

調和写像のエネルギー評価と Liouville型定理への応用

京大数理研 竹腰見昭 (Kensho Takegoshi)

Introduction.

この論説は二つの節から成っており、第一節ではある特別な exhaustion function を持った非コンパクトケーラー多様体から他のケーラー多様体への調和写像のエネルギーを下から評価する事を試みる。ただ調和写像の場合には target の多様体のケーラー計量の曲率に制限が付く。けれども多重調和写像の族に限ると target の多様体のケーラー計量の曲率には無関係に評価できる。これらの評価は、調和写像の場合には調和写像の解析性を示すのに用いられた Bedford & Taylor [1][2] と Siu [9] による積分公式から導かれ、多重調和写像の場合には Donnelly と Xavier [3] による積分公式から導かれる。その評価は今迄知られている評価式より幾分詳しくその精緻さを用いて第二節では、非正或いは漸近的に平坦な曲率を持つ多様体上で、調和関数、正則写像、強多重調和

関数に対して Liouville 型定理が成立する事を述べる。その手法はこの方面でよく使われて来た Moser [7] の 2 階の楕円型作用素の議論とは全く異なり、結果として必ずしも Moser の手法が適用出来る多様体上でも Liouville 型定理が成立する事を確認出来る。

第一節 調和写像のエネルギー評価

(M, ds_M^2) を $m \geq 1$ 次元非コンパクトケーラー多様体とし、 $\varphi: M \rightarrow [0, \infty)$ を M 上の連続な exhaustion function i.e. 任意の $r \geq 0$ に対して $M(r) = \{\varphi < r\}$ は M で相対コンパクトとする。今 $f: (M, ds_M^2) \rightarrow (N, ds_N^2)$ をケーラー多様体 (N, ds_N^2) への可微分写像とする。 $(g_{i\bar{j}})$ 及び $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ により ds_M^2 及び ds_N^2 の計量テンソルを表わす事にする。 f の $M(r)$ 上のエネルギー $E(f, r)$ は

$$E(f, r) = \int_{M(r)} e(f) dV_M$$

$$e(f) = e'(f) + e''(f)$$

$$e'(f) = g^{\bar{i}i} h_{\alpha\bar{\beta}}(f) f_i^\alpha \overline{f_{\bar{i}}^\beta}, \quad e''(f) = g^{\bar{i}i} h_{\alpha\bar{\beta}}(f) f_{\bar{i}}^\alpha \overline{f_i^\beta}$$

で定義される。

定義 1.1. ケーラー多様体間の可微分写像 $f: (M, ds_M^2) \rightarrow (N, ds_N^2)$ が

$$\text{Trace}_{ds_M^2} \nabla^{1,0} \bar{\partial} f = 0$$

を満たす時, ψ は調和であると言う。また

$$\nabla^{1,0} \bar{\partial} \psi = 0$$

を満たす時, ψ は多重調和であると言う。

ここに $\nabla^{1,0}$ はバンドル $TM \otimes \psi^* TN$ 上の ω_M^2 , $\psi^* \omega_N^2$ によって定まる接続に関する $(1,0)$ 型の共変微分を表わす。特にケーラー多様体間の多重調和写像は調和であり, 正則写像は多重調和である。

我々の目的は, ψ が調和或いは多重調和の時 $E(\psi, \gamma)$ の増大度を評価する事である。我々は至に関して更に次の仮定を置く。

(1.2) $\psi := \psi^+$ は M 上の C^0 級であり, ψ は $M \setminus M(r_*)$ 上高々非退化な臨界点しか持たない。

次に (1.2) を満たす ψ と ψ に関して ω_M^2 に依存して決まる次の二つの定数を定義する。但し以降 M の複素次元は 2 次元以上とする。

$$(1.3) \quad c_1 := \inf_{x \in M} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(x), \quad c_2 := \sup_{x \in M \setminus M[0]} |\partial \psi|^2(x)$$

