数理解析研究所講究録
626巻 1987年 157-183

極小曲面のガウス写像の除外値の個数について

金沢大理　藤本坦孝 (Hirotaka Fujimoto)

§1　序

$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面 M に対し，M の Gauss 写像とは，定義により，M の各点 p に，M の p での単位法線ベクトル $G(p)$ を対応させる写像 $G: M \to S^2$ である．M を自然に Riemann 面とみなすとき，G と立体射影 $\pi: S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $(= P^1(\mathbb{C}))$ との合成の共役 $g = \overline{\pi \cdot G}$ は，M 上の有理型関数となる．便宜上，以下では，g を M の Gauss 写像と呼ぶことにする．

1961年，R. Ossermann が，非平坦完備極小曲面の Gauss 写像 g は，対数容量正の集合を除外し得ないことを示した（[10]）．その後，F. Xavier は，この様な写像 g の除外値は高々 6個であることを証明した（[14]）．また，最近筆者は，この様な写像 g の除外値の個数は，高々 4 であることを証明することができた（[8]）．Gauss 写像が丁度 4個の値を除外する $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面の例は，古くから知られている（[11]，[12]）．従って，除外値の個数 4 は，これ以下に下げ

られない。筆者はまた、Gauss 写像が5個以上の値を除外する極小曲面について、Gauss 曲率に対する一つの評価式を与えた（[8]）。ここでは、有理型関数の値分布論における defect と類似の性質をもつ、新しい型の modified defect を定義し、modified defect relation を与えて、上述の結果の精密化を導く。

次節で、三種類の modified defect の定義を与え、それ等の間の関係や基本的性質を述べ、§3 で主結果を説明し、§4 以降で、それらの証明を与える。

§2　Modified defect の定義とその基本的性質

開 Riemann 面 M、及び非定数正則写像 $f: M \to P^1(\mathbb{C})$ を考える。共通零点をもたぬ M 上の正則関数 f_0, f_1 を取り $f = (f_0 : f_1)$ と表示する。以下、この様な f の表示を、f の既約表示と呼ぶ。各点 $\alpha \in P^1(\mathbb{C})$ に対し、$|a^0|^2 + |a^1|^2 = 1$ をみたす a^0, a^1 を取り、$\alpha = (a^0 : a^1)$ と表示し、$F_\alpha := a^1 f_0 - a^0 f_1$ とおく。また、$\|f\| = (|f_0|^2 + |f_1|^2)^{1/2}$ とおく。

定義 2.1. 写像 f に対する値 α の S-defect を、

$$\delta_f^S(\alpha) := 1 - \inf\{\eta;\ \eta \text{ は条件 } (*)_S \text{ をみたす非負実数}\}$$

によって定義する。ここで、条件 $(*)_S$ とは、$[-\infty, \infty)$ に値をもつ M 上の劣調和連続関数 $u\ (\not\equiv -\infty)$ で条件

(D1) $e^u \leqq \|F\|^\eta$.

(D2) 各点 $\zeta \in f^{-1}(\alpha)$ に対し

$$\lim_{z\to\zeta}(u(z)-\log|z-\zeta|)\in[-\infty,\infty)$$

が存在する。ここで z は ζ の近傍での正則局所座標を表す。

をみたす様なものが取れることを意味する。

注意. S-defect は、論文 [6], [7] で non-integrated defect と呼んだものと一致する。

定義 2.2. f に対する α の H-defect を

$$\delta_f^H(\alpha):=1-\inf\{\eta\,;\,\eta \text{ は条件 } (*)_H \text{ をみたす非負実数}\}$$

によって定義する。ここで、条件 $(*)_H$ とは、M 上の $[-\infty,\infty)$ に値をもつ連続関数 u で、条件 (D1), (D2) をみたし、$f^{-1}(\alpha)$ 以外で調和なものが存在することを意味する。

定義 2.3. f に対する α の O-defect を次で定義する。

$$\delta_f^O(\alpha):=1-\inf\{\tfrac{1}{m}\,;\,F_\alpha \text{ が } <m \text{ 位の零点をもたない}\}.$$

容易にわかる様に、S-defect, H-defect, O-defect いずれも、f の既約表示や、α の表示の仕方によらない。

明らかに、$(*)_H$ をみたす η は $(*)_S$ もみたす。また、F_α が m より小さい位数の零点をもたぬとき、$\eta=1/m$ は $(*)_H$ をみたす。実際、関数 $u=(1/m)\log|F_\alpha|$ を取れば、$M\setminus f^{-1}(\alpha)$ 上調和であり、条件 (D1), (D2) をみたす。従って、

(2.4) $\quad 0\leqq \delta_f^O(\alpha)\leqq\delta_f^H(\alpha)\leqq\delta_f^S(\alpha)\leqq 1.$

これらは、Nevanlinna defect と似た次の性質をもつ。

命題 2.5. (i) 丁度 $f^{-1}(\alpha)$ 上で零である様な有界正則関数 g が存在するとき、$\delta_f^H(\alpha) = \delta_f^S(\alpha) = 1$.

(ii) F_α が m より低い位数の零点をもたないとき、

$$\delta_f^S(\alpha) \geq \delta_f^H(\alpha) \geq \delta_f^O(\alpha) \geq 1 - \frac{1}{m}.$$

特に、$f^{-1}(\alpha) = \phi$ のとき、$\delta_f^O(\alpha) = 1$.

証明. (ii)は O-defect の定義から明らかである. (i)は、関数 $u = \log(|g| / \sup_{z \in M} |g(z)|)$ が、$M \setminus f^{-1}(\alpha)$ 上で調和であり $\eta = 0$ として条件 (D1)、(D2) をみたすことによる.

ここで、$M = \mathbf{C}$ の場合に modified defect と Nevanlinna defect との間の関係をみておこう. 必要なら座標をずらし、$f(0) \neq \alpha$ とする. 有理型関数の値分布論において、f の位数関数及び $f^{-1}(\alpha)$ の個数関数は、それぞれ

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\| f(re^{i\theta})\| d\theta - \log\|f(0)\|$$

$$N_f^\alpha(r) = \int_0^r \#\left(f^{-1}(\alpha) \cap \{z : |z| \leq t\}\right) \frac{dt}{t}$$

で与えられる. ここで $\#A$ によって A の元の個数を表す. (重複度を考慮しない場合の) Nevanlinna defect は、

$$\delta_f(\alpha) := 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{N_f^\alpha(r)}{T_f(r)}$$

と定義される. このとき、次の関係式が成り立つ.

