数理解析研究所講究録
625巻 1987年 216-225

多次元プロセッサ配列上の並列ソートと時間計算量

嵯峨幸治 Koji SAGA　佐渡一広 Kazuhiro SADO　五十嵐善英 Yoshihide IGARASHI

群馬大学工学部情報工学科

1. はじめに

近年集積回路技術の進歩により，多重プロセッサ上で効率良く実行できる並列アルゴリズムの研究が盛んである．特に並列ソーティングアルゴリズムは，実用的に重要であるばかりでなく理論的にも大変興味ある問題であるため，様々な研究が行われている．Ajtaiら[1]は，n個の要素を$O(\log n)$時間でソートする並列アルゴリズムを提案しているが，構造が複雑で実現は困難である．ThompsonとKung[14]が提案した網状結合プロセッサ配列(mesh-connected processor array)は，VLSI向きモデルとして注目されている．このモデル上での効率の良い並列ソーティングアルゴリズムと計算時間に関する研究が，文献[4～12]に発表されている．本論文では，3次元配列モデルで実現する並列ソーティングアルゴリズムの設計と効率評価を行う．本アルゴリズムは，要素が完全にソートされた8つの配列のマージを再帰的に行う．n^3個の要素を$15n + \log_2 n - 25$単位時間でソートでき，同じモデル上で$19n - 19$単位時間で実現するSchimmlerのアルゴリズム[11]より効率が良い．また，Kunde[4]は漸近的に$10.5n + O(n^{2/3}\log_2 n)$単位時間でソートできるアルゴリズムを提案しているが，実用的な大きさのnに対しては，Schimmlerのアルゴリズムと同程度の速さである．更にKundeは，3次元配列モデルでn^3個の要素をソートするいかなる並列ソーティングアルゴリズムも，少なくとも5nステップかかることを導いているが，我々は並列マージソートおよび並列擬似マージソートを用いたクラスの計算時間の下限値を導く．これらは$7.25n - 4\log_2 n - 8$単位時間，$5.25n - \log_2 n - 6$単位時間である．

2. 3次元配列上のソーティングアルゴリズム

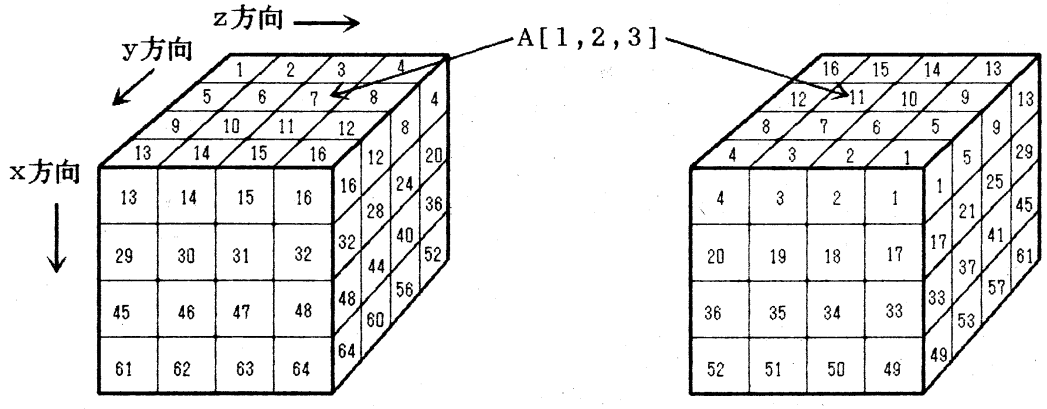
プロセッサ配列A[1..N]を考える．各プロセッサA[i] ($1 \le i \le N$)には，あらかじめデータが入っているとする．手続きBUBBLE(A[i..j], k)は，配列A[i..j]に対し，要素をk回非減少順の並列バブルを行う．手続きBUBBLEの2～8行目の計算時間を単位比較置換時間t_cとする．よって，手続きBUBBLE(A[i..j], k)の計算時間は，kt_cである．また，配列A[i..j]の要素をk回非増加順の並列バブルを行う手続きを$\overline{\text{BUBBLE}}$(A[i..j], k)とする．これは，手続きBUBBLEの4行目と7行目の不等号の向きを逆にすればよい．