ここで $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_m$ は ψ の Levi 型式 $\partial \bar{\partial} \psi$ の ω_M^2 に関する固有値であり, $M[0] = \{\psi = 0\}$ である。定数 c_1, c_2 は必ずしも有限とは限らるいが, 以下 c_1, c_2 は有限と仮定する。エネルギー評価の結果を述べる前にもう少し準備が必要であ

る。

*でもって do_M^2 に関する星型作用素を表わす。*は $C^{p,q}(M)$ から $C^{m-i, m-p}(M)$ への $* \circ * = (-1)^{p+q}$ を満たす実線型作用素である。(s, t)型微分形式 v に対して線型作用素 $e: C^{p,q}(M) \rightarrow C^{p+s, q+t}(M)$ が $e(v)u = v \wedge u$ により定義される。 $e(v)^* := *e(v)^*$ とおくと, $e(v)^*$ は $C^{p,q}(M)$ から $C^{p-s, q-t}(M)$ への線型作用素となる。

\pm は $M \setminus M[0]$ 上可微分であり, $r \geq r_0 = r_* + 1$ なる r に対して $\partial M(r) = \{\pm = r\}$ は実 $2m-1$ 次元可微分多様体の部分と有限個の点より成る (cf. (1.2)). $\partial M(r)$ の実 $2m-1$ 次元可微分多様体の部分の体積要素 dS_r を

$$dv_M = d\pm / |d\pm| \wedge dS_r$$

により定義する。以下

$$\omega_r := dS_r / |d\pm|$$

とおく。

さて可微分写像 $f: (M, do_M^2) \rightarrow (N, do_N^2)$ に対して, 次の関数 $B(f, r)$ を考える。 $r \geq r_0$ の時

$$(1.4) \quad B(f, r) = \frac{1}{c_2} \int_{\partial M(r)} \{ |e(\partial\pm)^* \partial f|^2 + |e(\bar{\partial}\pm)^* \bar{\partial} f|^2 \} \omega_r$$

ここで $\partial f \in C^{1,0}(M, f^*TN^{1,0})$, $\bar{\partial} f \in C^{0,1}(M, f^*TN^{1,0})$

であり, 従って $e(\partial\pi)^*\partial f$, $e(\bar{\partial}\pi)^*\bar{\partial}f \in C^{\infty}(M, T^*TN^{\otimes m})$ である。 $|e(\partial\pi)^*\partial f|$ は $R_{\partial\pi}$ に関するその長さを表わす。
 $|e(\bar{\partial}\pi)^*\bar{\partial}f|$ も同様。 (1.4) の積分領域は $\partial M(r)$ の実 $2m-1$ 次可微分多様体の部分であり, Schwarz の不等式により $\{\cdot\}_{\omega_r} \leq e(f) |\partial\pi| dS_r$ であるから, $B(f, r)$ の値は有限に定まる。 従って Stokes の定理を用いて $B(f, r)$ の右辺を $M(r)$ 上の積分に書き直せば $B(f, r)$ が r について連続関数である事が判る。

さて我々の調和写像に関するエネルギー評価は次のように述べられる。

定理 1.5. (M, ds_M^2) を $m \geq 2$ 次元ケーラー多様体とし, π を (1.2) を満たす exhaustion function で (1.3) で定められた c_1, c_2 が $0 < c_1, c_2 < +\infty$ を満たすとする。

(i) $f: (M, ds_M^2) \rightarrow (N, ds_N^2)$ を ケーラー多様体 (N, ds_N^2) への非定数多重調和写像とすると, $E(f, r)/r^\mu$ ($\mu = c_1/c_2$) は r に関して広義単調増加であって, $r > r_0$ に対して評価式

$$(1.6) \quad e^{x_f(r)} \leq c_f E(f, r) / r^\mu$$

が成立する。ここで $c_f > 0$ は r に依存しない定数であり x_f は r で定義される。

$$(1.7) \quad \chi_f(r) := \int_{r_0}^r \frac{B(f, t)}{E(f, t)} dt$$

(ii) ω_M^2 の基本形式 ω_M が $\omega_M = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \Phi$ i.e. Φ は強多
重調和, と書かれ, ケーラー多様体 (N, ω_N^2) のリーマン曲
率が Siu の意味で strongly semi-negative (cf. [9] 後
述) であれば, 非定数調和写像 $f: (M, \omega_M^2) \rightarrow (N, \omega_N^2)$
に対して (i) の主張が成立する。但しこの時 $\mu = m-1/c_2$.