(2.6) $\quad 0 \leqq \delta_f^S(\alpha) \leqq \delta_f(\alpha)$.

証明. 条件 (D1), (D2) をみたす実数 η, 及び劣調和連続関数 $u\ (\not\equiv -\infty)$ を取る. ここで $u(0) \neq -\infty$ としてよい. $f^{-1}(\alpha)$ の各点で1位の零点をもち他で零でない M上の正則関数 g を取れば, (D2) により $v := u - \log|g|$ は M全体で劣調和である. 各正数 r に対し, (D1) の両辺の対数を, $\{z; |z|=r\}$ 上で平均を取り, Jensen の公式を適用すれば,

$$\begin{aligned}
\eta\,(T_f(r) + \log\|f(0)\|) &= \eta \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\|f\|(re^{i\theta})\,d\theta \\
&\geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta \\
&\geqq N_f^{\alpha}(r) + \log|g(0)| + v(0).
\end{aligned}$$

従って,

$$1 - \eta \leqq 1 - \frac{N_f^{\alpha}(r)}{T_f(r)} + \frac{\mathrm{const}}{T_f(r)}.$$

$r \to \infty$ とし, η に関して下限を取れば, 求める結果を得る.

Nevanlinna 理論により, 次の defect relation が成り立つ.

定理 2.7([4]). 非定数正則写像 $f : \mathbb{C} \to P^1(\mathbb{C})$, および, 任意有限個の相異なる値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ に対し,

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_f(\alpha_j) \leqq 2.$$

系 2.8. 定理 2.7 と同じ仮定のもとに $\sum_{j=1}^{q} \delta_f^S(\alpha_j) \leqq 2$.

この事実は，後に主結果の証明の中で使われる．後節で，この事実の直接証明を与える（§5末）．

§3　主な結果

$\mathbb{R}^3$内の（有向連結）非平坦極小曲面 $x=(x_1,x_2,x_3):M\to\mathbb{R}^3$ を考える．Mに，$\mathbb{R}^3$から誘導された計量 ds^2 をいれ，Mの各点の近傍で正の等温座標 (u,v) を取り $z=u+\sqrt{-1}v$ を正則局所座標に選べば，MはRiemann面とみなされ，各 x_i はM上の調和関数である．局所座標近傍内で $\phi_i=\frac{\partial x_i}{\partial z}$ $(i=1,2,3)$ とおけば，§1で述べた意味のGauss写像 $g:M\to P^1(\mathbb{C})$ $(=\mathbb{C}\cup\{\infty\})$ は，$g=(\phi_1-\sqrt{-1}\phi_2:\phi_3)$ $(=\phi_3/(\phi_1-\sqrt{-1}\phi_2))$ で与えられる（[12]）．仮定から g は非定数正則写像である．Mが完備のとき，次のmodified defect relationが成り立つ．

定理 I．$x:M\to\mathbb{R}^3$ を非平坦完備極小曲面とし，g をそのGauss写像とするとき，相異なる値 $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ に対し

$$\sum_{j=1}^{q}\delta_g^H(\alpha_j)\leqq 4.$$

命題2.5によって，任意の $\alpha_j\notin g(M)$ に対し，$\delta_g^H(\alpha_j)=1$．従って，定理Iより直ちに次の系が導かれる．

系 3.1．$\mathbb{R}^3$内の非平坦完備極小曲面のGauss写像 g に対し，つねに $\#(P^1(\mathbb{C})\setminus g(M))\leqq 4$．

必ずしも完備ではない非平坦極小曲面 $x:M\to\mathbb{R}^3$ を考える．

Mの各点 p に対し、Mの p でのGauss曲率を $K(p)$ で表す。また、p からMの境界までの距離を $d(p)$ で表す。即ち、

$$d(p) := \inf\{p \text{ からMの境界に近づく連続曲線の長さ}\}$$

ここで、連続曲線 $\Gamma : z = \gamma(t)\ (a \leqq t < b)$ がMの境界に近づくとは、どんなコンパクト集合Kに対しても、t が b に十分近いとき、$\gamma(t) \notin K$ となることを意味する。

定理 II. $x : M \to \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面とし、g をそのGauss写像とする。相異なる値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ に対し

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g^0(\alpha_j) > 4$$

が成り立つとき、α_j 及び $\delta_g^0(\alpha_j)$ のみに依存する定数Cで、

$$|K(p)| \leqq \frac{C}{d(p)^2} \quad (p \in M)$$

をみたすものが存在する。

次に、$\mathbb{R}^4$ 内の完備極小曲面 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : M \to \mathbb{R}^4$ を考える。よく知られている様に、$\mathbb{R}^4$ 内の原点を含む2次元有向平面の全体は、自然に、$P^3(\mathbb{C})$ 内の二次曲面

$$Q_2(\mathbb{C}) := \{(w_1 : w_2 : w_3 : w_4)\ ;\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 0\}$$

と同一視できる。MのGauss写像は、各点 $p \in M$ に、Mの p での有向接平面に対応する点 $G(p) \in Q_2(\mathbb{C})$ を対応させる写像 $G : M \to Q_2(\mathbb{C})$ として定義される。一方、$Q_2(\mathbb{C})$ は、$P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ に双正則である。従って、Gは二つの写像 g_k:

$M \to P^1(\mathbb{C})$ $(k=1,2)$ の組 $g=(g_1, g_2)$ と同一視される. 各点の局所座標近傍内で $\phi_i = \frac{\partial x_i}{\partial z}$ $(i=1,\dots,4)$ とおくとき, $g_1 = (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2 : \phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4)$, $g_2 = (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2 : -\phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4)$ が成り立つ ([9]). 各 $g_k : M \to P^1(\mathbb{C})$ は正則である.

定理 III. $x : M \to \mathbb{R}^4$ を完備極小曲面とし, $g=(g_1, g_2) : M \to P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とする.

