数理解析研究所講究録
624巻 1987年 46-59

3次元多様体の基本群の表示

筑波大学　数学系　高橋　元男 (Moto-o TAKAHASHI)

1.　最初に、次の様な link (3-chain link と呼ぶ) を考え、これの3つの component に、それぞれ、$\frac{p_1}{r_1}$, $\frac{p_2}{r_2}$, $\frac{p_3}{r_3}$ surgery して得られる closed 3-manifold を $M_1\left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}\right)$ で表わす。但し、$(p_i, r_i)=1$ $(i=1,2,3)$ である。

この 3-manifold の基本群の表示を、次の様にして求めてみる。

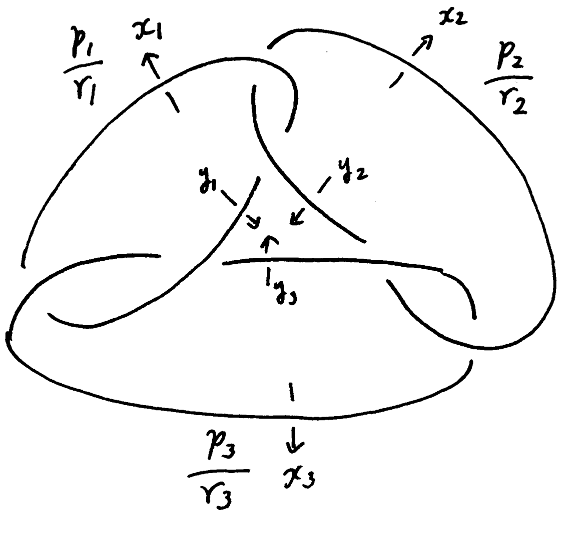


図　1

先ず、link group の表示を求める。図1で、例えば $\longrightarrow x_1$ は、この紙の上方にある基点から $\longrightarrow x_1$ をくぐって元に戻る loop（の表わす基本群の元）を表わす。

Wirtinger 表示は

$$\langle x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \mid y_2x_1 = x_1x_2,\ y_3x_2 = x_2x_3,\ y_1x_3 = x_3x_1,$$
$$x_1y_2 = y_2y_1,\ x_2y_3 = y_3y_2,\ x_3y_1 = y_1y_3 \rangle \quad (1)$$

となる。各 component の meridian m_i と longitude l_i は次の様になっている。

$$m_1 = x_1, \quad l_1 = y_2\overset{x_3}{\cancel{y_3}}, \quad [m_1, l_1] = 1$$
$$m_2 = x_2, \quad l_2 = y_3x_1, \quad [m_2, l_2] = 1$$
$$m_3 = x_3, \quad l_3 = y_1x_2, \quad [m_3, l_3] = 1.$$

そこで、指定された様に Dehn surgery を行えば relator $m_i^{p_i} l_i^{r_i} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ が付け加わる。

ところで、$(p_i, r_i) = 1$ であるから $r_is_i - p_iq_i = 1$ となる整数 q_i, s_i が定まる。$a_i = m_i^{s_i} l_i^{q_i}$ とおけば、

$$x_i = m_i = a_i^{r_i}, \quad l_i = a_i^{-p_i}$$

となる。また、

$$y_1 = l_3x_2^{-1} = a_3^{-p_3}a_2^{-r_2}$$
$$y_2 = l_1x_3^{-1} = a_1^{-p_1}a_3^{-r_3}$$
$$y_3 = l_2x_1^{-1} = a_2^{-p_2}a_1^{-r_1}$$

となる。これらを表示(1)の relator に代入すると

$$a_1^{p_1+r_1} a_2^{r_2} a_1^{-r_1} a_3^{r_3} = 1$$
$$a_2^{p_2+r_2} a_3^{r_3} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} = 1$$
$$a_3^{p_3+r_3} a_1^{r_1} a_3^{-r_3} a_2^{r_2} = 1$$