ここにケーラー計量 ω_N^2 のリーマン曲率 $R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^N$ が

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^N (A^\alpha \bar{B}^\beta - C^\alpha \bar{D}^\beta) \overline{(A^\gamma \bar{B}^\delta - C^\gamma \bar{D}^\delta)} \geq 0$$

を任意の複素数 $A^\alpha, B^\beta, C^\gamma, D^\delta$ に対して満たす時, Siu
の意味で strongly semi-negative と呼ばれる。但し

$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^N = \partial_\gamma \partial_{\bar{\delta}} R_{\alpha\bar{\beta}} - R^{\bar{\mu}\alpha} \partial_\mu R_{\bar{\beta}\bar{\mu}\gamma\bar{\delta}}$ である。例えば
 \mathbb{C}^m , 複素トーラス, \mathbb{C}^m 上の有界対称領域にはこのよ
う性質を満たすケーラー計量が存在する。従って特に (ii) に
おいて f が調和関数の場合には $(N, \omega_N^2) = (\mathbb{C}, dzd\bar{z})$
として f のエネルギー評価を得る。

定理 1.5 を示すのには次の二つの積分公式が用いられる。

命題 1.8. (M, ω_M^2) を $m \geq 2$ 次元 \mathcal{G} - $\bar{\mathcal{G}}$ -多様体とし π は (1.2) を満たす exhaustion function とする。 $f: (M, \omega_M^2) \rightarrow (N, \omega_N^2)$ を \mathcal{G} - $\bar{\mathcal{G}}$ -多様体 (N, ω_N^2) の可微分写像とする。任意の $r \geq r_0$ に対して

$$(i) \quad (1.9) \quad \int_{M(r)} \{ 2 [\text{Trace}_{\omega_M^2} \mathcal{L}(\pi) \cdot e(f) - \langle \mathcal{L}(\pi)(\partial f), \partial f \rangle - \langle \mathcal{L}(\pi)(\bar{\partial} f), \bar{\partial} f \rangle]$$

$$+ \langle e(\partial \pi)^* \partial f, D_{1,0}^* \partial f \rangle + \langle D_{0,1}^* \bar{\partial} f, e(\bar{\partial} \pi)^* \bar{\partial} f \rangle$$

$$+ \langle e(\bar{\partial} \pi) \partial f, D_{0,1} \partial f \rangle + \langle D_{1,0} \bar{\partial} f, e(\partial \pi) \bar{\partial} f \rangle \} d\omega_M$$

$$= 2r \int_{\partial M(r)} [|\partial \pi|^2 e(f) - |e(\partial \pi)^* \partial f|^2 - |e(\bar{\partial} \pi)^* \bar{\partial} f|^2] \omega_r$$

$$\text{ここに } D_{1,0}^* = - * D_{0,1} * , \quad D_{0,1}^* = - * D_{1,0} * , \quad \mathcal{L}(\pi)(\partial f)$$

$$= g^{i\bar{k}} \pi_{,i} f_{,k}^{\alpha} \in C^{1,0}(M, f^{-1}TN^{1,0}), \quad \mathcal{L}(\pi)(\bar{\partial} f) = g^{\bar{k}i} \pi_{,i} f_{,\bar{k}}^{\alpha} \in C^{0,1}(M, f^{-1}TN^{1,0}).$$

$$(ii) \quad \text{もし } \omega_M = \sqrt{r} \partial \bar{\partial} \pi \bar{\omega} \text{ ならば}$$

$$(1.10) \quad \int_{M(r)} \eta_r \langle \mathcal{L}(\pi), D_{1,0} \bar{\partial} f \wedge \bar{D}_{1,0} \partial f \rangle \wedge \omega_M^{m-2}$$

$$= c_m \left\{ \int_{M(r)} \eta_r \langle R^N, \bar{\partial} f \wedge \partial \bar{f} \wedge \partial f \wedge \bar{\partial} \bar{f} \rangle \wedge \omega_M^{m-2} \right.$$

$$\left. + r \int_{\partial M(r)} |\bar{\partial} \pi|^2 \omega_r - (m-1) \int_{M(r)} e''(f) d\omega_M \right\}$$