(i) $g_1 \not\equiv \text{const}$ かつ $g_2 \not\equiv \text{const}$ のとき, 任意の相異なる値 $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1q_1} \in P^1(\mathbb{C})$, 及び相異なる値 $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2q_2} \in P^1(\mathbb{C})$ に対し, 次の不等式のいずれかが成り立つ,

(a) $\quad \sum_{i=1}^{q_1} \delta_{g_1}^H(\alpha_{1i}) \leqq 2$,

(b) $\quad \sum_{j=1}^{q_2} \delta_{g_2}^H(\alpha_{2j}) \leqq 2$,

(c) $$\frac{1}{\sum_{i=1}^{q_1} \delta_{g_1}^H(\alpha_{1i}) - 2} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{q_2} \delta_{g_2}^H(\alpha_{2j}) - 2} \geqq 1.$$

(ii) g_1 又は g_2 のいずれか一方, 例えば g_2 が定数で, 他方が非定数のとき, 任意の相異なる $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対し
$$\sum_{i=1}^{q_1} \delta_{g_1}^H(\alpha_i) \leqq 3.$$

定理IIIは, 論文 [6] 定理 6.3 を精密にしたものである.

§4. Cowen-Griffiths の不等式

$\mathbb{C}$内の開円板 $\Delta_R = \{z ; |z| < R\}$ から $P^1(\mathbb{C})$ への非定数正則写像 f, 及び相異なる値 $\alpha_j = (a_0^j : a_1^j) \in P^1(\mathbb{C})$ $(1 \leqq j \leqq q)$

を考える．ここで，$|a_j^0|^2+|a_j^1|^2=1$．f の Δ_R 上での既約表示 $f=(f_0:f_1)$ を取り，$\|f\|^2:=(|f_0|^2+|f_1|^2)^{1/2}$，$W(f_0,f_1):=f_0f_1'-f_0'f_1$，$F_j:=a_j^1f_0-a_j^0f_1$ $(1\le j\le q)$ とおく．

定理4.1．任意の正数 ε に対し

$$\Delta\log\left(\frac{\|f\|^{\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{q}\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}\right)\ge C\,\frac{\|f\|^{2q-4}\,|W(f_0,f_1)|^2}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

をみたす，α_j のみによってきまる正定数 C，及び ε のみによってきまる正定数 μ が存在する．

これは，[4] における結果を書きかえたものである．

補題4.2．任意の正数 ε に対し，正数 $\mu_0(\varepsilon)$ を適当に取れば，任意の $\mu\ge\mu_0(\varepsilon)$ について

$$\Delta\log\left(\frac{1}{\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}\right)\ge\frac{4\,|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^2|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}-\varepsilon\,\Delta\log\|f\|^2.$$

証明．$\varphi_j=|F_j|^2/\|f\|^2$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\right|^2&=\frac{1}{\|f\|^8}\left|F_j'\bar F_j\,\|f\|^2-|F_j|^2(f_0'\bar f_0+f_1'\bar f_1)\right|^2\\
&=\frac{|F_j|^2}{\|f\|^8}\cdot|W(f_0,f_1)|^2\,|a_j^0\bar f_0+a_j^1\bar f_1|^2\\
&=\frac{|F_j|^2}{\|f\|^8}\,|W(f_0,f_1)|^2\left((|a_j^0|^2+|a_j^1|^2)(|f_0|^2+|f_1|^2)-|a_j^1f_0-a_j^0f_1|^2\right)\\
&=(\varphi_j-\varphi_j^2)\,\frac{|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4},
\end{aligned}$$

一方，

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2=\frac{(|f_0'|^2+|f_1'|^2)(|f_0|^2+|f_1|^2)-|f_0\bar f_0'+f_1\bar f_1'|^2}{\|f\|^4}=\frac{|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4}$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned}\Delta\log\frac{1}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}&=4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial}{\partial\bar z}\log\varphi_j\right)\\&=\frac{4}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial^2\log\varphi_j}{\partial z\partial\bar z}+\frac{4}{\varphi_j^2\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\right|^2\\&=-\frac{4}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2+\frac{4(\varphi_j-\varphi_j^2)}{\varphi_j^2\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2\\&=\frac{4}{\varphi_j^2\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}\frac{|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4}-4\left(\frac{1}{\log^2\frac{\mu}{\varphi_j}}+\frac{1}{\log\frac{\mu}{\varphi_j}}\right)\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log\|f\|^2.\end{aligned}$$

つねに $\varphi_j\leqq 1$ が成り立つ故、$(1/\log^2\mu_0(\varepsilon))+(1/\log\mu_0(\varepsilon))<\varepsilon$ をみたす $\mu_0(\varepsilon)$ を取れば、求める条件をみたす。

定理4.1の証明。与えられた正数 ε に対し、$\mu\geqq\mu_0(\varepsilon/q)$ をみたす μ を取る。補題4.2によって、

$$\begin{aligned}&\Delta\log\frac{\|f\|^{\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{q}\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}\\&\geqq\varepsilon\Delta\log\|f\|^2+\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{4|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^2|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}-\frac{\varepsilon}{q}\Delta\log\|f\|^2\right)\\&=\frac{4|W(f_0,f_1)|^2}{\|f\|^4}\sum_{j=1}^{q}\frac{\|f\|^2}{|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}.\end{aligned}$$

一方、相異なる添字 i,j $(1\leqq i<j\leqq q)$ に対し、f_0, f_1 が F_i と F_j の一次結合で書けることから、$\|f\|\leqq C_{ij}\max(|F_i|,|F_j|)$

をみたす α_i, α_j のみによってきまる定数 C_{ij} が存在する。

$$C_0 := \max_{1\leq i<j\leq q} C_{ij}, \quad M := \max\left\{ \frac{x}{\log^2 \mu x} : 0 < x \leqq C_0 \right\}$$

とおく。

そこで、点 $z \in \Delta_R$ を任意に取り

$$|F_{j_1}(z)| \leqq |F_{j_2}(z)| \leqq \cdots\cdots \leqq |F_{j_q}(z)|$$

が成り立つ様に $j_1, j_2, \cdots, j_q$ をきめる。このとき $\ell = 2, \cdots,$ q に対し、$\|f(z)\| \leqq C_0 |F_{j_\ell}(z)|$ が成り立つ。従って、

$$\frac{\|f\|^2}{|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_{j_\ell}|^2}} \leqq M \quad (\ell = 2, 3, \cdots, q).$$

これより、点 z で

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\|f\|^2}{|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}} \geqq \frac{\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$\geqq \frac{1}{M^{q-1}} \left(\prod_{\ell=2}^{q} \frac{\|f\|^2}{|F_{j_\ell}|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_{j_\ell}|^2}} \right) \frac{\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2}}$$

$$= \frac{\|f\|^{2q}}{M^{q-1} \prod_{j=1}^{q} |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}.$$

この最右辺は、j_ℓ の選ばれ方によらない。従って、最左辺 $\geqq$ 最右辺 は Δ_R 全体で成り立つ。これを最初に得た式に代入すれば、定理 4.1 が成り立つことがわかる。

§5. Main Lemma.