シャフルとは，数列$a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$を数列$a_1, a_{n+1}, a_2, a_{n+2}, \cdots, a_n, a_{2n}$に置換する操作であり，手続きSHUFFLEで示す．手続きSHUFFLEの2～6行目の計算時間を単位単純置換時間t_eとする．よって，(j-i+1)個の要素を手続きSHUFFLE(A[i..j])によりシャフルする計算時間は，$\lfloor (j-i)/2 \rfloor t_e$である．

```
      procedure BUBBLE(A[i..j], k);
      begin
1.      for s:=1 to k do
2.        if odd(s) then
3.          for all t:=⌈(i+1)/2⌉..⌊j/2⌋ do in parallel
4.            if A[2t-1] > A[2t] then
5.              exchange A[2t-1], A[2t]
          else
6.          for all t:=⌈i/2⌉..⌊(j-1)/2⌋ do in parallel
7.            if A[2t] > A[2t+1] then
8.              exchange A[2t], A[2t+1]
      end

      procedure SHUFFLE(A[i..j]);
      begin
1.      for s:=1 to ⌊(j-i)/2⌋ do
2.        if odd(s) then
3.          for all t:= -⌊s/2⌋..⌊s/2⌋ do in parallel
4.              exchange A[i+⌊(j-i)/2⌋+2t], A[i+⌊(j-i)/2⌋+2t+1]
          else
5.          for all t:= -(s/2)+1..s/2 do in parallel
6.              exchange A[i+⌊(j-i)/2⌋+2t-1], A[i+⌊(j-i)/2⌋+2t]
      end
```

n×n×n の網状結合プロセッサ配列 A[1..n, 1..n, 1..n] は，各プロセッサが隣接するプロセッサのみに接続し，プロセッサは各々を区別するために一定の番号が付けられている．n^3 個の非減少順にソートされた系列を A[1,1,1], A[1,1,2], …, A[n,n,n] の順に並べる面優先－行優先順 (plane-major row-major order) や A[1,n,n], A[1,n,n-1], …, A[n,n,n] の順に並べる面優先－逆行優先順 (plane-major reverse row-major order) がその代表である (図１参照)．本論文では，A[1..n, 1..n, 1..n] の第 j 行第 k 列の系列を A[1..n, j, k] と書き，この系列を x 方向の系列と呼ぶ．同様に，第 i 平面第 j 行の系列や第 i 平面第 k 列の系列を各々A[i, j, 1..n], A[i, 1..n, k] と書き，各々 y 方向の系列，z 方向の系列と



(a) Plane-major row-major indexing

(b) Plane-major reverse row-major indexing

Fig. 1 Processor indexing schemes.

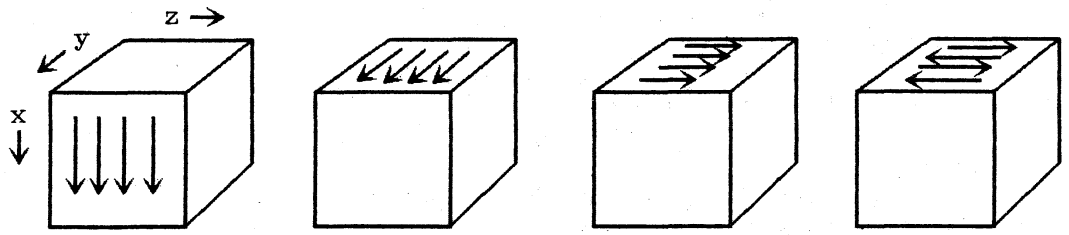


Fig.2 BUBBLE operations

呼ぶ．また，プロセッサ A[i,j,k] ($p_1 \le i \le p_2$, $q_1 \le j \le q_2$, $r_1 \le k \le r_2$) から構成される配列を $A[p_1 .. p_2, q_1 .. q_2, r_1 .. r_2]$ と書く．

