

A construction of 3-manifolds  
with involution

神戸大理 北村 雅子 (Masako Kitamura)

§ 1 Introduction

Closed orientable 3-manifold  $M$  上 orientation reversing  
involution  $\tau$  (i.e.  $\tau: M \rightarrow M$ : orientation reversing homeo,  $\tau^2 = \text{identity}$ )  
をもつものを考えます。

このような多様体について, Kawachi [1] により, 次が  
証明されています。

Theorem 1. (Kawachi)

$H_1(M; \mathbb{Z})$  の torsion part はあるアーベル群  $A$  の direct double  
 $A \oplus A$ , 又は  $\mathbb{Z}_2$  と  $A$  2つの直和  $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$  に同型である。

又, 逆に, 上の性質をもつアーベル群  $G$  (i.e.  $\text{Tor} G \cong A \oplus A$ ,  
or.  $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ ) について,  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong G$  となるような, ori. rev.

involution をもつ closed orientable 3-mfd が同論文で構成されています。その 3-mfd を特に irreducible なもので構成できるか、という問題については、

Theorem 2. (kawauchi)

$H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ .  $A$ : odd order ならば、 $M$  は  $P^3$  とある 3-mfd との connected sum で表わせられる。

Theorem 3. (kawauchi)

$\text{Tor} G \cong A \oplus A$  であるような任意のアベル群  $G$  について、 $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong G$  となるような、ori. rev. involution をもつ、closed irreducible orientable 3-mfd が存在する。

が知られています。そこで、本稿では Th 2.3 以外の、前述の性質をもつアベル群  $G$  に対して、 $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong G$  となる  $M$  を irreducible で構成します。

このような  $G$  は次の 2 つに分類することができます。

Case 1.  $\text{Tor} G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$  (possibly  $A=0$ ),  $G/\text{Tor} G \neq 0$ .

Case 2.  $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ ,  $A$ : even order

$M$  の構成もこの分類に従って行ないます。

以下、 $S^3$  上の orientation reversing involution を

$$\begin{array}{ccc} \tau: S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (-x, -y, -z) \\ \infty & \longrightarrow & \infty \end{array}$$

で定義します。

## § 2 Case 1 の $M$ の構成

Case 1 のアーベル群は、具体的に  $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_S \oplus \mathbb{Z}_2$   
 $\oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$  ( $S \geq 1, r \geq 0, p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Z}$ )  
 の形に直和分解できます。

Step 1  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  であるような  $M$  の構成。

まず  $S^3$  内に、Fig 1 のような graph  $T$  を、 $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \subset S^3$  を含め、

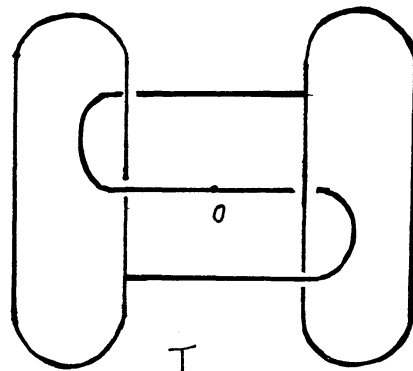
$\tau$ -invariant であるように

選びます。  $M_1 = \overline{S^3 - N(T)}$

( $N(T)$  は  $T$  の  $\tau$ -invariant regular

neighborhood) とすると、 $\partial M_1 = F$  は

genus 2 の orientable surface,  $\tau = \tau|_F$ 。  $F$  上の involution



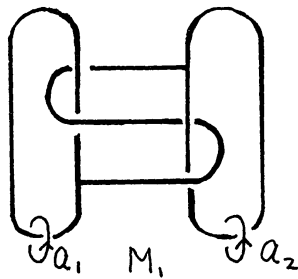
T  
Fig. 1

$\tau' = \tau|_F$  を使って,  $M_2 = F \times I / (x, 1) \sim (\tau'(x), 1)$  ( $I = [0, 1]$ )  
 とすれば,  $M_2$  は genus 3 の non-orientable surface 上の twisted  
 I-bundle となり,  $\tau'' : M_2 \rightarrow M_2$ ,  $\tau''(x, t) = (\tau'(x), t)$   
 という involution をもっている.