を得る。故に

$$\pi_1\left(M_1\left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}\right)\right) \cong \langle a_1, a_2, a_3 \mid$$
$$a_1^{p_1+r_1} a_2^{r_2} a_1^{-r_1} a_3^{r_3} = a_2^{p_2+r_2} a_3^{r_3} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} = a_3^{p_3+r_3} a_1^{r_1} a_3^{-r_3} a_2^{r_2} = 1 \rangle$$

となる。

[注意] この表示は genus 3 の Heegaard diagram に対応する表示であり、RR-system は次の様をもっている。

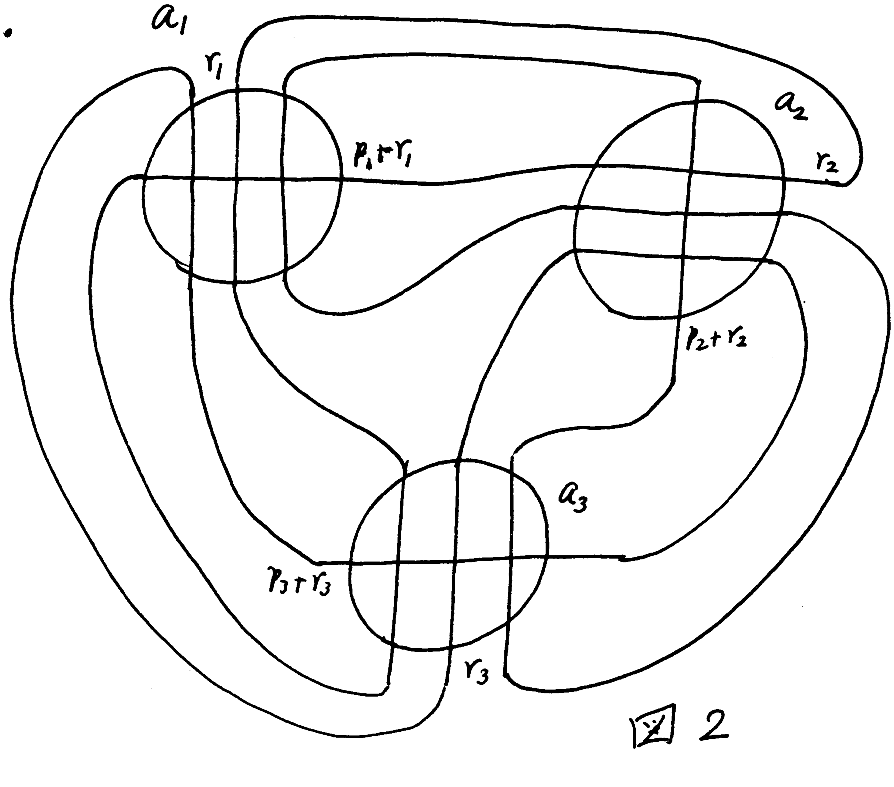


図 2

更に、この表示の generator a_3 を消去出来る。即ち、
第1式から

$$a_3^{r_3} = a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1} \qquad (2) \ \cancel{(3)}$$

となり、これを第2式に代入すると

$$a_2^{p_2+r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} = 1 \qquad (3)$$

更に、第3式と(2)より

$$a_3^{p_3+r_3} = a_2^{-r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+2r_1)} \qquad (4)$$

が出る。ところが(3)を仮定すれば

$$[a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1},\ a_2^{-r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+2r_1)}] = 1$$

となるので(2)と(4)より a_3 が消去出来て
($(p_3+r_3, r_3)=1$ に注意)

$$(a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1})^{p_3+r_3} = (a_2^{-r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+2r_1)})^{r_3}$$

を得る。この式をもっと簡単にするため、左から $a_1^{-r_1}$、
右から $a_1^{r_1}$ をかけると

$$(a_2^{-r_2} a_1^{-p_1})^{p_3+r_3} = (a_1^{-r_1} a_2^{-r_2} \underline{a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+r_1)}})^{r_3} \qquad (5)$$

となる。(3)より

$$a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+r_1)} = a_2^{-(p_2+r_2)} a_1^{-r_1} a_2^{r_2}$$