手続き ZSHUFFLE($A[p_1 .. p_2, q_1 .. q_2, r_1 .. r_2]$) の1～3行目は，系列 $A[i, j, r_1 .. r_2]$ での並列シャフルを行っている．4～6行目は，$A[p_1+2i-1, j, r_1+2k-2]$ と $A[p_1+2i-1, j, r_1+2k-1]$ $(1 \le i \le (p_2-p_1+1)/2, q_1 \le j \le q_2, 1 \le k \le (r_2-r_1+1)/2)$ の要素を単純置換する．手続き YSHUFFLE($A[p_1 .. p_2, q_1 .. q_2, r_1 .. r_2]$) は，系列 $A[i, q_1 .. q_2, k]$ について同様の操作を行う．

手続き XBUBBLE は，系列 $A[p_1..p_2, j, k]$ を x 方向に s 回非減少順の並列バブルを行う（図2(a) 参照）．同様に，系列 $A[i, q_1..q_2, k]$ を y 方向に非減少順に並列バブルを行う手続きを YBUBBLE（図2(b) 参照），非増加順に並列バブルを行う手続きを $\overline{\text{YBUBBLE}}$ とする．また，系列 $A[i, j, r_1 .. r_2]$ を z 方向に非減少順に並列バブルを行う手続きを ZBUBBLE（図2(c) 参照），非増加順に並列バブルを行う手続きを $\overline{\text{ZBUBBLE}}$ とする．手続き ATBUBBLE は，系列 $A[i, j, r_1..r_2]$ を z 方向に，j が奇数のときは非減少順に，偶数のときは非増加順に s 回の並列バブルを行う（図2(d) 参照）．手続き PLANEBUBBLE は，sign = 0 のとき，系列 $A[i, q_1..q_2, r_1..r_2]$ を y 方向に非減少順に s_j 回，さらに z 方向に非減少順に s_k 回の並列バブルを行う．sign = 1 のときは，各々の方向で非増加順に並列バブルを行う．

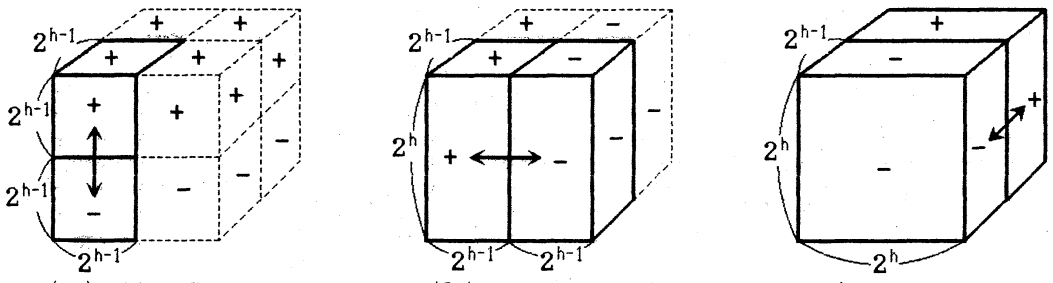
```
    procedure ZSHUFFLE(A[p1 .. p2, q1 .. q2, r1 .. r2]);
    begin
1.    for all i := p1 .. p2 do in parallel
2.      for all j := q1 .. q2 do in parallel
3.        SHUFFLE(A[i, j, r1 .. r2])
4.    for all j := q1 .. q2 do in parallel
5.      for all i:=1..(p2-p1+1)/2 and k:=1..(r2-r1+1)/2 do in parallel
6.        exchange  A[p1+2i-1, j, r1+2k-2], A[p1+2i-1, j, r1+2k-1];
    end

    procedure XBUBBLE(A[p1 .. p2, q1 .. q2, r1 .. r2], s);
    begin
1.    for all j := q1 .. q2 do in parallel
2.      for all k := r1 .. r2 do in parallel
3.        BUBBLE(A[pi .. p2, j, k], s)
    end
```

```
    procedure ATBUBBLE(A[p1..p2, q1..q2, r1..r2], s);
    begin
1.    for all i := p1..p2 do in parallel
2.      for all j := q1..q2 do in parallel
3.        if odd(j) then
4.          BUBBLE(A[i, j, r1..r2], s)
          else
5.          BUBBLE(A[i, j, r1..r2], s)
    end

    procedure PLANEBUBBLE(A[p1..p2, q1..q2, r1..r2], sj, sk, sign);
    begin
1.    if sign = 0 then begin
2.      YBUBBLE(A[p1..p2, q1..q2, r1..r2], sj);
3.      ZBUBBLE(A[p1..p2, q1..q2, r1..r2], sk)
      end
      else begin
4.      YBUBBLE(A[p1..p2, q1..q2, r1..r2], sj);
5.      ZBUBBLE(A[p1..p2, q1..q2, r1..r2], sk)
      end
    end
```