非定数正則写像 $f: \Delta_R \to P^1(\mathbb{C})$, 及び相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in P^1(\mathbb{C})$ に対し, $\|f\|$, $W(f_0, f_1)$, F_j 等, 前節の記号をそのまゝ踏襲する.

M 上の劣調和連続関数 $u_1, \dots, u_q$ $(-\infty \leqq u_j < \infty,\ u_j \not\equiv -\infty)$, 及び正定数 $\eta_1, \dots, \eta_q$ で, 条件

(C1) $\quad \gamma := q - 2 - (\eta_1 + \cdots + \eta_q) > 0$,

(C2) $\quad e^{u_j} \leqq \|f\|^{\eta_j} \quad (1 \leqq j \leqq q)$,

(C3) 各点 $\zeta \in f^{-1}(\alpha_j)$ $(1 \leqq j \leqq q)$ に対し

$$\lim_{z \to \zeta} (u_j(z) - \log|z - \zeta|) \in [-\infty, +\infty)$$

が存在する.

をみたすものを考える.

補題 5.1. 上述の u_j, η_j 及び γ に対し, 正定数 C, μ (>1) を適当に選べば, 関数

$$v := C \frac{\|f\|^{\gamma} e^{u_1 + \cdots + u_q} |W(f_0, f_1)|}{\prod_{j=1}^{q} |F_j| \log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

は, Δ_R 上の実数値連続関数であり, 超関数の意味で $\Delta \log v \geqq v^2$ をみたす.

証明. v は, $\bigcup_{j=1}^{q} f^{-1}(\alpha_j)$ 以外では明らかに連続である. 或 i に対し $F_i(\zeta) = 0$ をみたす点 ζ の近傍 U 上で考える. i と異なる j に対しては, U 上 $F_j(z) \neq 0$ としてよい。また, 必要なら添字をいれかえ, U 上 $f_0(z) \neq 0$ としてよい.

$\chi_i = W(f_0, f_1)/F_i$ とおく．有理型関数 $g = f_1/f_0$ を用いて，$\chi_i = \dfrac{f_0}{a_i^0}\dfrac{g'}{a_i - g}$ と書きなおせるゆえ，χ_i は ζ で1位の極をもつ．従って

$$\frac{e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|} = |z-\zeta||\chi_i|e^{u_i-\log|z-\zeta|}\cdot\frac{e^{u_1+\cdots+u_{i-1}+u_{i+1}+\cdots+u_q}}{\prod_{j\neq i}|F_j|}$$

は ζ の近傍で有界である．これより $\lim_{z\to\zeta} v(z) = 0$ が導れ，v は Δ_R 上で連続である．

そこで，定数 C，μ を，C^2，μ が定理4.1の条件をみたす様に取る．このとき，条件（C1），（C2）によって，

$$\Delta\log v \geqq \Delta\log\frac{\|f\|^{\gamma}}{\prod_{j=1}^{q}\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$\geqq C^2\frac{\|f\|^{2\gamma-4}|W(f_0,f_1)|^2}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$\geqq C^2\frac{\|f\|^{2\gamma}e^{2(u_1+\cdots+u_q)}|W(f_0,f_1)|^2}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|^2\log^2\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$= v^2.$$

補題 5.2．上述の u_j，η_j 及び γ に対し，正定数 C，μ を適当に選べば，

$$\frac{\|f\|^{\gamma}e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}} \leqq C\frac{2R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立つ．

証明は，補題5.1に，次の一般化されたSchwarzの補題を適用することにより直ちに得られる。

Schwarzの補題（[1]）．vをΔ_R上の非負値劣調和連続関数とする。Δ_R上で，超関数の意味で$\Delta \log v \geqq v^2$が成り立つとき，

$$v(z) \leqq \lambda_R(z) := \frac{2R}{R^2-|z|^2} \qquad (z \in \Delta_R).$$

証明．$\lambda_r(z)$はrに関して連続ゆえ，任意の$r\ (<R)$に対し$\Delta_r := \{z ; |z|<r\}$上で，$\eta_r(z) = \frac{v(z)}{\lambda_r(z)} \leqq 1$を示せば十分である。$\lim_{z \to \partial\Delta_r} \eta_r(z) = 0$ゆえ，$\eta_r(z)$は$\Delta_r$内の一点$z_0$で最大値を取る。$\eta_r(z_0) \leqq 1$をいえばよい。これを否定する。このとき$z_0$の或る近傍$U$上で$\eta_r(z) > 1$，従って$v > \lambda_r$である。従って，$U$上で超関数の意味で

$$\Delta \log \eta_r = \Delta \log v - \Delta \log \lambda_r \geqq v^2 - \lambda_r^2 > 0$$

が成り立ち，$\log \eta_r$は劣調和である。$z_0 \in U$で最大値を取ることから，最大値の原理により$\log \eta_r \equiv \mathrm{const}$．上の不等式に矛盾する。よって求める結果を得る。

Main Lemma．関数$u_1, \ldots, u_q$及び定数$\eta_1, \cdots, \eta_q$は条件(C1)，(C2)をみたすものとする。このとき，$0 < \delta q < \gamma$をみたす任意のδに対し，η_j，α_j及びδのみによってきまる定数C_0を適当に選んで

$$\|f\|^{\gamma-q\delta}\frac{e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|^{1-\delta}}\leqq C_0\frac{2R}{R^2-|z|^2}$$