であるから、これを(5)の下線部分に代入すると

$$(a_2^{-r_2} a_1^{-p_1})^{p_3+r_3} = (a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-r_1} a_2^{r_2})^{r_3}$$

即ち、

$$(a_1^{p_1}a_2^{r_2})^{-(p_3+r_3)} = (a_1^{-r_1}a_2^{-(p_2+2r_2)}a_1^{-r_1}a_2^{r_2})^{r_3}$$

となる。ここで

$$a_1^{-r_1}a_2^{-(p_2+2r_2)}a_1^{-r_1}a_2^{r_2} = (a_1^{-r_1}a_2^{-(p_2+2r_2)}a_1^{-(p_1+r_1)})(a_1^{p_1}a_2^{r_2})$$

であり、かつ (3) より

$$[a_1^{p_1}a_2^{r_2},\ a_1^{-r_1}a_2^{-(p_2+2r_2)}a_1^{-(p_1+r_1)}] = 1$$

であるから

$$(a_1^{-r_1}a_2^{-(p_2+2r_2)}a_1^{-r_1}a_2^{r_2})^{r_3} = (a_1^{-r_1}a_2^{-(p_2+2r_2)}a_1^{-(p_1+r_1)})^{r_3}(a_1^{p_1}a_2^{r_2})^{r_3}$$

となり、ゆえに

$$(a_1^{p_1}a_2^{r_2})^{-(p_3+2r_3)} = (a_1^{-r_1}a_2^{-(p_2+2r_2)}a_1^{-(p_1+r_1)})^{r_3}.$$

逆元をとると

$$(a_1^{p_1}a_2^{r_2})^{p_3+2r_3} = (a_1^{p_1+r_1}a_2^{p_2+2r_2}a_1^{r_1})^{r_3}$$

となる。ゆえに

$$\pi_1\left(M_1\left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}\right)\right)$$

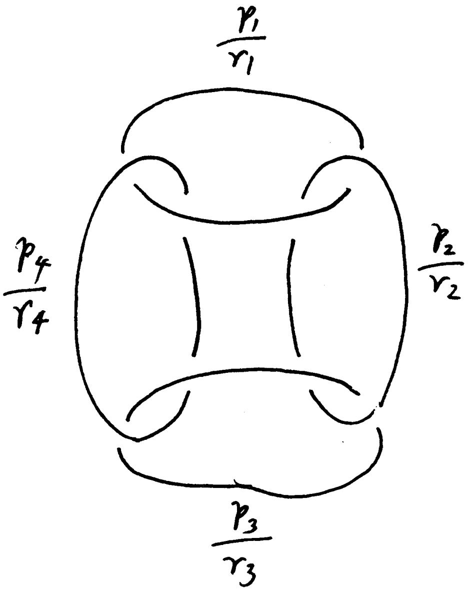
$$\cong \langle a_1, a_2 \mid a_2^{p_2+r_2}a_1^{r_1}a_2^{-r_2}a_1^{-(p_1+r_1)}a_2^{-r_2}a_1^{r_1} = 1,$$

$$(a_1^{p_1}a_2^{r_2})^{p_3+r_3} = (a_1^{p_1+r_1}a_2^{p_2+2r_2}a_1^{r_1})^{r_3} = 1 \rangle$$

となる。この表示は genus 2 の Heegaard diagram に対応するものである。

同様な事を他のlinkでも行ってみる。(結果のみを記す。)

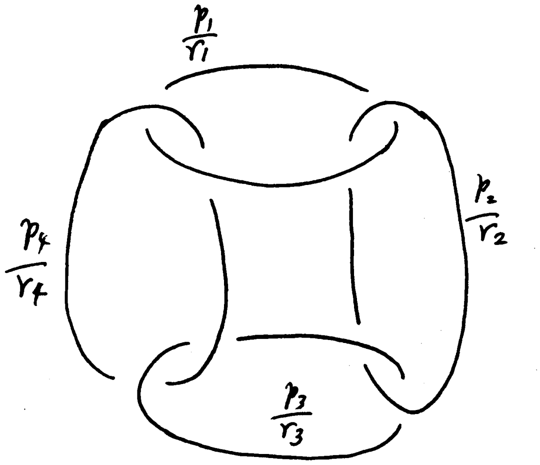
2.