2x2x2プロセッサ配列上で8個の要素をソートする手続きEIGHTSORTは，sign = 0のとき要素を面優先－行優先順に，sign = 1のとき面優先－逆行優先順にソートする．手続きAUMERGEは，面優先－行優先順と面優先－逆行優先順にソートされている大きさの等しい上下に向かい合う2つの配列をマージし，すべての要素を面優先－行優先順（面優先－逆行優先順）にソートする．同様に手続きLRMERGEは，左右に向かい合う2つの配列を，手続きFRMERGEは前後に向かい合う2つの配列をマージする．手続きCMERGEは，上記の3つの手続きを組み合わせて面優先－行優先順と面優先－逆行優先順にソートされている各々4つの配列をマージし，すべての要素を面優先－行優先順（面優先－逆行優先順）にソートする．手続きCMERGEの1，2行目で隣接する上下の配列のマージを（図3(a)参照），3，4行目で隣接する左右の配列のマージを（図3(b)参照），5行目で隣接する前後の配列のマージを行う（図3(c)参照）．以上の手続きを組合わせて配列$A[1..2^h, 1..2^h, 1..2^h]$の要素をソートする手続きCUBESORTができる．



(a) AUMERGE　(b) LRMERGE　(c) FRMERGE

+ : sorted plane-major row-major order
- : sorted plane-major reverse row-major order

Fig.3 A merging process by CMERGE

```
     procedure EIGHTSORT(A[p..p+1, q..q+1, r..r+1], sign);
     begin    /*  p, q and r are odd  */
1.     ATBUBBLE(A[p..p+1, q..q+1, r..r+1], 1);
2.     for all i := 0 .. 1 do in parallel
          PLANEBUBBLE(A[p+i, q..q+1, r..r+1], 1, 1, i)
3.     XBUBBLE(A[p..p+1, q..q+1, r..r+1], 1)
4.     PLANEBUBBLE(A[p..p+1, q..q+1, r..r+1], 1, 1, sign)
     end

     procedure AUMERGE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+t-1],sign);
     begin
1.     XBUBBLE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+t-1], 2t);
2.     PLANEBUBBLE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+t-1], t, t, sign)
     end

     procedure LRMERGE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+2t-1], sign);
     begin
1.     ZSHUFFLE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+2t-1]);
2.     XBUBBLE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+2t-1], t);
3.     ATBUBBLE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+2t-1], 1);
4.     PLANEBUBBLE(A[p..p+2t-1, q..q+t-1, r..r+2t-1], t, 2t, sign)
     end

     procedure FRMERGE(A[p..p+2t-1, q..q+2t-1, r..r+2t-1], sign);
     begin
1.     YSHUFFLE(A[p..p+2t-1, q..q+2t-1, r..r+2t-1]);
2.     XBUBBLE(A[p..p+2t-1, q..q+2t-1, r..r+2t-1], t);
3.     PLANEBUBBLE(A[p..p+2t-1, q..q+2t-1, r..r+2t-1], 2t, 2t, sign)
     end

     procedure CMERGE(A[p..p+2^h-1, q..q+2^h-1, r..r+2^h-1], sign)
     begin
1.     for all j := 0..1 and k := 0..1 do in parallel
2.       AUMEGRE(A[p..p+2^h-1, q+j·2^(h-1)..q+(j+1)·2^(h-1)-1,
                                 r+k·2^(h-1)..r+(k+1)·2^(h-1)-1], k);
3.     for all j := 0..1 do in parallel
4.       LRMERGE(A[p..p+2^h-1, q+j·2^(h-1)..q+(j+1)·2^(h-1)-1, r..r+2^h-1], j);
5.     FRMERGE(A[p..p+2^h-1, q..q+2^h-1, r..r+2^h-1], sign)
     end

   procedure CUBESORT(A[1..2^h, 1..2^h, 1..2^h], 0);
   begin
1.     if h = 0 then  (*  skip  *)
2.     else if h = 1 then  EIGHTSORT(A[p..p+1, q..q+1, r..r+1], sign);
       else begin
3.       for all i, j, k = 0..1 do in parallel
4.         CUBESORT(A[p+i·2^(h-1)..p+(i+1)·2^(h-1)-1, q+j·2^(h-1)..q+(j+1)·2^(h-1)-1,
                                          r+k·2^(h-1)..r+(k+1)·2^(h-1)-1], i);
5.       CMERGE(A[p..p+2^h-1, q..q+2^h-1, r..r+2^h-1], sign);
       end;
   end
```