ここに $\gamma_r = \mathbb{E} - r^2$, $\langle R_N, D_{1,0} \bar{\partial} f \wedge \bar{D}_{1,0} \partial \bar{f} \rangle$ は R_N と $D_{1,0} \bar{\partial} f \wedge \bar{D}_{1,0} \partial \bar{f}$ との縮約, $c_m = (m-2)! 2^m$

$$\langle R^N, \bar{\partial} f \wedge \partial \bar{f} \wedge \partial f \wedge \bar{\partial} \bar{f} \rangle$$

$$= \sum_{i < j} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^N(f) (f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta - f_j^\alpha \bar{f}_i^\beta) \overline{(f_i^\gamma \bar{f}_j^\delta - f_j^\gamma \bar{f}_i^\delta)}$$

$$|\bar{\partial} b + f|^2 = 2 \sum_{i < j} R_{\alpha\bar{\beta}}(f) (\mathbb{E}_i f^{\alpha i} - \mathbb{E}_j f^{\alpha i}) \overline{(\mathbb{E}_i f^{\beta i} - \mathbb{E}_j f^{\beta i})}$$

積分公式 (1.9), (1.10) より次の補題が従う。

補題 1.11. (i) 定理 1.5, (i) の状況の下, $f: (M, ds_M^2) \rightarrow (N, ds_N^2)$ を非定数多重調和写像とすると次の評価式が成立する。

$$(1.12) \quad r \frac{\partial}{\partial r} E(f, r) - \mu E(f, r) \geq r B(f, r)$$

$$(1.13) \quad \frac{\mu}{r} + \frac{B(f, r)}{E(f, r)} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log E(f, r)$$

但し $\mu = c_1/c_2$, r は $r \geq r_0$ なる任意の非退化値。

(ii) 定理 1.5, (ii) の状況の下, $f: (M, ds_M^2) \rightarrow (N, ds_N^2)$ を非定数調和写像とすると (1.12), (1.13) が成立する。

証明. (i). f の多重調和性より, f は

$$D_{0,1} \partial f = D_{1,0}^* \partial f = D_{1,0} \bar{\partial} f = D_{0,1}^* \bar{\partial} f = 0$$

を満す (cf. [11]). 任意の点 $x \in M$, $y = f(x) \in N$ の周りの局所座標を $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $R_{\alpha\bar{\beta}}(y) = \delta_{\alpha\bar{\beta}}$, $\mathbb{E}_{i\bar{j}}(x) = \varepsilon_i \delta_{i\bar{j}}$

を満たすように取ると, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_m$ の時

$$\begin{aligned} \text{Trace}_{\mathcal{M}_H} \mathcal{L}(\mp) \cdot e(\mp) &= \langle \mathcal{L}(\mp)(\partial \mp), \partial \mp \rangle = \langle \mathcal{L}(\mp)(\bar{\partial} \mp), \bar{\partial} \mp \rangle \\ &\geq \left(\sum_{i=2}^m \varepsilon_i \right) e(\mp) \end{aligned}$$

が成立する。この二つの事実と (1.9) より (1.12) が従う。

(1.13) は $E(\mp, r) > 0$ より (1.12) の両辺を $rE(\mp, r)$ で割る事により得られる。

(ii) $M(r)$ 上 $r < 0$ と \mp の調和性より (1.10) の左辺は非負である事が判る (cf. [9] Proposition 3)。右辺の第一項は $r < 0$ と曲率の仮定から非正である。一方任意の点 $x \in M$ において $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $\text{tr}_{g^{\alpha\beta}}(\mp(x)) = \delta_{\alpha\beta}$ とできるから

$$|\bar{\partial} \mp|^2 = 2 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i < j} |\mp_i^\alpha - \mp_j^\alpha|^2 \quad (n = \dim_{\mathbb{C}} N)$$