が成り立つ様にできる。

証明。与えられた δ に対し $\tilde{C}:=\sup_{0<x\leqq 1}x^{\delta}\log(\mu/x^2)$ とおく。補題5.2で選んだ定数 C, μ に対し、

$$\|f\|^{\gamma-q\delta}\frac{e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|^{1-\delta}}$$

$$=\frac{\|f\|^{\gamma}e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|}\prod_{j=1}^{q}\left(\frac{|F_j|}{\|f\|}\right)^{\delta}$$

$$\leqq\tilde{C}^{q}\frac{\|f\|^{\gamma}e^{u_1+\cdots+u_q}|W(f_0,f_1)|}{\prod_{j=1}^{q}|F_j|\log\frac{\mu\|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

$$\leqq C\tilde{C}^{q}\frac{2R}{R^2-|z|^2}.$$

$C_0:=C\tilde{C}^{q}$ とおけば、求める不等式が成り立つ。

ここで、Main Lemma の応用による系2.8の直接証明を与える。

系2.8の証明。必要なら座標をずらせて、$u_j(0)\neq-\infty$, $f(0)\neq\alpha_j$ $(1\leqq j\leqq q)$、かつ $W(f_0,f_1)(0)\neq 0$ と仮定してよい。系2.8の結論を否定する。このとき、条件(C1)をみたす定数 η_j 及び(C2), (C3)をみたす $\mathbb{C}$ 上の劣調和連続関数 u_j が存在する。任意正数 R, 及び $\gamma>q\delta>0$ をみたす δ を取り、写像 $f|\Delta_R:\Delta_R\to P^1(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用し、結論の式に $z=0$ を代入すれば、R が、α_j, $\delta_f^S(\alpha_j)$ 及び f, u_j, F_j,

$W(f_0, f_1)$ の原点での値のみによる定数でおさえられる。これは R の任意性に反する。よって系2.8を得る。

§6. 定理Iの証明.

$x = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面とし，$g : M \to P^1(\mathbb{C})$ をそのGauss写像とする。本節の目的は定理Iの証明にあるが，論法の一部を次節でも利用する為，しばらく完備性を仮定しない。Mの普遍被覆面 $\varpi : \tilde{M} \to M$ に対し，$\tilde{x} := x \cdot \varpi : \tilde{M} \to \mathbb{R}^3$ も非平坦極小曲面であり，そのGauss写像は $\tilde{g} = g \cdot \varpi$ で与えられる。また，g に対するmodified defectは，$\tilde{g}$ に対するものを越えない。従って，定理I，IIの証明には，$\tilde{M} = M$ と仮定してよい。$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面はコンパクトであり得ないから，Koebeの一意化定理により，Mは $\mathbb{C}$ 又は $\mathbb{C}$ 内の単位円板に双正則である。$\mathbb{C}$ に双正則な場合は，系2.8によって定理Iは正しい。また定理IIはこの場合を除外してよい。以下，Mは単位円板に双正則であると仮定する。

Gauss写像 g の既約表示 $g = (g_0 : g_1)$ を取り，$\|g\| = (|g_0|^2 + |g_1|^2)^{1/2}$ とおく。計算によって容易に確かめられる様に，$\mathbb{R}^3$ から誘導されるMの計量は，$f = \frac{\partial x_1}{\partial z} - \sqrt{-1}\frac{\partial x_2}{\partial z}$，$g = \frac{g_1}{g_0}$ とおくとき，

$$ds^2 = |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2$$

で与えられる（[12]）。$h = f / g_0^2$ とおけば，

$$ds^2 = |h|^2 \|g\|^4 |dz|^2$$

と書きなおされ，hは零点をもたぬM上の正則関数である．

そこで，$P^1(\mathbb{C})$内の相異なる値$\alpha_1, \ldots, \alpha_q$に対し

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g^H(\alpha_j) > 4$$

と仮定する．このとき，H-defectの定義により，

$$\gamma := q - 2 - (\eta_1 + \cdots + \eta_q) > 2$$

をみたす非負実数η_j，及び$f^{-1}(\alpha_j)$以外で調和なM上の連続関数u_j $(1 \leqq j \leqq q)$で，写像gに対し§5の条件(C2)，(C3)をみたすものが存在する．

$$(6.1) \qquad \frac{\gamma - 2}{q} > \delta > \frac{\gamma - 2}{q + 2}$$

をみたすδを取り，$p = \dfrac{2}{\gamma - q\delta}$とおく．このとき，

$$(6.2) \qquad 0 < p < 1, \qquad \frac{\delta p}{1 - p} > 1.$$

M内の開集合$M' := M \setminus \{F_1 F_2 \cdots F_q W(g_0, g_1) = 0\}$上の関数

$$(6.3) \qquad v := |h|^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{|F_1 F_2 \cdots F_q|^{1-\delta}}{e^{u_1 + \cdots + u_q} \, |W(g_0, g_1)|} \right)^{\frac{p}{1-p}}$$

を考える．ここで，F_jは，写像g及び値$\alpha_1, \ldots, \alpha_q$に対し§4の最初に定義した様な関数を表す．仮定により，M'の普遍被覆面$\varpi : \tilde{M}' \to M'$に対し，$\log v \circ \varpi$は$\tilde{M}'$上の調和関数である．$\log v \circ \varpi$に共役な調和関数$w$を取れば，$\psi = e^{\log v\circ\varpi + iw}$は$\tilde{M}'$上正則であり，$|\psi| = v \circ \varpi$をみたす．一点$o \in M'$を

取る。M' を $\mathbb{C}$ 内の部分領域とみて、O を原点としてよい。$\tilde{M}'$ の各点 $\tilde{p}$ は、O と $\varpi(\tilde{p})$ を結ぶ M' 内の連続曲線 $\gamma_{\tilde{p}}$ のホモトピー類と1対1に対応する。定数曲線 O に対応する $\tilde{M}'$ の点を $\tilde{O}$ で表す。そこで、$\tilde{M}'$ 上の正則関数 F を

$$w = F(\tilde{p}) = \int_{\gamma_{\tilde{p}}} \varphi(z)\,dz$$

によって定義する。F は、$F(\tilde{o}) = 0$, $dF(\tilde{p}) \neq 0$ $(\tilde{p} \in \tilde{M}')$ をみたす。従って、$\tilde{o}$ の或開近傍 U を、開円板 Δ_R 上へ双正則にうつす。この様な R の中で最大のものを取り $\Phi := \varpi \circ (F|_U)^{-1} : \Delta_R \longrightarrow M'$ とおく。ここで $R = \infty$ ではあり得ない。実際、M' は $\mathbb{C}$ 内の有界領域と双正則ゆえ、Φ は Δ_R 上の有界正則関数とみなされ、$R = \infty$ とすると Liouville の定理に矛盾する。