$$\pi_1\left(M_2\left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}, \frac{p_4}{r_4}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid\ & a_1^{p_1} a_2^{-r_2} a_4^{r_4} = 1, \\ & a_2^{p_2} a_1^{-r_1} a_3^{r_3} = 1, \\ & a_3^{p_3} a_4^{-r_4} a_2^{r_2} = 1, \\ & a_4^{p_4} a_3^{-r_3} a_1^{r_1} = 1 \ \rangle\end{aligned}$$

3、

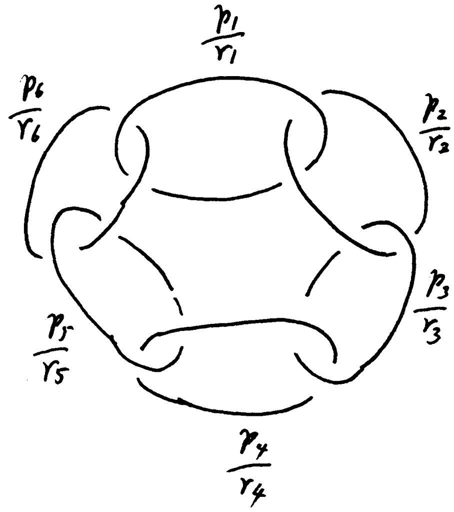


$$\pi_1\left(M_3\left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}, \frac{p_4}{r_4}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid\ & a_2^{-r_2} a_1^{-p_1} a_4^{r_4} = 1 \\ & a_3^{-r_3} a_1^{r_1} a_4^{-p_4} = 1 \\ & a_2^{p_2+r_2} a_1^{r_1} a_4^{-(p_4+r_4)} a_1^{p_1+r_1} = 1 \\ & a_3^{p_3+r_3} a_4^{p_4+r_4} a_1^{-(p_1+r_1)} a_4^{r_4} = 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cong \langle a_1, a_4 \mid\ & (a_1^{-p_1} a_4^{r_4})^{p_2+r_2} (a_1^{r_1} a_4^{-(p_4+r_4)} a_1^{(p_1+r_1)})^{r_2} = 1, \\ & (a_1^{r_1} a_4^{-p_4})^{p_3+r_3} (a_4^{p_4+r_4} a_1^{-(p_1+r_1)} a_4^{r_4})^{r_3} = 1, \\ & [a_1^{-p_1} a_4^{r_4},\ a_1^{r_1} a_4^{-(p_4+r_4)} a_1^{(p_1+r_1)}] = 1 \rangle \end{aligned}$$

4.



$$\pi_1\left(M_4\left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}, \frac{p_4}{r_4}, \frac{p_5}{r_5}, \frac{p_6}{r_6}\right)\right)$$

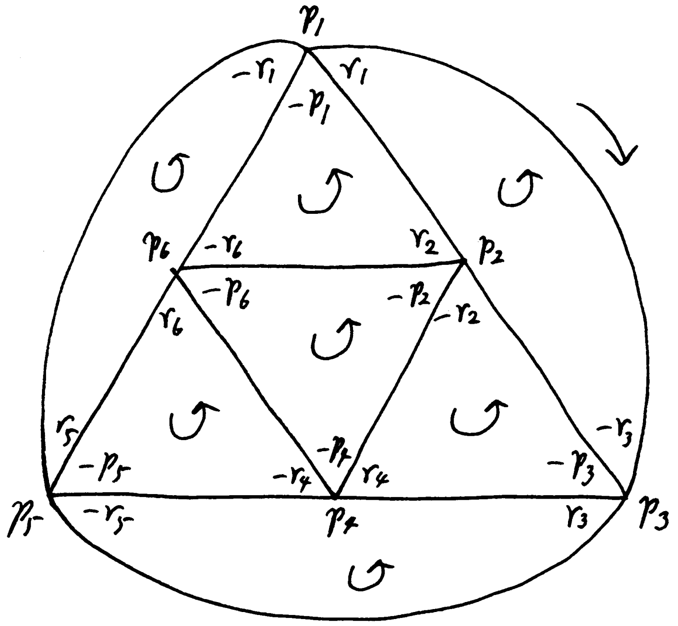
$$\begin{aligned} \cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid\ & a_1^{r_1} a_2^{p_2} a_3^{-r_3} = 1, \\ & a_2^{r_2} a_3^{p_3} a_4^{-r_4} = 1, \end{aligned}$$