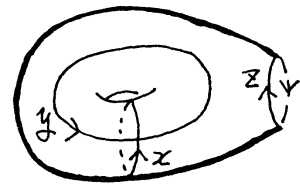
$M = M_1 \cup_h M_2$ ,  $h : \partial M_2 = F \times 0 \rightarrow \partial M_1 = F$  : identity map. とすれば  
 $M$  は  $\tau, \tau''$  から induce される ori. rev. involution をもっているが:  
 さらに,  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ ,  $\hookrightarrow M$  は irreducible である:  
 とが次のように確かめられます.

•  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

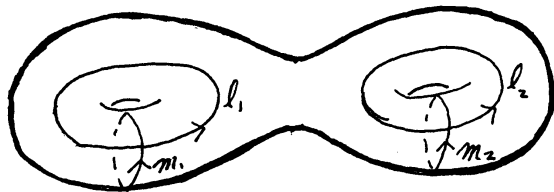
$M_1, M_2, F$  の first homology を



$H_1(M_1; \mathbb{Z}) \cong \langle a_1, a_2 : \rangle$



$H_1(M_2; \mathbb{Z}) \cong \langle x, y, z : 2z = 0 \rangle$



$F = \partial M_1 = \partial M_2$

$H_1(F; \mathbb{Z}) \cong \langle m_1, m_2, l_1, l_2 : \rangle$

as abelian group  
 presentation

と表わすと. inclusion induced map  $i_j: H_1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M_j; \mathbb{Z})$

( $j=1, 2$ ) による.

$$i_1(m_1) = a_1, \quad i_1(m_2) = a_2, \quad i_1(l_1) = 0, \quad i_1(l_2) = 0,$$

$$i_2(m_1) = x, \quad i_2(m_2) = -x, \quad i_2(l_1) = y, \quad i_2(l_2) = y.$$

となります. 従って.

$$H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \langle a_1, a_2, x, y, z : 2z=0, a_1=x, a_2=-x, y=0 \rangle$$

$$\cong \langle x, z : 2z=0 \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

•  $M$  が irreducible であること.

これを示すためには  $M_1, M_2$  が共に irreducible かつ boundary-irreducible であることを示せば十分です.  $M_2$  は closed surface 上の twisted I-bundle ですから明らかに irreducible かつ  $\partial$ -irreducible,  $M_1$  は  $S^3$  から connected graph をとり除いたものから. Schönflies theorem より irreducible であることを示せます.

$M_1$  の  $\partial$ -irreducibility について.  $M_1$  に properly embedded essential disk  $D$  が存在したとして. この  $D$  で  $M_1$  を cut してやります.

$\partial D$  が  $\partial M_1$  上の essential loop であることを注意すると.

$M-D$  は 1 or 2-component である. 各 component は solid torus かつ knot exterior であることをわかります.  $M_1-D$  が 1-component ならば.

$M_1$  は  $M_1 - D$  に 1-handle をつけたもの.  $M_1 - D$  が 2-component ならば  $M_1$  はその 2 つの boundary sum ですから. いざれにせよ.  $M_1$  の基本群は  $\pi_1(M_1) \cong H_1 * H_2$  (free product),  $H_i$  は knot group. となるはずですが. とこらで.  $M_1$  は  $S^3$  から graph をとり除いたものから.  $\pi_1(M_1)$  の Alexander matrix が考えられますが [2]. 上の考察より.  $\pi_1(M_1)$  の Alexander polynomial  $\Delta(t)$  は.  $\Delta(t^{-1}) = t^\alpha \Delta(t)$  (for some  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ) という性質を持たねばならないことがわかります. しかし. 実際に  $\pi_1(M)$  を計算し. その Alexander poly. を求めると. この性質をもっていないことがわかります. (詳しくは. [3] 参照). よって  $M_1$  も  $\alpha$ -irreducible です.