そこで、$\partial\Delta_R$ の各点 a に対し、O と a を結ぶ線分 L_a、及びその Φ による像

$$\Gamma_a : z = \Phi(ta) \qquad 0 \leq t < 1$$

を考える。或点 $a_0 \in \partial\Delta_R$ に対し、Γ_{a_0} は M の境界に近づく事を示そう。これを否定する。このとき、各点 $a \in \partial\Delta_R$ に対し、$\zeta_0 := \lim_{\nu\to\infty} \Phi(t_\nu a) \in M$ が存在する様な 1 に収束する数列 $\{t_\nu\}$ $(0 < t_\nu < 1)$ が取れる。$\zeta_0 \notin M'$ とする。或 i に対し $F_i(\zeta_0) = 0$ のときは、補題5.1の証明の中で示したことから $\liminf_{z\to\zeta_0} |(F_1F_2\cdots F_g)(z)|^{\frac{2p}{1-p}} v(z) > 0$ が成り立つ。また、$W(g_0, g_1)(\zeta_0) = 0$ のときは、$\liminf_{z\to\zeta_0} |W(g_0,g_1)|^{\frac{p}{1-p}} v > 0$.

いずれの場合でも、ζ_0 の近傍で、

$$v \geqq \frac{C}{|z-\zeta_0|^{\delta p/(1-p)}}$$

が成り立つ様な正数 C が存在する。(6.2) に注意すれば、

$$R = \int_{L_a} |dw| = \int_{\Gamma_a} \left|\frac{dw}{dz}\right| |dz| = \int_{\Gamma_a} v(z)|dz| \geqq C \int_{\Gamma_a} \frac{|dz|}{|z-\zeta_0|^{\delta p/(1-p)}} = \infty$$

となり、矛盾に逢着する。従って、$\zeta_0 \in M'$. M' 内で相対コンパクトな ζ_0 の単連結開近傍 V を取る。v は $\bar{V}$ 上の正値連続関数ゆえ、$C' := \min_{z \in \bar{V}} v(z) > 0$. もし $\Phi(ta) \notin V$ をみたす 1 にいくらでも近い t が存在すれば、Γ_a は、ζ_0 の近傍と ∂V の間を無限回往復し、

$$R = \int_{\Gamma_a} v(z)|dz| \geqq C' \int_{\Gamma_a} |dz| = \infty$$

となってしまう。従って或 $t_0 (< 1)$ に対し $\Phi(ta) \in V$ $(t_0 < t < 1)$ である。この議論は、V を ζ_0 の任意の開近傍で置き換えても有効である。これより $\lim_{t \to 1-0} \Phi(ta) = \zeta_0$ が成り立つ。そこで、$\varpi^{-1}(V)$ の $\{(F|U)^{-1}(ta) : t_0 < t < 1\}$ を含む連結成分 $\tilde{V}$ を取れば、$\varpi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ は同相写像ゆえ、

$$\lim_{t \to 1-0} (F|U)^{-1}(ta) = \tilde{p}_0 \in \tilde{M}'$$

が存在する。他方、F は $\tilde{p}_0$ の或開近傍を a の開近傍上に双正則にうつす。これより、$(F|U)^{-1}$ は $\partial\Delta_R$ の任意の点の近傍に解析接続されることがわかる。結局 $\bar{\Delta}_R$ の近傍に接続さ

れる。これから容易にわかる様に、Fは$\overline{\Gamma}$の或開近傍をΔ_Rの開近傍上に双正則にうつす。これはRの取り方に反す。従って、Mの境界に近づく様なΓ_{a_0}が少くとも一つ存在する。

写像 $z=\Phi(w)$ は到る所で局所同相写像であり、M'上の計量 ds^2 のΦによるひきもどしは、

$$\Phi^*(ds^2) = |h\circ\Phi|^2 \, \|g\circ\Phi\|^4 \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 |dw|^2$$

で与えられる。他方、$w=F(z)$ の定義より、

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^{1-p} = \frac{|h|\,|F_1F_2\cdots F_q|^{(1-\delta)p}}{(e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(g_0,g_1)|)^p}$$

が成り立つ。$f=g\circ\Phi$, $f_0=g_0\circ\Phi$, $f_1=g_1\circ\Phi$ とおき、$u_j\circ\Phi$, $F_j\circ\Phi$ を略して u_j, F_j で表せば、$W(f_0,f_1)=(W(g_0,g_1)\circ\Phi)\frac{dz}{dw}$ より

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{(e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(f_0,f_1)|)^p}{|h|\,|F_1F_2\cdots F_q|^{(1-\delta)p}}$$

が得られる。従って、

$$(6.4)\qquad \Phi^*ds^2 = \left(\frac{\|f\|^2\,(e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(f_0,f_1)|)^p}{|F_1F_2\cdots F_q|^{(1-\delta)p}}\right)^2 |dw|^2.$$

ここで、写像 $f:\Delta_R\to P^1(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用すれば、

$$\Phi^*ds^2 \leqq C_1\left(\frac{2R}{R^2-|w|^2}\right)^{2p}|dw|^2$$

を得る。これより、

$$(6.5)\qquad d(0)\leqq\int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{L_{a_0}}\Phi^*ds \leqq C_1^{\frac{1}{2}}\int_0^R\left(\frac{2R}{R^2-|w|^2}\right)^p|dw| = C_2R^{1-p}.$$

ここで，C_1, C_2 は α_j 及び $\delta_g^H(\alpha_j)$ $(\leqq \delta_f^H(\alpha_j))$ のみによってきまる定数を表す。そこで，定理 I における様に，M を完備とする。このとき $d(0) = \infty$ である。これは，$R < \infty$ に矛盾する。結局，非平坦完備極小曲面については，本節の大前提 $\sum_{j=1}^{q} \delta_g^H(\alpha_j) > 4$ が否定され，定理 I を得る。

§7. 定理 II の証明.