$$a_3^{r_3} a_4^{p_4} a_5^{-r_5} = 1$$
$$a_4^{r_4} a_5^{p_5} a_6^{-r_6} = 1$$
$$a_5^{r_5} a_6^{p_6} a_1^{-r_1} = 1$$
$$a_6^{r_6} a_1^{p_1} a_2^{-r_2} = 1 \ \rangle$$

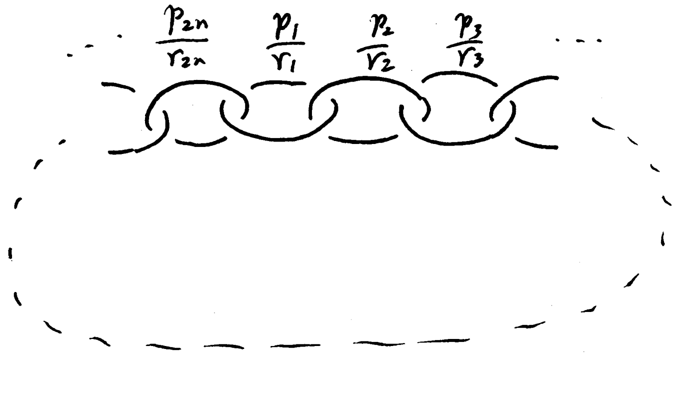
この群において帰結として

$$a_2^{p_2} a_4^{p_4} a_6^{p_6} = 1 \qquad a_1^{p_1} a_3^{p_3} a_5^{p_5} = 1$$

が成り立つ。この基本群の表示は次の様なラベル付き 4-regular 平面グラフとして表わされる。



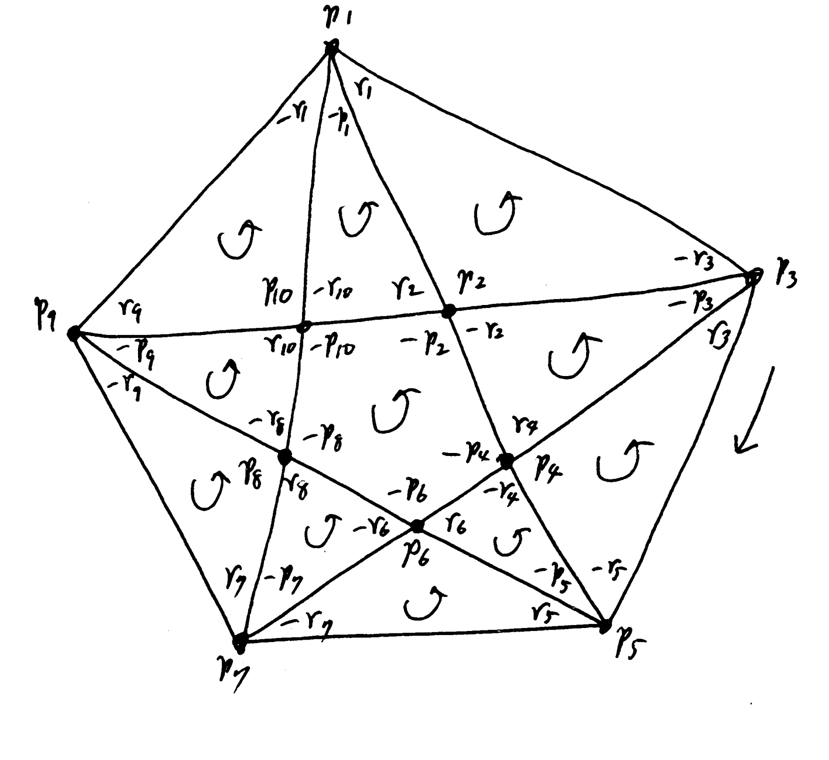
5.