従って Lagrange の等式

$$\left(\sum_i |\mp_i^\alpha|^2 \right) \left(\sum_{i < j} |\mp_i^\alpha - \mp_j^\alpha|^2 \right) = \sum_{\alpha} \sum_{i < j} |\mp_i^\alpha - \mp_j^\alpha|^2 + \sum_{\alpha} \left| \sum_i \mp_i^\alpha \right|^2$$

$$\text{と } |\bar{\partial} \mp|^2 = 2 \sum_i |\mp_i|^2 \text{ より}$$

$$|\bar{\partial} \mp|^2 = |\bar{\partial} \mp|^2 e''(\mp) - |e(\bar{\partial} \mp)^* \bar{\partial} \mp|^2$$

を得る。子に関して (1.10) を用いれば, ケーラー性より

$$D_{1,0} \bar{\partial} \mp \wedge \bar{D}_{1,0} \bar{\partial} \bar{\mp} = D_{1,0} \bar{\partial} \mp \wedge \bar{D}_{1,0} \bar{\partial} \bar{\mp} \text{ が成立するから}$$

\mp に関して同様の事が成立する。両者をたして (1.12) が従い, (1.13) が従う。

証明終了

定理1.5の証明. (ii)の証明は(i)と全く同様だから(i)のみを示す. $E(\rho, r)/r^\mu$ の単調増加性は, (1.12)と臨界値が孤立している事から従う. 評価式(1.6)は(1.13)を r_0 から r まで積分して exponential と合成すれば得られる.

証明終了

さて定理1.5の条件を満たす重を持ち定数 μ を決定できるケーラー多様体の典型的例を二つ掲げておく.

例1. $A \subset \mathbb{C}^n$ を $m \geq 2$ 次元連結閉部分多様体とし, A 上のケーラー計量 ds_A^2 を \mathbb{C}^n 上のユークリッド計量 $ds_{\mathbb{C}^n}^2$ の A 上の制限として定義する. ρ を \mathbb{C}^n 上の距離関数 $\|\rho\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\rho_i|^2}$ の A への制限とする. $z_i = w_i - a_i$, $a = (a^1, \dots, a^n) \in A$ と \mathbb{C}^n の座標を取り直しておけば ρ は A 上高々非退化な臨界値しかもたず $\rho = \rho^2$ は A 上 \mathbb{C}^∞ 級の exhaustion function である. しかも $\omega_A = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \rho$ と取っているから, $c_1 = m-1$ ($\varepsilon_i = 1, 1 \leq i \leq m$), $c_2 = 1/2$ である. 故に $\mu = 2m-2$.

例2. (M, ds_M^2) を $m \geq 2$ 次元完備ケーラー多様体で pole $o \in M$ i.e. $\exp_o: T_o M \rightarrow M$ が可微分同相写像を与える, を持つと仮定する. ρ として o からの距離関数を考えると, ρ は exhaustion であり $|\partial \rho|^2 = 1/2$ on M が判る. しかもこの時 ds_M^2 の radial curvature ((M, ds_M^2) の断面曲率関数を $\text{grad } \rho$ を含む実平面に制限して得られる曲率. 従って測

地球の球面の tangential 方向については何も言っていない。) が M 上非正であると $\mathbb{E} = \mathbb{E}^2$ は M 上の C^∞ 級強多重調和関数となり, $c_1 = m-1$ が成立する (cf. [5] Proposition 1.17). 従って $\mu = 2m-2$. 更にこの場合 $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \mathbb{E}$ から導かれるケーラー計量を考えても $c_1 = m-1$ ($\varepsilon_i = 1, 1 \leq i \leq m$), $c_2 = 1/2$ が確かめられる. 従ってこの場合も $\mu = 2m-2$ を得る.