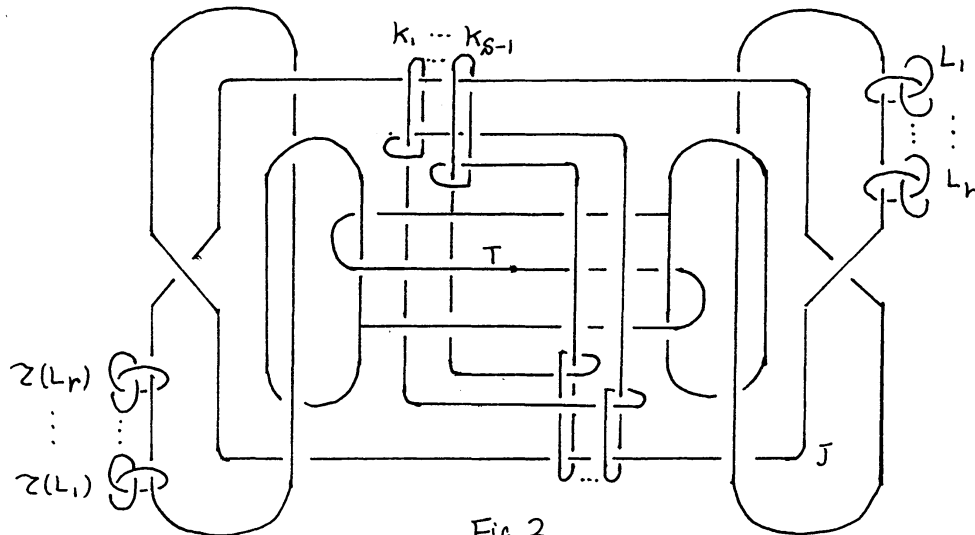
Step 2  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_S \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_r} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$   
 であるような  $M$  の構成.

Kawauchi [1] とほぼ同様の構成を行います.

$S^3$  内に Fig. 2 のように  $S+r$  個の knots と graph  $T$  を. 次の性質をもつように選びます.

- $J, K_1, \dots, K_{s-1}$  は  $\tau$ -invariant.
- $J, K_1, \dots, K_{s-1}, L_1, \dots, L_r$  は  $\tau$  の fixed points を含まない.
- $T$  は step 1 と同じ.
- $T, J, K_1, \dots, K_{s-1}, L_1, \dots, L_r, \tau(L_1), \dots, \tau(L_r)$  は mutually disjoint.

- $T, k_1, \dots, k_{s-1}, L_1, \dots, L_r$  は  $S^3 - J$  上  $\pi_1$ -nontrivial.
- $k_1, \dots, k_{s-1}, L_1, \dots, L_r, \tau(L_1), \dots, \tau(L_r)$  のどの 2 つも linking number 0.



$S^3$  からこの link と graph の  $\tau$ -invariant regular neighborhood を除き、  
 各 boundary component に次のように  $2r+s+1$  個の mfd をつけた。  
 •  $\partial N(J) \leftrightarrow \overline{S^3 - N(J')}$ .  $J'$  は  $\tau$  の fixed points を含む  $\tau$ -invariant non trivial knot.  $\partial N(J)$  の preferred longitude は  $\partial N(J')$  の meridian となるようにつける。

(  $\overline{S^3 - N(J)} \cup \overline{S^3 - N(J')}$  は  $\pi_1$ -infinite homology 3-sphere )

•  $\partial N(k_i) \ (i=1, 2, \dots, s-1) \leftrightarrow \overline{S^3 - N(J'')}$ .  $J''$  は  $\tau$  の fixed points を含まない  $\tau$ -invariant nontrivial knot.  $\partial N(k_i)$  の preferred longitude は  $\partial N(J'')$  の preferred longitude となるようにつける。