$$\pi_1\left(M_5\left(\frac{p_1}{r_1},\frac{p_2}{r_2},\frac{p_3}{r_3},\cdots,\frac{p_{2n}}{r_{2n}}\right)\right)$$

$$\cong\left\langle a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2n} \;\middle|\; a_i^{r_i}a_{i+1}^{p_{i+1}}a_{i+2}^{-r_{i+2}}=1 \quad (i=1,\cdots,2n)(\mathrm{mod}.\,2n)\right\rangle$$

例えば $n=5$ の時は、この基本群は次の様なラベル付き 4-regular 平面グラフで表わされる。



以上の事は更に一般化出来る。

Gを任意の 4-regular 連結平面グラフとし各頂点に次の様なラベルがついているものとする。

但し、p, r は互いに素な整数である。この様なグラフを M-graph と呼ぶ事にする。

Gの面は2色(A, Bとする)で色分け出来る。

このグラフを3-diskの表面に描く。この様な3-diskのcopyを4つ用意する。但し2つは他の2つの鏡像になっているものとする。これらのdiskの表面をはり合せる。以下実例により説明する。

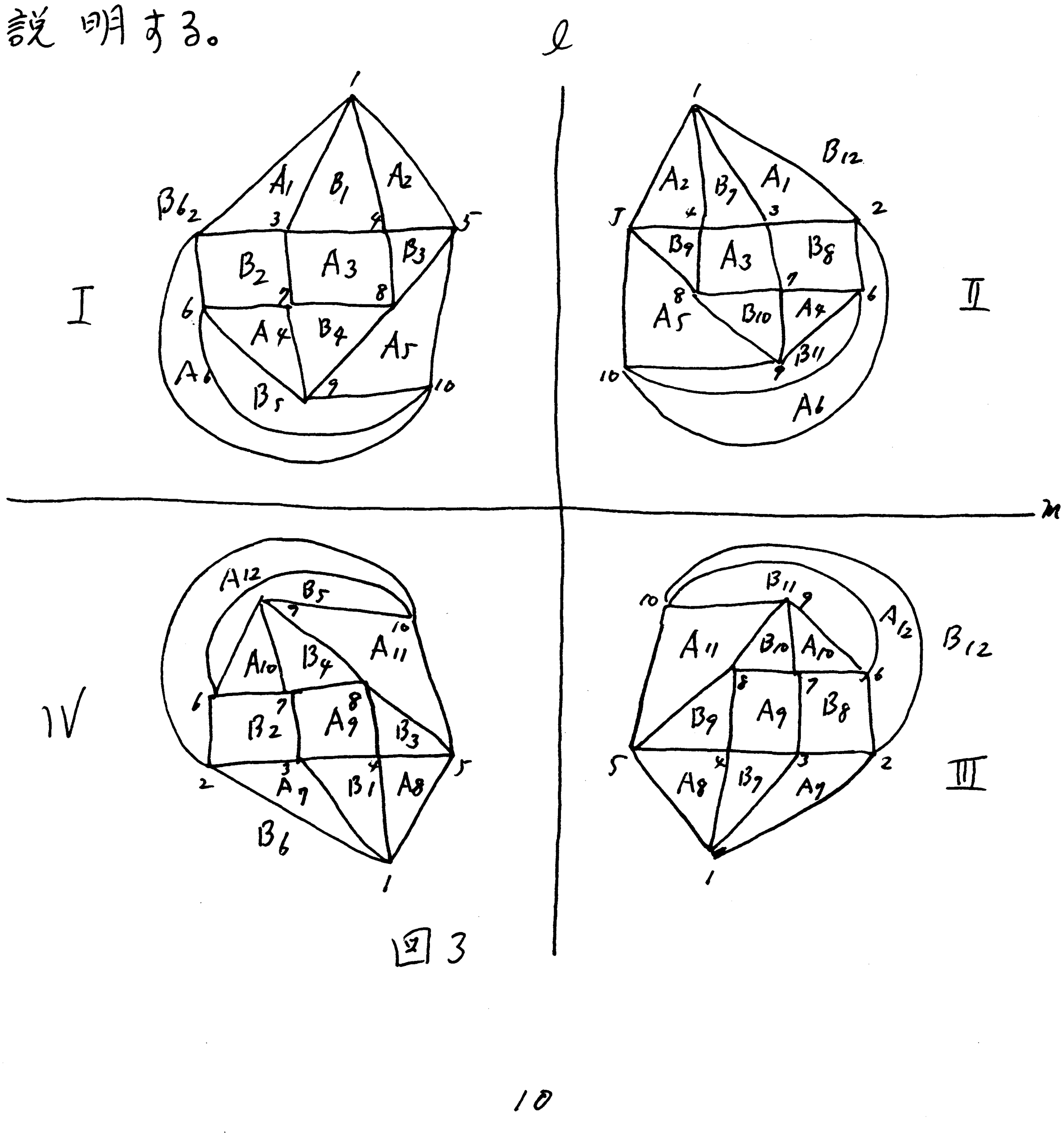
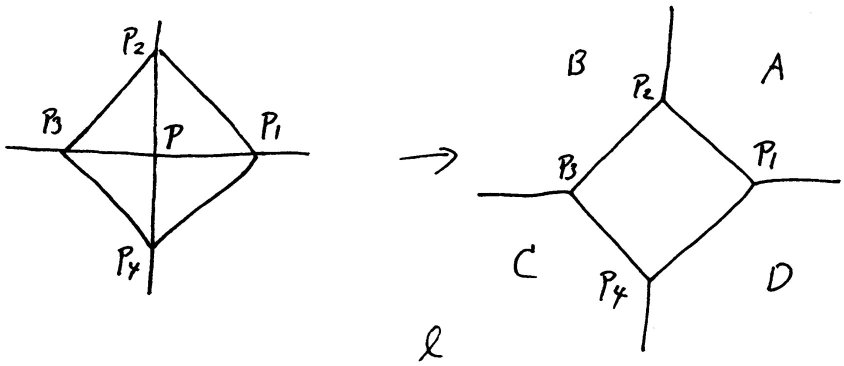
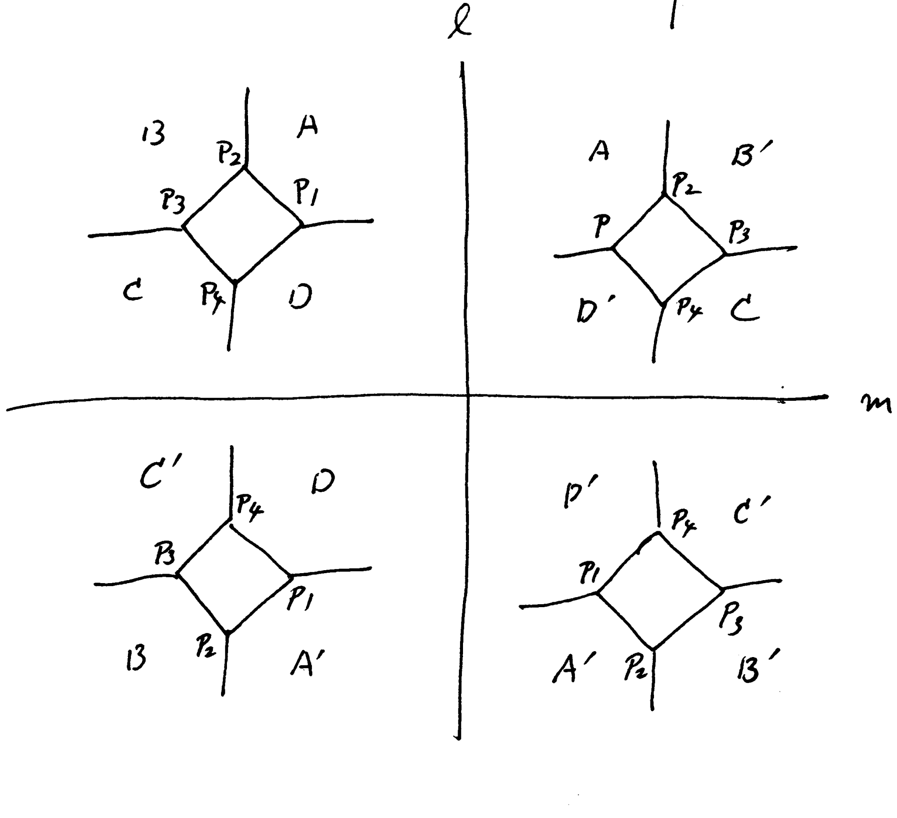
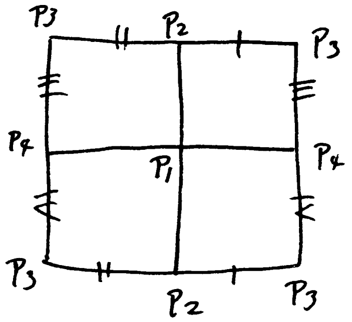