例 1, 2 において, 正則写像に関して, $E(t, r)/r^{2m-2}$ の単調増加性は容易に確かめられる (Stokes の定理と $\partial \bar{\partial} \log \mathbb{E} = \partial \bar{\partial} \mathbb{E}/r^2$ on $\partial M(r)$ を用いればよい). しかし評価式 (1.6), (1.12), (1.13) は知られているかった. 第二節で述べられる Liouville 型定理を示すのにこれらの式は重要な役割を果たす.

第二節 調和写像に関する Liouville 型定理

この節では第一節で得られたエネルギー評価を利用して得られる Liouville 型定理についてその背景をも交えるから概説する. ここで述べられる結果はもっと一般的で状況でも成立するのだが, 煩雑さを避ける為に第一節の最後で述べた二つの例にそくして述べる事にする.

まず例 1 の m 次元連結閉部分多様体 $(A, da_A) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, da_{\mathbb{C}^n})$ を考える. そこで次の量を考える.

$$n(A, r) := \text{Vol}(B(r) \cap A) / r^{2m}$$

ここで $B(r) = \{ \|z\| < r \}$ であり $V_0(B(r) \cap A)$ は $B(r) \cap A$ の d_A に関する体積である。この時 $n(A, r)$ は任意の A に対して ∞ 義単調増加関数である ($V_0(B(r) \cap A) \sim \int_{B(r) \cap A} \wedge d d c \|z\|^2$ に注意せよ)。更に次の量を考える。

$$N(A, r) := \int_2^r n(A, t) d \log t \quad (\alpha = \inf_{x \in A} \Re(x) + 1)$$

この時次が成立する。

(2.1) $A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ がアフィン代数的である為の必要十分条件は $N(A, r) = O(\log r)$ ($\Leftrightarrow n(A, r) = O(1)$, $n(A, r)$ の単調増加性より従う) である。

なおここで $n(A, r)$ の他に $N(A, r)$ を考える訳は $A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ が \mathbb{C}^n 上の正則関数の零点として定義されている時などは $n(A, r)$ より $N(A, r)$ の方が上からも下からも評価し易い事 (値分布論で言う、第一主要定理が使える) に帰因する。

今 $(A, d_A) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, d_e)$ をアフィン代数的とすると次のような Liouville 型定理が成立する事が知られている。

定理 2.2. $(A, d_A) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, d_e)$ がアフィン代数的の時次の主張 $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ が成立する。

$\alpha)$ A 上には有界非定数調和関数は存在しない

$\beta)$ $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ を既約かつ被約なコンパクト解析空間への正則写像とし, $L \rightarrow \mathbb{N}$ を \mathbb{N} 上の very ample 正則直線束とする。

もし集合 $E_f(L) = \{ \sigma \in \mathbb{R}(P(N, L)) : \text{Im} f \cap \text{supp}(\sigma) = \emptyset \}$ が $\mathbb{R}(P(N, L))$ で正の測度を持つならば定数写像である

Y) $f: A \rightarrow N$ を複素多様体 N への正則写像とする。もし N に \mathbb{C} かつ有界な強多重調和関数が存在すれば f は定数写像である。特に A 上には \mathbb{C} かつ有界な強多重調和関数は存在しない

お注意として A がアフィン代数的の場合、Y) において “ \mathbb{C} かつ有界な強多重調和関数” を “有界な多重調和関数” としても主張が成立する。更に A 上には次の性質を持つ \mathbb{C} exhaustion function ψ が存在する。

$$(2.3) \quad \bigwedge \partial \bar{\partial} \log \psi \equiv 0, \quad \partial \bar{\partial} \psi \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \partial \bar{\partial} \psi > 0 \quad \text{a.e.}$$