3. アルゴリズムの正当性と計算量

正当性の証明は，0-1 原理 (zero-one princple)[3] を用いて行い，要素は 0 と 1 のみから構成されているとする．

定理 3.1　すでにソートされている 2 つの系列 $a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}$ と $a_2, a_4, \cdots, a_n$ に対し，並列バブルを用いて系列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{n-1}, a_n$ をソートするのに必要な比較交換時間は，高々 n/2 である[2]．

定理 3.2　2^d 個の要素の 2×2×…×2 網状結合プロセッサ配列上でのソートは，並列双単調ソート法 (bitonic sort) により，d(d+1)/2 回の比較置換時間でできる[13]．

補題 3.1　要素が面優先－行優先順と面優先－逆行優先順にソートされている大きさの等しい上下に向かい合う 2 つの配列 A[p..p+k-1, q..q+k-1, r..r+k-1] と A[p+k..p+2k-1, q..q+k-1, r..r+k-1] の要素は，手続き AUMERGE により面優先－行優先順 (面優先－逆行優先順) にソートできる (k≥2 の偶数)．

証明　上部および下部配列は，各々第 a 面および第 b 面の要素のみ 0 と 1 が混在し，それより上の面の要素はすべて 0 であり，下の面の要素は 1 である．1 行目の手続き XBUBBLE を実行すると，配列 A の第 a+b 面の要素のみ 0 と 1 が混在するので，以下この面についてソートすることを考える (図 4(a) 参照)．2 行目の PLANEBUBBLE により各列を非減少順にソートした後 (図 4(b) 参照)，各行を非減少順にソートすると (図 4(c) 参照)，第 a+b 面の要素は非減少順にソートされる．よって，配列 A のすべての要素は面優先－行優先順にソートされる．また，配列 A の要素を面優先－逆行優先順にソートするには，2 行目の文で各列を非増加順にソートし，各行を非増加順にソートすればよい．　□

補題 3.2　面優先－行優先順と面優先－逆行優先順にソートされている大きさの等しい左右に向かい合う 2 つの配列 A[p..p+2k-1, q..q+k-1, r..r+k-1] と A[p..p+2k-1, q..q+k-1, r+k..r+2k-1] の要素は，手続き LRMERGE により，面優先－行優先順 (面優先－逆行優先順) にソートできる (k≥2 の偶数)．

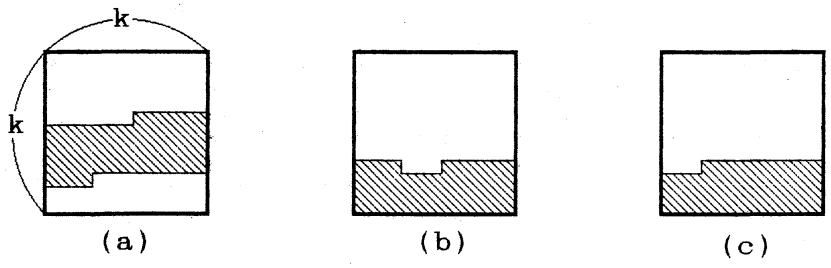


Fig.4　A process by AUMERGE for merging 2k×k×k subarrays (from above)

証明　左部および右部配列は，各々第a面および第b面の要素のみ0と1が混在している．このとき，配列Aを上から見た所を図5(a)に示す．1行目のZSHUFFLE実行後，x方向の系列を非減少順にソートするには，定理3.1よりk回の並列バブルを行えばよい(図5(b)参照)．よって，XBUBBLE実行後，補題3.1の証明と同様に第a+b面について考える．3行目のATBUBBLE実行後，y方向の任意の2列の0の数の差は高々1となる(図5(c)参照)．以後補題3.1と同様に証明できる．□