(この操作で homology の  $\mathbb{Z}$  part が生じる。)

- $\partial N(L_i) \ (i=1, \dots, r) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(L_i)}$ ,  $L_i$  は non trivial knot.  
 $\partial N(L_i)$  の preferred longitude  $\mu_i$  と  $\partial N(L_i)$  上の  $L_i$  と  $P_i$  回 link する curve となるようにつける。
- $\partial N(\tau(L_i)) \ (i=1, \dots, r) \longleftrightarrow (\text{a copy of}) \overline{S^3 - N(L_i)}$ , attaching homeo  $\mu_i$  と  $\tau$  と可換になるようにつける。

(この操作で homology の  $\mathbb{Z}_{P_i} \oplus \mathbb{Z}_{P_i}$  が生じる。)

- $\partial N(T) \longleftrightarrow$  twisted I-bundle. Step 1 の要領で。

(この操作で homology の  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  が生じる。)

$k_1, \dots, k_{s-1}, L_1, \dots, L_r$  の互いの linking number が 0 であることから、こうしてできた mfd  $M$  の first integral homology は求めるものであることがわかります。  $M$  の irreducibility は各 parts の irreducibility と  $\partial$ -irreducibility より導けます。 Fig. 2 の link は上の性質をまっ、ていればよいので、link type にはかなりの自由度があります。

### §3 Case 2 の $M$ の構成

Case 2 のアーベル群は具体的に  $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{P_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{P_r} \oplus \mathbb{Z}_{P_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{P_r}$  ( $r \geq 0, n, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{Z}$ ) の形に直和分解ができます。



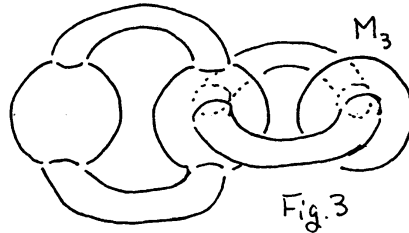
Step 1  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$  であるような  $M$  の構成。

まず, genus 2 の handle body  $M_3$  とその上の ori. rev. involution  $\tau$  について fixed point set が 3 points からなるものを考えます。

(Fig. 3 の 3 つの 3-ball に

antipodal map を考え,

それを handles に拡張する。)



$M_3$  内に 2 つの curves  $k_1, k_2$  を

Fig. 4 のように, 次の性質を

もつよう選びます。

•  $k_1$  は  $\tau$ -invariant,

fixed points を 2 点含む。

•  $k_2$  は fixed points を含まない。

•  $k_1, k_2, \tau(k_2)$  は mutually disjoint.

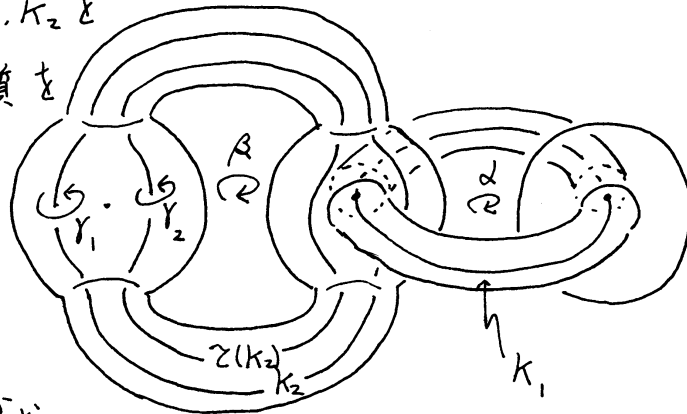


Fig. 4

•  $[k_1] = \alpha \in H_1(M_3; \mathbb{Z})$ ,  $[k_2] = \beta \in H_1(M; \mathbb{Z})$

( $\alpha, \beta$  は Fig. 4 に示した  $H_1(M; \mathbb{Z})$  の generators.)