例えば $A = \mathbb{C}^m$ の時、 $\psi = \|z\|^2$ がそれに当たる。(2.3) を満たす ψ を求めようと思えば、 A が \mathbb{C}^m 上の分岐被覆 $\pi: A \rightarrow \mathbb{C}^m$ (π は固有) として実現できる事を見、 \mathbb{C}^m 上の $\|z\|^2$ を π で持ち上げればよい。

さて与えられた $(A, \omega_A) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{\mathbb{C}^n})$ に対して $N(A, r)$ 或いは $n(A, r)$ を考える時その増大度が最低の時 A はアフィン代数的であった。では A がアフィン代数的でない時定理 2.2 で述べられた主張 $\alpha), \beta), \gamma)$ は $N(A, r)$ 或いは $n(A, r)$ が何位の程度で増大する時まで保たれるだろうか。この方面に

関して今迄に知られている結果として、次の Sibony と Wong [8] による結果がある。まず $N(A, r)$ は A が特異点を持つ時にも定義できる量である事に注意して、

定理 2.4. $A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ を $m \geq 1$ 次元既約な解析的閉部分空間とする。この時

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N(A, r)}{(\log r)^2} < +\infty$$

ならば A 上には有界非定数正則関数は存在しない。

第一節におけるエネルギー評価の応用として A が非特異である時次の定理を示す事が出来る。

定理 2.5. $(A, \omega_A) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{\mathbb{C}^n})$ を $m \geq 2$ 次元連結閉部分多様体とする。この時

$$(*) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(A, r)}{(\log r)^2 \log \log r} < +\infty$$

ならば定理 2.2 の主張 $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ が成立する。

なお蛇足ながら $(*)$ は $\liminf_{r \rightarrow \infty} N(A, r) / (\log r)^2 (\log \log r)^p < +\infty$, $0 \leq p < 1$ でもよい。 $(*)$ を満たす $A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ でアフィン代数的でないものを構成する事はできる。

さて $L_1(r) = \log r$, $L_{j+1}(r) = L_j(\log r)$ ($j \geq 1$) とし $g_n(r) := \prod_{j=1}^n L_j(r)$ とおく時、次は成立するだろうか。

(2.6)_j $(A, \omega_A^+) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{\mathbb{C}^n})$ を定理 2.5 と同様とする。この時

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(A, r)}{\log r g_j(r)} < +\infty$$

ならば定理 2.2 の主張 $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ が成立するか？

我々の $j = 2$ 近確めた事によるが、一般の場合何故その証明が困難かという点、 $\pi = \|\pi\|_A$ が非退化とは言え臨界点を持つ為 $E(t, r)/r^{2m-2}$ の下からのより良い評価を得にくい事に帰因する。至が無限遠で臨界点をもたずしかも至が下に有界の時には (2.6)_j を任意の $j \geq 1$ に対して確認できるが、そのような $(A, \omega_A^+) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{\mathbb{C}^n})$ でアフィン代数的でないものを構成するのは大変難しく思われる(少なくとも筆者は知らない)。

さて定理 2.5 の証明を概説しよう。 $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ とともに本質的に全く同じ論法 ($(\beta), (\gamma)$ の場合も下の (2.7), (2.8) 式を示せばよい) で示されるのでここでは (α) についてのみ述べる。 M 上に非定数有界調和関数 π が存在したとして矛盾を導こう。ケーラー性より π は実数値関数としてよい。まず次の評価式が成立する。 $r \geq r_0$ なる任意の非臨界値 r に対して

$$(2.7) \quad E(t, r)^2 \leq c_1 \frac{\partial}{\partial r} \text{Vol}(B(r) \cap A) B(t, r)$$

$$(2.8) \quad \int_{r_0}^r \frac{E(t, t)}{t^{2m-1}} dt \leq c_2 N(A, r).$$

(2.7) は $2E(t, r) = \|d\phi\|_{B(r) \cap A}^2$ より部分積分をすれば ϕ の調和性から $\partial B(r) \cap A$ 上の積分のみが残り, それに ϕ の有界性と Schwarz の不等式を用いて得られる。(2.8) を得るには次の Greene と Wu (cf. [4] pp 273-274) による公式を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial B(r) \cap A} \phi^2 |d\Phi|^2 \omega_r = \int_{\partial B(r) \cap A} \phi^2 (-\Delta \Phi) \omega_r + \int_{B(r) \cap A} (-\Delta \phi^2) d\mu_M$$