補題 3.3　面優先－行優先順と面優先－逆行優先順にソートされている大きさの等しい前後に向かい合う2つの配列A[p..p+2k-1, q..q+k-1, r..r+2k-1]とA[p..p+2k-1, q+k..q+2k-1, r..r+2k-1]の要素は，手続きFRMERGEにより，面優先－行優先順(面優先－逆行優先順)にソートできる(k≥2の偶数)．

証明　補題3.2と同様に証明できる．□

補題3.1，補題3.2，補題3.3より次の定理が導ける．

定理 3.3　手続きCUBESORT(A[1..n, 1..n, 1..n], 0)は，n^3個の要素を面優先－行優先順にソートする(nは2の巾乗)．

定理 3.4　手続きCUBESORT(A[1..n, 1..n, 1..n], 0)の計算時間は，$(2n-4)t_e + (13n + \log_2 n - 21)t_c$である．

証明　T(2k)を，配列の要素が面優先－行優先順と面優先－逆行優先順にソートされた大きさk×k×kの各々4つの配列をマージし，大きさ2k×2k×2kの要素がソートされた配列を得るための計算時間とする．定理3.2よりT(2)=6である．k>2のときは，CMERGEの計算時間から，$T(2k) = 2kt_e + (13k+1)t_c$となる．従って，n≥2に対するCUBESORTの計算時間は，

$$T(n) = \sum_{i=2}^{\log_2 n} (2\cdot 2^{i-1}t_e + (13\cdot 2^{i-1}+1)t_c) + T(2)$$
$$= (2n-4)t_e + (13n + \log_2 n - 21)t_c$$ □

上記の定理よりただちに次の系が導ける．

系 3.1　$t_e \approx t_c$としてこれらの単位計算時間をステップとすると，手続きCUBESORT(A[1..n, 1..n, 1..n])の計算時間は，$15n + \log_2 n - 25$ステップである．

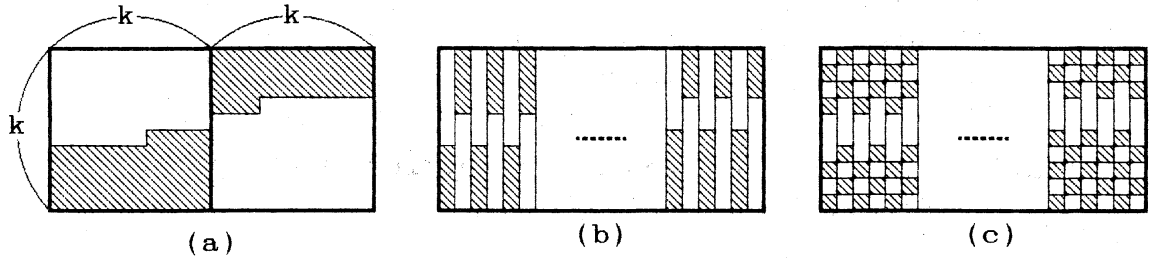


Fig.5　A process by LRMERGE for 2k×k×2k (from above)

4. 3次元以上の網状配列における時間計算量の下限

d次元網状結合プロセッサ配列モデルにおいて，並列マージ法および並列擬似マージ法を用いてn^d個の要素をソートする計算時間の下限値を導く．面優先－行優先順序をd次元に拡張した順序を辞書式順という．以下，この順序にソートすることを単にソートするという．

定義 4.1　すべての$p \le i_1 < i_2 \le q$, $r \le j_1, j_2 \le s$, $t \le k_1, k_2 \le u$に対し，$A[i_1, j_1, k_1] \le A[i_2, j_2, k_2]$であるとき，配列$A[p..q, r..s, t..u]$は荒くソートされているという．