$M_3$  から  $k_1 \cup k_2 \cup \tau(k_2)$  の  $\tau$ -invariant regular neighborhood をとり除き 3 つの mfd を次のようにつけます。

- $\partial N(k_1) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(J'')}$ .  $J''$  は ( $S^3$  の involution の) fixed points を含まない  $\mathbb{Z}$ -invariant nontrivial knot.  $\partial N(k_1)$  の preferred longitude が  $\partial N(J'')$  の meridian となるように.

(この操作で homology は変わらないが, irreducibility に必要.)

- $\partial N(k_2) \longleftrightarrow \overline{S^3 - N(L)}$ .  $L$  は nontrivial knot.  $\partial N(L)$  の preferred longitude が  $\partial N(k_2)$  上の curve  $C$  s.t.  $[C] = n\gamma_1 + \beta \in H_1(\overline{M_3 - N(k_2 \cup \mathbb{Z}(k_2))}) : \mathbb{Z}$ ) となるように.

- $\partial N(\mathbb{Z}(k_2)) \longleftrightarrow (\alpha \text{ copy of}) \overline{S^3 - N(L)}$ .  $\partial N(L)$  の preferred longitude が  $\partial N(\mathbb{Z}(k_2))$  上の curve  $C'$  s.t.  $[C'] = n\gamma_2 - \beta \in H_1(\overline{M_3 - N(k_2 \cup \mathbb{Z}(k_2))}) : \mathbb{Z}$ ) となるように.

( $\gamma_1, \gamma_2$  は  $k_2, \mathbb{Z}(k_2)$  を  $M_3$  から除いたときに生じる homology generators. Fig 4 参照.)

こうして  $\mathbb{Z}$  の mfd を  $M_4$  とすると,  $M_4$  は ori. rev. involution をもち,  $H_1(M_4; \mathbb{Z}) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 : n\gamma_1 + \beta = 0, n\gamma_2 - \beta = 0 \rangle$  となる.  $\mathbb{Z}$  である.

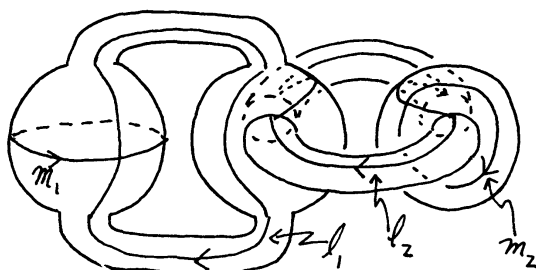
$F = \partial M_4$  は genus 2 の orientable surface  $\mathbb{Z}$  involution  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}/F$  をもち  $\mathbb{Z}$  である.  $M_5 = F \times I / (x, 1) \sim (\mathbb{Z}'(x), 1)$  とし,  $M = M_4 \cup_h M_5$ ,  $h: \partial M_5 = F \times 0 \rightarrow \partial M_4 = F$ : identity map. とすると,  $M$  は ori. rev. involution をもち closed orientable mfd になる. さらに,  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$ ,  $M$ : irreducible  $\mathbb{Z}$  あることが, 次のよう

に確かめられます。

•  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}$   
 $M_5, F$  の first homology を



$$F \times \{1\} / \sim \subset M_5$$



$$F = \partial M_4 = \partial M_5$$

$$H_1(M_5; \mathbb{Z}) \cong \langle x, y, z : 2x + 2y + 2z = 0 \rangle \quad H_1(F; \mathbb{Z}) \cong \langle m_1, m_2, l_1, l_2 : \rangle.$$

と表す  $i$  inclusion induced map  $i_j: H_1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M_j; \mathbb{Z})$  ( $j=4,5$ ) に下す。

$$i_1(m_1) = \gamma_1 + \gamma_2, \quad i_1(m_2) = 0, \quad i_1(l_1) = \beta, \quad i_1(l_2) = \alpha.$$

$$i_2(m_1) = 2x, \quad i_2(m_2) = 2z, \quad i_2(l_1) = x + y + 2z, \quad i_2(l_2) = 2x + y + z.$$