定理 II における様に，$x: M \to \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面 $g: M \to P^1(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とし，相異なる値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ に対し

$$(7.1) \qquad \sum_{j=1}^{q} \delta_g^O(\alpha_j) > 4$$

が成り立つものとする。前節で述べた様に，M は $\mathbb{C}$ 内の単位円板としてよい。$g = (g_0 : g_1)$，$\|g\|$，F_j 等，前節の記号をそのまゝ踏襲する。仮定 (7.1) と O-defect の定義から，

$$\gamma := \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{m_q}\right) - 2 > 2$$

をみたし，各 F_j $(1 \leqq j \leqq q)$ が，$< m_j$ 位の零点を持たない様な正整数 $m_1, \ldots, m_q$ が存在する。$\eta_j = \frac{1}{m_j}$，$u_j = \eta_j \log |F_j|$ とおく。このとき，各 u_j は $M \setminus f^{-1}(\alpha_j)$ 上調和であり，写像 $g: M \to P^1(\mathbb{C})$ に対し，§5 の条件 (C2)，(C3) をみたす。これらの u_j，η_j に対し，前節の議論がそのまゝ有効である。前節と全く同様の方法で写像 $\Phi: \Delta_R \to M'$ を定義し，写像

$f=(f_0:f_1)=g\circ\Phi:\Delta_R\to P^1(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用する。
(6.1)をみたす δ を取れば、

$$\frac{\|f\|^{\gamma-q\delta}\,|W(f_0,f_1)|}{|F_1|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q|^{1-\eta_q-\delta}}$$

$$(7.2)\qquad =\frac{\|f\|^{\gamma-q\delta}\,e^{u_1+\cdots+u_q}\,|W(f_0,f_1)|}{|F_1F_2\cdots F_q|^{1-\delta}}\leqq C_0\left(\frac{2R}{R^2-|w|^2}\right)$$

が成り立つ。ここで C_0 は α_j、η_j のみによってきまる定数を表す。前節同様 $p=2/(\gamma-q\delta)$ とおいて、(7.2)を $p-1$ 乗し $w=0$ を代入すると、

$$(7.3)\qquad R^{1-p}\leqq\frac{1}{(2C_0)^{1-p}}\frac{(|F_1(0)|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q(0)|^{1-\eta_q-\delta})^{1-p}}{|W(f_0,f_1)|^{1-p}\,\|f(0)\|^{2(1-p)/p}}.$$

一方、前節で求めた(6.4)に $e^{u_j}=|F_j|^{\eta_j}$ を代入すれば、

$$\Phi^*ds^2=\lambda^2|dw|^2=\frac{\|f\|^4\,|W(f_0,f_1)|^{2p}}{(|F_1|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q|^{1-\eta_q-\delta})^{2p}}|dw|^2$$

を得る。M の 0 での Gauss 曲率は、

$$K(0)=-\frac{\Delta\log\lambda}{\lambda^2}=-\frac{4|W(f_0,f_1)(0)|^{2(1-p)}(|F_1(0)|^{1-\eta_1-\delta}\cdots|F_q(0)|^{1-\eta_q-\delta})^{2p}}{\|f(0)\|^8}$$

によってあたえられる。この式を(7.3)の右辺と比較して

$$R^{1-p}\leqq\mathrm{const}\,\frac{\prod_{j=1}^{q}|F_j(0)|^{1-\eta_j-\delta}}{|K(0)|^{1/2}\,\|f\|^{2(1+p)/p}}$$

が得られる。ここで $|F_j|/\|f\|\leqq 1$、及び

$$\frac{2(1+p)}{p}=2\left(\frac{\gamma-q\delta}{2}+1\right)=\sum_{j=1}^{q}(1-\eta_j-\delta)$$

に注意すれば，$R^{1-\rho} \leq \mathrm{const}\, |K(0)|^{-1/2}$ を得る．この式を，前節で得た (6.5) と組み合せれば，求める結果が得られる．

§ 8　定理 III の証明.

定理 III における様に，$x=(x_1,\dots,x_4): M \to \mathbb{R}^4$ を非平坦完備極小曲面とし，$g=(g_1,g_2): M \to P^1(\mathbb{C})\times P^1(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とする．§ 6 及び § 7 と同様，M は $\mathbb{C}$ 内の単位円板と双正則であるとしてよい．各 g_k $(k=1,2)$ の既約表示 $g_k=(g_{k1}:g_{k2})$ を取り，$\|g_k\| = (|g_{k0}|^2+|g_{k1}|^2)^{1/2}$ とおく．このとき，Mの計量は

$$ds^2 := 2\left(\sum_{\ell=1}^{4}\left|\frac{\partial x_\ell}{\partial z}\right|^2\right)|dz|^2 = |h|^2\|g_1\|^2\|g_2\|^2|dz|^2$$

で与えられる．ここで $h=\left(\frac{\partial x_1}{\partial z} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)/g_{10}\,g_{21}$.

先ず (i) を示そう．定理 III の (a), (b), (c) すべてを否定すると，各 $k=1,2$ に対し，非負実数 η_{kj}，及び $M \setminus g_k^{-1}(\alpha_{kj})$ に調和な M 上の連続関数 u_{kj} $(1\leq j\leq q_k)$ で，条件

(8.1)　$\gamma_k := q_k - 2 - (\eta_{k1}+\cdots+\eta_{kq_k}) > 0 \quad (k=1,2)$

(8.2)　$\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} < 1$

(8.3)　$e^{u_{kj}} \leq \|g_k\|^{\eta_{kj}} \quad (1\leq j\leq q_k,\ k=1,2)$

(8.4)　$\lim_{z\to\zeta}\,(u_{kj}(z) - \log|z-\zeta|) \in [-\infty,\infty)$

が各 $\zeta \in g^{-1}(\alpha_{kj})$ に対し存在する．

をみたすものが取れる．このとき，$\sum_{k=1}^{2}\dfrac{1}{\gamma_k - q_k\delta_0} = 1$ をみたす δ_0 を取り，δ_0 に十分近い $\delta\,(<\delta_0)$ を選んで $p_k :=$