繰返しマージソートと繰返し擬似マージソートの概要は(1)と(2)である．

(1) **for** i := 1 .. r **do**
　　ソートした8つの$2^{i-1}\times 2^{i-1}\times 2^{i-1}$配列をマージしソートした$2^i\times 2^i\times 2^i$配列を作る．
(2) **for** i := 1 .. r **do**
　　荒くソートした8つの配列をマージして荒くソートした配列を作る;
　　for i := 1 .. 2^r **do in parallel**
　　第i平面にある要素を行優先にソートする．

(2)のアルゴリズムの最初の**for**文の部分を繰返し擬似マージと呼ぶ．本アルゴリズムやSchimmlerのアルゴリズムは，繰返しマージソートに属する．

次の補題は容易に導ける．

補題 4.1　2×2×2網状プロセッサ配列において，単純置換と比較置換のみを基本命令として8個の要素をソートするには，少なくとも4ステップ必要である．

補題 4.2　4×4×4網状プロセッサ配列において，繰返しマージソートによりソートするには，少なくとも13ステップかかる場合がある．

証明　以下に示す配列A[1..4, 1..4, 1..4]の初期状態を考える:
　　配列A[3..4, 3..4, 3..4]のp個の要素は，他のどの7つの2×2×2配列の要素よりも小さく，配列A[3..4, 3..4, 3..4]の8−p個の要素は，他のどの7つの2×2×2配列よりも大きい$(0 \le p \le 8)$.

補題4.1から，配列2×2×2の要素をソートするには4ステップ以上かかる．8つの2×2×2配列をマージする過程で，初めに配列A[3..4, 3..4, 3..4]にあったどの要素も，5ステップ以下ではA[1,1,1]に到達できない．また，5ステップ後にA[1,1,1]にある要素の最終位置は，pの値により第1面1行目以外の最右端となる場合がある．従って，このマージ過程で少なくとも9ステップかかる．よって，少なくとも13ステップ必要である．　□

定理 4.1　n×n×n網状プロセッサ配列において，いかなる繰返し並列マージ法でも，$n^3 (n \ge 4)$個の要素をソートするには，少なくとも$7.25n - 4\log_2 n - 8$ステップ必要である．

<u>証明</u>　n=4のとき，補題4.1より明らか．T(m)を大きさm×m×m網状プロセッサ配列において，いかなる繰返しマージソートでもm^3個の要素をソートするのに必要な計算時間とする．大きさ2k×2k×2k配列A[1..2k, 1..2k, 1..2k] (k≥4)を考える．すべての配列k×k×kのすべての要素は，すでに独立に繰返しマージソートによりソートされているとする．ここで，この8つの配列k×k×kを配列2k×2k×2kにマージする過程を考える．各々の配列は独立にソートされているから，次のような場合を考える:

配列A[k+1..2k, k+1..2k, k+1..2k]のp ($0\le p<4k^2$)個の要素は，他の7つの配列のどの要素よりも大きく，それ以外の要素は他の配列の要素よりも小さい．

このマージ過程で，初めに配列A[k+1..2k, k+1..2k, k+1..2k]にあったどの要素も，3k-1ステップ以下ではA[1,1,1]に到達できない．また，3k-1ステップ後にA[1,1,1]にある要素は，pの値によりA[q,2k,2k] (k/4≤q≤2k)に移動する場合がある．よって，その要素は，さらに少なくとも4.25k-3ステップ移動しなければならない．したがって，次の再帰式が導ける．

$T(2k) \ge T(k) + 7.25k - 4$　　(k≥4)

$T(4) \ge 13$　　(補題4.1より)

これを解くと，

$T(n) \ge 7.25n - 4\log_2 n - 8.$　　□

次の2つの補題4.1と補題4.2は同様の方法で導ける．

<u>補題 4.3</u>　2×2×2網状プロセッサ配列において，単純置換と比較置換のみを基本命令として8個の要素を荒くソートするには，少なくとも3ステップ必要である．

<u>補題 4.4</u>　4×4×4網状プロセッサ配列において，いかなる繰返し擬似マージでも要素を荒くソートするには，少なくとも8ステップかかる場合がある．

よって，次の2つの定理が導ける．

<u>定理 4.2</u>　4×4×4網状プロセッサ配列において，いかなる擬似マージソートでも要素をソートするには，少なくとも12ステップ必要である．

<u>定理 4.3</u>　n×n×n網状プロセッサ配列(n≥8)において，いかなる繰返し並列擬似マージ法でもn^3個の要素をソートするには，少なくとも$5.25n-\log_2 n-6$ステップ必要である．

