq 0 \text{ and } T-s' \leq s' \\ T = 0 &\Rightarrow s' = 0 \end{aligned}$$

証明略。

整数 a, m に対して $A = \begin{pmatrix} m+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき、 $M_{A(a,1)}$ を考える。このとき次のことがわかる。

補題 4.2

$a \neq 0$ とする。 $M_{A(a,1)}$ が genus 1 の Heegaard splitting を持つための必要十分条件は $(a, m) = (-1, -5)$ or $(-1, -7)$ である。

略証。

$$A = XY^{-1}X^{-(m+1)} \text{ より } \pi_1(M_{A(a,1)}) = \left\langle \begin{array}{l} x \\ y \\ t \end{array} \middle| \begin{array}{l} t^{-1}xt = x^{m+2}y^{-1} \\ t^{-1}yt = yxy^{-1} \\ [xy]^a t = 1 \end{array} \right\rangle \text{ である。}$$

故に、 A に対応する homeo. を φ とすると、 $\varphi(\alpha) = xy^{-1}$,
 $\varphi(\beta) = x^{m+1}y^{-1}$, $\varphi(\gamma) = x^{-m}$ であるから φ は condition C を満たす。よって命題 3.1 と系 2.2 より $|a| > 1$ のとき $M_{A(a,1)}$ は genus 1 の Heegaard splitting を持たない。

$a = -1$ のとき。 $u = \eta x \eta$, $v = x \eta$ とおくと

$\pi_1(M_{A(a,1)}) = \langle u, v \mid uvu^{-1}v(uv^{-2})^{m+4} = 1, u^2 = v^3 \rangle$ を得る。

$\therefore \pi_1(M_{A(a,1)}) / u^2 = v^3 = 1 = \langle u, v \mid u^2 = v^3 = (uv)^{m+6} = 1 \rangle$

故に Satz 3 of [5] より $\pi_1(M_{A(a,1)})$ が巡回群ならば $m = -5$ or -7 である。

$a = 1$ のとき。計算が複雑なので省略する。(筆者が良い方法も見つかりなかつた！)。

逆は直接構成すれば容易にわかる。

ちなみに $(a, m) = (-1, -5)$ のとき $M_{A(a,1)} \cong L(5, 1)$,

$(a, m) = (-1, -7)$ のとき $M_{A(a,1)} \cong L(7, 2)$ である。 略証終。

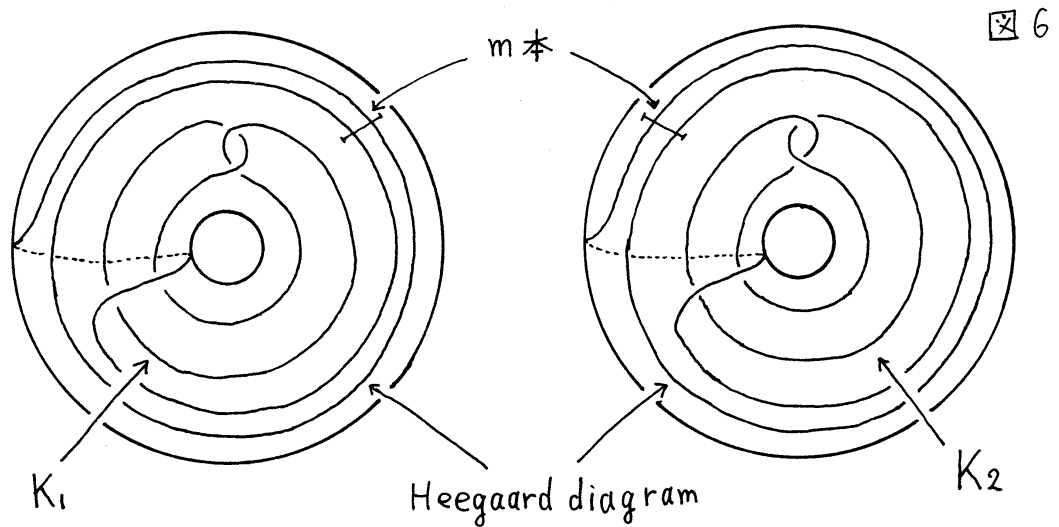
§5. Genus one fibered knots in lens spaces of type $(0, 1)$

$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$ and $(5, 2)$.

負でない互いに素な整数 p, q に対して、 $\text{type}(p, q)$ の lens space を $L(p, q)$ と書く。特に $L(0, 1) = S^2 \times S^1$, $L(1, 1) = S^3$ である。

命題 5.1

m を負でない整数とする。 $L(m, 1)$ は図 6 のような genus one fibered knots K_1 and K_2 を含む。



特に $m=1$ のとき K_1 は figure eight, K_2 は trefoil である。
 また, $m=0$ のとき K_1 と K_2 は 同じ type。 $m>0$ のとき K_1 と K_2 は異なる type である。

略証。

$A = \begin{pmatrix} m+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $MA(0,1) \cong L(m,1)$ であり knot は K_1 となる。
 $A = \begin{pmatrix} -m+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $MA(0,1) \cong L(m,1)$ であり, knot は K_2 となる。
 また $m>0$ のとき, $\begin{pmatrix} m+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -m+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は共役でないので $L(m,1)-K_1$ と $L(m,1)-K_2$ は同相でない。故に二つの knots は異なる type である。

定理 5.2.

$S^2 \times S^1$ 内の genus one fibered knot は 命題 5.1 の knot のみである。

略証。

$MA(a,1) \cong S^2 \times S^1$ とする。補題 4.1 と homology group の計算より $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ としてよい。このとき補題 4.2 と命題 5.1 より結論を得る。

定理 5.3. (Burde and Zieschang [2], González-Acuña [4])
 S^3 内の genus one fibered knots は命題 5.1 の knots のみである。

定理 5.4.