図3

(図は直線 l, m に関し対称になっている。
4つの3-diskのコピーを図の様にはり合せ、頂点の regular neighborhood を除くと、頂点の個数だけの tori を boundary とする 3-manifold が出来る。頂点の近傍では次の様な状況になっている。



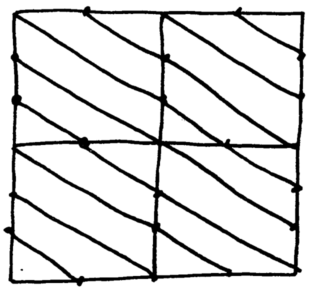




Boundary of torus

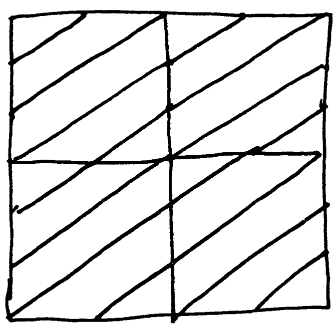
ここで 例えば ラベルが $\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline -3 & -2 \end{array}$ なら

次の様な loop に沿って Dehn surgery する.



もしラベルが $\begin{array}{c|c} -2 & 3 \\ \hline -3 & 2 \end{array}$ なら 次の様な loop に沿って

Dehn surgery する

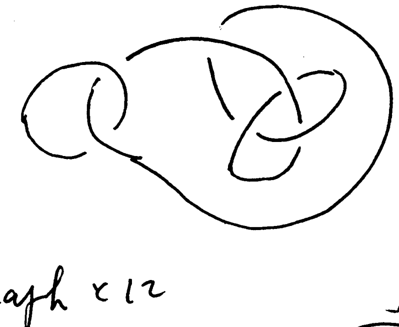


最初に与えたラベルつきグラフGはこの様にして得られる3-manifoldを表わすと考える。これにつき次の定理が成り立つ。

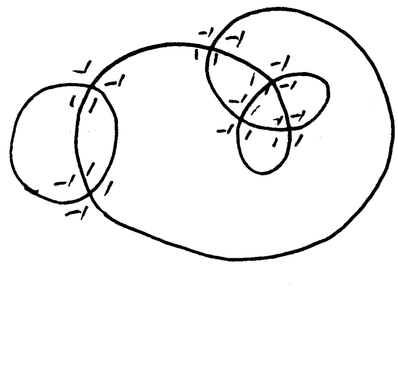
定理　Mをclosed orientable connected 3-manifoldとする。MがM-graphで表現出来るための必要十分条件は、MがS^3の2-fold branched covering spaceと同相となることである。

[証明のアウトライン].　MがM-graphで表現されたとする。図3でIとIII，IIとIVの対応点を同一視するとS^3が出来、MはS^3の2-fold branched covering spaceと同相である。

逆にMをS^3の2-fold branched covering spaceとする。Lをbranch set (link)とし、Lの平面へのprojection Pを考える。例えばPが



なら　M-graphとして



をとれば　これが　Mの M-graph 表現となる。（証明終）