定理4.1と定理4.3を多次元配列に拡張すると，次の2つの定理が得られる．

<u>定理 4.4</u>　d次元網状プロセッサ配列で，n^d個 ($n \ge 2^d$)の要素をソートするいかなる繰返し並列マージソートでも，少なくとも$(3d+2^{-d+1}-2)n-(d+1)\log_2 n-2^{d-1}(3d-2)+d^2-2+T(2^{d-1})$ステップ必要である．ここで$T(2^{d-1})$は，$(2^{d-1})^d$個の要素を繰返しマージによりソートするのに必要な計算時間である．

定理 4.5　d 次元網状プロセッサ配列で，n^d 個 $(n \geq 2^d)$ の要素をソートするいかなる繰返し擬似マージソートでも，少なくとも $(2d+2^{-d+1})n - \log_2 n - 2^{d-1}d - 2 + T(2^{d-1})$ ステップ必要である．ここで $T(2^{d-1})$ は，$(2^{d-1})^d$ 個の要素を繰返し擬似マージにより荒くソートするのに必要な計算時間である．

5. むすび

3次元網状結合プロセッサ配列モデルで実現する並列ソーティングアルゴリズムの設計を行った．本アルゴリズムで用いる命令は，隣合う要素の単純置換と比較置換のみであるため大変局所的で，命令系列が規則的であるためVLSI向きのアルゴリズムであると考えられる．また，3次元以上の網状結合プロセッサ配列モデル上で，並列マージソート法や並列擬似マージソート法の計算時間の下限値を導いた．これは，将来，多次元に接続されたプロセッサモデルの実現性を考える上で大変興味深い問題であるが，残念ながら我々が導いた下限値と設計したアルゴリズムの計算量との間には差がある．

References

1. Ajtai, M., et. al.: "An O(N log N) sorting network", Proc. 15 ACM Symp. on Theory of Computing, pp. 1-9 (1983).
2. Batcher, K.E.: "Sorting networks and their applications", Proceedings of AFIPS Spring Joint Computer Conf., 32, pp. 307-314 (1968).
3. Knuth, D.E.: "The art of computer programming: Vol. 3 Sorting and searching", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1973).
4. Kunde, M.: "Lower bounds for sorting on mesh-connected architectures", VLSI Algorithms and Architectures, Lect. Notes in Comp. Sci., 227, pp. 84-95 (1986).
5. Lang, H.-W., el. al.: "Systolic sorting on a mesh-connected network", IEEE Trans. Comput., C-34, pp. 652-658 (1985).
6. Sado, K. and Igarashi, Y.: "A divide-and-conquer method of the parallel sort", IECEJ Technical Report, AL84-68 (Feb. 1985).
7. Sado, K. and Igarashi, Y.: "A fast parallel pseudo-merge sort algorithm", IECEJ Technical Report, AL85-16 (June 1985).
8. Sado, K. and Igarashi, Y.: "Some parallel sorts on a mesh-connected processor array", J. Parallel and Distributed Computing, Vol. 3, No. 3, pp. 398-410 (1986).
9. Saga, K., et. al.: "An Iterative parallel pseudo-merge sort and its computing time", IECEJ Technical Report COMP86-26 (July 1986).
10. Saga, K., et. al.: "Parallel Pseudo-merge sorting on a mesh-connected processor array", Trans. of IECEJ, E69, pp. 1104-1113 (1986).
11. Schimmler, M.: "Sorting on a three dimensional cube grid", Technical Report 8604, Christian Albrechts Universität, Kiel (1986).
12. Schnorr, C.P. and Shamir, A.: "An optimal sorting algorithm for mesh-connected computers", Proc. 18 ACM Symp. on Theory of Computing, pp. 255-263 (1985).
13. Siegel, H.J.: "The universality of various types of SIMD machine interconnection networks", Proc. 4 ACM Symp. on Computer Architecture, pp. 23-25 (1977).
14. Thompson, C.D. and Kung, H.T.: "Sorting on a mesh-connected parallel computer", Commun., ACM, 20, pp. 263-271 (1977).