$1/(\gamma_k - g_k\delta)$ $(k=1,2)$ とおけば,

(8.5) $\qquad 0 < p_1 + p_2 < 1,$

(8.6) $\qquad \dfrac{\delta p_k}{1-p_1-p_2} > 1 \qquad (k=1,2)$

が成り立つ。各 α_{kj} を $\alpha_{kj} = (a^0_{kj} : a^1_{kj})$ と表示し、正則関数 $F_{kj} = a^1_{kj} g_{k0} - a^0_{kj} g_{k1}$ を定義する。ここで $|a^0_{kj}|^2 + |a^1_{kj}|^2 = 1$。§6 の関数 (6.3) の代りに、

$$(8.7) \quad v := \frac{|h|^{\frac{1}{1-p_1-p_2}} \left(\left(\prod_{i=1}^{g_1} |F_{1i}|\right)^{p_1} \left(\prod_{j=1}^{g_2} |F_{2j}|\right)^{p_2} \right)^{\frac{1-\delta}{1-p_1-p_2}}}{\left(\left(e^{u_{11}+\cdots+u_{1g_1}} |W(g_{10}, g_{11})|\right)^{p_1} \left(e^{u_{21}+\cdots+u_{2g_2}} |W(g_{20}, g_{21})|\right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{1-p_1-p_2}}}$$

を考えれば, $\log v$ は M の開集合

$$M' := M \setminus \{ W(g_{10}, g_{11}) W(g_{20}, g_{21}) F_{11} \cdots F_{1g_1} F_{21} \cdots F_{2g_2} = 0 \}$$

上で調和である。M' の普遍被覆面 $\varpi : \tilde{M}' \to M'$ を取り, $\tilde{M}$ 上で $|\psi| = v \cdot \varpi$ をみたす正則関数 ψ を選び, §6 と同様にして

$$w = F(\tilde{p}) = \int_{\gamma_{\tilde{p}}} \psi(z)\, dz \qquad (\tilde{p} \in \tilde{M}')$$

を定義する。F は点 $\tilde{o} \in \tilde{M}'$ の或開近傍 U を Δ_R 上に双正則にうつす。R をこの様な性質をもつものの中で最大のものとすれば, R は有限であり, 一点 $a_0 \in \partial\Delta_R$ に対し, 0 と a_0 を結ぶ線分 L_{a_0} の $\Phi := \varpi \circ (F|U)^{-1}$ による像 Γ_{a_0} が M の境界に近づく。実際, (6.2) の代りに (8.6) を使えば, §6 での論法がそのまま適用される。

そこで, $f_{k\ell} := g_{k\ell} \circ \Phi$ $(k=1,2,\ \ell=0,1)$, $f_k := (f_{k0} : f_{k1})$ とお

き，写像 f_k に Main Lemma を適用する．これより，

$$\frac{\|f_k\|^{\gamma_k - q_k\delta}\ e^{u_{k1}+\cdots+u_{kq_k}}\ |W(f_{k0}, f_{k1})|}{|F_{k1}F_{k2}\cdots F_{kq_k}|^{1-\delta}}$$

$$\leqq \text{const}\ \frac{2R}{R^2 - |w|^2} \qquad (k = 1, 2).$$

一方，M の計量の Δ_R 上へのひきもどしは，

$$\Phi^* ds^2 = \|f_1\|^2 \|f_2\|^2 \left(|W(f_{10}, f_{11})| \prod_{i=1}^{q_1} \frac{e^{u_{1i}}}{|F_{1i}|^{1-\delta}}\right)^{2p_1} \left(|W(f_{20}, f_{21})| \prod_{j=1}^{q_2} \frac{e^{u_{2j}}}{|F_{2j}|^{1-\delta}}\right)^{2p_2} |dw|^2$$

によって与えられる。これらの事実と (8.5) を使えば

$$d(0) \leqq \int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{L_{a_0}} \Phi^* ds \leqq \text{const} \int_{L_{a_0}} \frac{|dw|}{(R^2 - |w|^2)^{p_1+p_2}} < \infty.$$

これは M の完備性に反する。よって定理 III，(i) を得る．

最後に定理 III，(ii) を示そう。結論を否定すれば，写像 $g: M \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$ に対し，$\gamma := q - 2 - (\eta_1 + \cdots + \eta_q) > 1$，及び §5 の条件 (C2)，(C3) をみたす正数 $\eta_1, \ldots, \eta_q$ 及び $M \setminus f^{-1}(\alpha_j)$上調和な M 上の連続関数 u_j $(1 \leqq j \leqq q)$ が存在する。正数 δ を，$p := 1/(\gamma - \delta q)$ が (6.2) をみたす様に選ぶ．(8.7) の代りに，今度は関数

$$v = \frac{|h|^{\frac{1}{1-p}}\ |F_1 F_2 \cdots F_q|^{p(1-\delta)/(1-p)}}{e^{u_1+\cdots+u_q}\ |W(g_{10}, g_{11})|^{p/(1-p)}}$$

を使って，§6 と全く同様の議論をすれば矛盾に逢着することがわかる．従って定理 III，(ii) が成り立つ．

References

[1] L.A. Ahlfors, Conformal invariants, Topics in geometric function theory, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1973.

[2] C.C. Chen, On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in $\mathbb{R}^4$, Pacific J. Math., 102(1982), 9-14.

[3] S.S. Chern and R. Osserman, Complete minimal surfaces in euclidean n-space, J. d'analyse Math., 19(1967), 15-34.

[4] M.J. Cowen and P.A. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature, J. Analyse Math., 29(1976), 93-153.

[5] H. Fujimoto, On the Gauss map of a complete minimal surface in $\mathbb{R}^m$, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 279-288.

[6] H. Fujimoto, Value distribution of the Gauss maps of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 663-681.

[7] H. Fujimoto, Non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into $P^{N_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times P^{N_k}(\mathbb{C})$, Japanese J. Math., 11(1985), 233-264.

[8] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, preprint.

[9] D.A. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, Amer. Math. Soc. Memoir 236, 1980.

[10] R. Osserman, Minimal surfaces in the large, Comm. Math. Helv., 35(1961), 65-76.

[11] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math., 80(1964), 340-364.

[12] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

[13] B.V. Shabat, Distribution of values of holomorphic mappings, Transl. of Math. Monographs Vol. 61, AMS. 1985.

[14] F. Xavier, The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere, Ann. of Math., 113(1981), 211-214.