となります。従って

$$H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, x, y, z : \rangle$$

$$n\gamma_1 + \beta = 0, \quad n\gamma_2 - \beta = 0, \quad 2x + 2y + 2z = 0,$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2x, \quad 2z = 0, \quad \beta = x + y + 2z, \quad \alpha = 2x + y + z \quad \rangle$$

$$\cong \langle \gamma_2, x, z : 2n\gamma_2 = 0, 2nx = 0, 2z = 0 \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}.$$

•  $M$  が irreducible であること。

§1 と同様、 $M$  の各 part の irreducibility と  $\partial$ -irreducibility を示せ

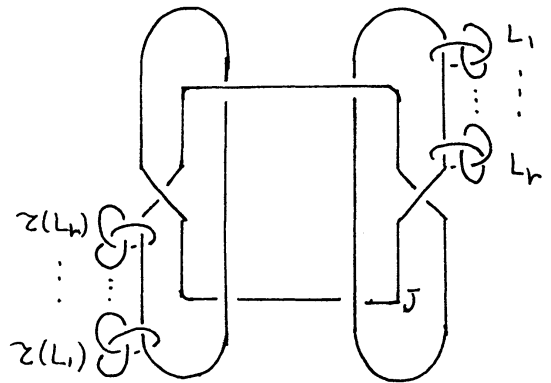
はよいのですが, non trivial knot exterior はその性質をまっしていきすから, 問題となるのは  $\overline{M_3 - N(k_1 \cup k_2 \cup \Sigma(k_2))}$  についてのみです. まず,  $M_3$  (handlebody) が irreducible であることから, もしこの mfd 内に essential 2-sphere があるとすればその内部に,  $k_1, k_2$  または  $\Sigma(k_2)$  が含まれることになり, curves の選び方に矛盾, よって irreducible.  $\exists$ -irreducibility についても, もし essential disk が存在したとすると, 同様にして矛盾が導けます.

(詳しくは [3] 参照.)

Step 2.  $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{P_r} \oplus \mathbb{Z}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{P_r}$  であるような  $M$  の構成.

まず  $\mathbb{Z}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{P_r} \oplus \mathbb{Z}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{P_r}$  のための mfd を用意します.

§1. Step 2 の  $J, L_1, \dots, L_r$  を考え  
 $L_1, \dots, L_r, \Sigma(L_1), \dots, \Sigma(L_r)$  に  
 §1. Step 2 と同様の操作を  
 することによって, これが得られます.



Step 1. で作った mfd では,

$M \supset M'_3 \supset \partial N(k_1)$  に non trivial knot exterior  $S^3 - N(J'')$  をつけまし

たが、そのかわりに上で作った  $mfid$  を  $\mathcal{M}(k_i)$  の preferred longitude が  $\mathcal{M}(J)$  の meridian になるようにつければ、できた  $mfid M$  は求める homology をもち、irreducible であって、ori. rev. involution をもつことがわかります。

最後に、

本稿で構成した  $mfids$  の fixed point set のうち 2-dimensional component は、いずれも genus 3 の non orientable surface になっていますが、ほぼ同様の構成法によって、surface の genus や component 数を増やすことができます。ただし、その genus 数の総和には、 $M$  の first integral homology group の影響による制限があるようです。

尚、本稿の問題は河内先生にいたたいたものです。多くの助言をいただいた作間先生、中西先生に感謝いたします。

### References

- [1] A. Kawachi, On 3-manifolds admitting orientation-reversing involutions, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 571-589.
- [2] S. Suzuki, Alexander ideals of graphs in the 3-sphere, Tokyo J. Math 7 (1984), 233-247.
- [3] M. Kitamura, A construction of certain 3-manifolds with orientation reversing involution, preprint.