P^3 内の genus one fibered knots は命題 5.1 の knots のみである。

略証。

$MA(a,1) \cong P^3$ とする。補題 4.1 と homology group の計算より $A = \begin{pmatrix} m+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $m = \pm 2$ としてよい。このとき補題 4.2 と命題 5.1 より結論を得る。

定理 5.5.

$L(3,1)$ 内の genus one fibered knots は命題 5.1 の knots のみである。

略証。

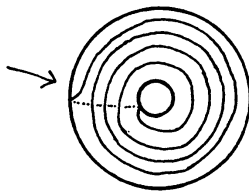
$MA(a,1) \cong L(3,1)$ とする。補題 4.1 と homology group の計算

より $A = \begin{pmatrix} m+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $m = \pm 3$ としてよい。このとき補題 4.2 と命題 5.1 より結論を得る。

定理 5.6

$L(4, 1)$ 内の genus one fibered knots は 命題 5.1 の K_1, K_2 と右図の knot K_3 である。

Heegaard
diagram



K_3

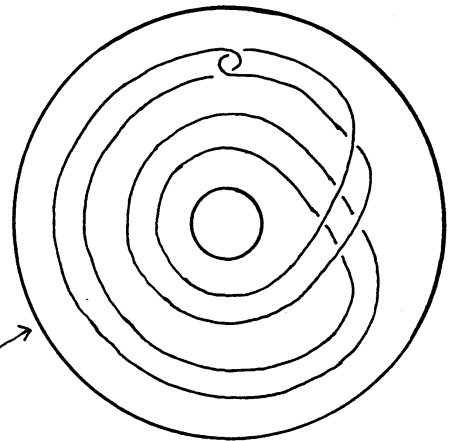


図 7

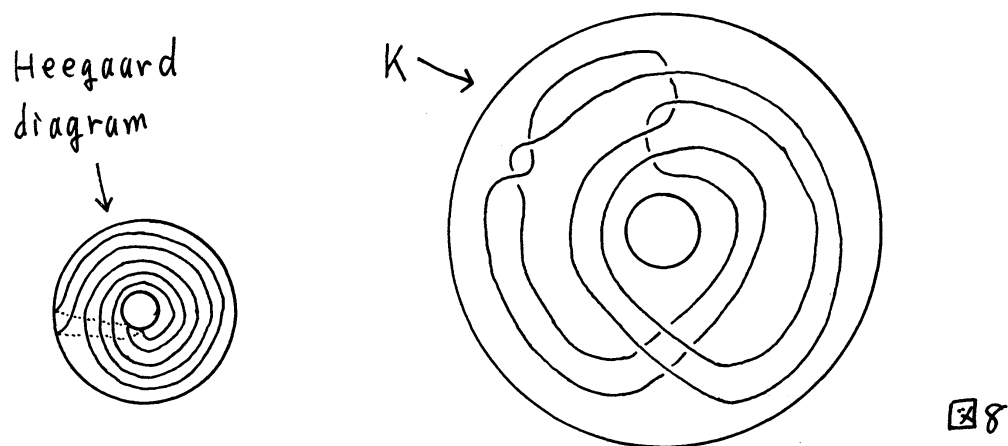
略証。

$M_{A(a, 1)} \cong L(4, 1)$ とする。補題 4.1, 4.2 及び基本群の計算により、 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ and $a = -1$ or $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ and $a = -1$ を得る。 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a = 0$ のとき K_1 、 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a = -1$ のとき K_2 、 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a = -1$ のとき K_3 を得る。これら三つの knots の types が異なることは容易にわかる。(注意、 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と共役である)。

定理 5.7

(1) $L(5, 1)$ 内の genus one fibered knots は 命題 5.1 の knots のみである。

- (2) $L(5,2)$ 内の genus one fibered knot は下図の knot K 一つである。



略証。

$M_A(a,1) \cong L(5,1)$ or $L(5,2)$ とする。補題 4.1, 4.2 及び基本群の計算により, $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $a=0$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $a=0, -1$ or $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ and $a=0$ を得る。 $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a=0$ のとき, $L(5,1)$ で K_1 , $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $a=0, -1$ のとき, 共に $L(5,1)$ で K_2 となる。 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $a=0$ のとき, $L(5,2)$ で K となる。

注意。 $L(6,1)$, $L(7,1)$ は命題 5.1 より, $L(7,2)$ は補題 4.2 より genus one fibered knot を含むことがわかる。故に基本群の位数が 7 以下の lens spaces はすべて genus one fibered knot を含む。しかしその後の調査で, 位数が 19 の lens space で genus one fibered knot を含まないものが存在することがわかった。また, 一つの lens space 内の

genus one fibered knots が有限個であることは容易にわかる。

参考文献

- [1] F. Bonahon et J.P. Otal : Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires , Ann. scient Éc. Norm. Sup. 4^e série , t. 16 (1983) 451~466.
- [2] G. Burde and H. Zieschang : Neuwirthsche Knoten und Flächeabbildungen , Abh. Math. Semi. Univ. Hamburg 31 (1967) 239~246.
- [3] A.J. Casson and C. McA. Gordon : Manifolds with irreducible Heegaard splittings of arbitrarily high genus , to appear.
- [4] F. González - Acuña : Dehn's construction on knots , Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 15 (1970) 58~77.
- [5] N. Peczynski, G. Rosenberger and H. Zieschang : Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen, Invent. Math. 29 (1975) 161~180.