の両辺に r^{2m-1} を掛けて r_0 から r まで積分する。部分積分により, $\int_{\partial B(r) \cap A} \phi^2 |d\Phi|^2 \omega_r$ の絶対連続性, $-\Delta \Phi = (-\Delta \Phi^2 - 2|d\Phi|^2) / 2\Phi$, $-\Delta \phi^2 = 4e(\phi)$, $\int_{B(r) \cap A} (-\Delta \Phi^2) d\mu_M = 2r \int_{\partial B(r) \cap A} |d\Phi|^2 \omega_r$, $-\Delta \Phi^2 = 4m$ を用いて (2.8) を得る。

仮定より $r \geq r_0$ ならば ($r_0 \gg 0$ として)

$$(2.9) \quad n(A, r) \leq C_3 \log r \log \log r$$

としてよい。(1.12), (2.7), (2.9) を用いると用いて (2.10) を示す事が出来る。

$$(2.10) \quad \int_{2r_0}^r \frac{dt}{t n(A, t)} \leq C_3 E(t, r) / r^{2m-2}$$

$$(2.11) \quad \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{E(t, t)}{t^{2m-1} g(t)} dt \right)^2 \leq C_4 \left(C_5 + \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t g(t)} \right) \times \left(\frac{E(t, r_2)}{r_2^{2m-2}} - \frac{E(t, r_1)}{r_1^{2m-2}} \right)$$

但し $r_2 > r_1 > r_0$ かつ $g(r) = \log r \cdot \log \log r$.

$r_{n+1} = \exp(\log r_n)^3$ を満たす数列 $\{r_n\}_{n \geq 1}$, $r_0 < r_1 < \dots < r_n < \dots$ を取る。 $\int_{r_n}^{r_{n+1}} dt/t^q(t) = \log 3$ であるから (2.11) と $E(t, r)/r^{2m-2}$ の単調増加性より次を得る。

$$(2.12) \quad \left(\frac{E(t, r_n)}{r_n^{2m-2}} \right)^2 \leq K \left(\frac{E(t, r_{n+1})}{r_{n+1}^{2m-2}} - \frac{E(t, r_n)}{r_n^{2m-2}} \right) \quad (n \geq 1)$$

但し $K = c_4(c_5 + \log 3) / (\log 3)^2$

(2.9), (2.10) より $r_1 > r_0$ を

$$(2.13) \quad 3K < \frac{E(t, r_1)}{r_1^{2m-2}}$$

を満たすように取る。 $a_n = E(t, r_n)/r_n^{2m-2}$ とおくと

(2.12) と (2.13) より次を得る。

$$(i) \quad 3K < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

$$(ii) \quad a_n^2 \leq K(a_{n+1} - a_n) \quad (n \geq 1)$$

従って次を得る。

$$(2.14) \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} 3^{2^i} \right) K \leq a_n \quad (n \geq 2)$$

一方 (2.8), (2.9) より $r > r_1$ ならば

$$(2.15) \quad E(t, r)/r^{2m-2} \leq K' \log \log r$$

としてよい。 $r_n = \exp(\log r_1)^{3^{n-1}}$ ($n \geq 1$) であるから

(2.15) より次が従う。

$$(2.16) \quad a_n \leq K' \log r_1 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

(2.14) と (2.16) より矛盾を得る。

これで定理 2.5 の証明は終了するのだが、前に述べた $|u|$ が下に有界の場合の証明方針も説明しておく。後に述べる例 2 の場合の結果 (cf. 定理 2.27) もこの場合と全く同じ方針で証明される。

十分大きい $r_0 \gg 0$ が存在して $A \setminus B(r_0) \cap A$ 上 $|u| \geq c > 0$ なる c が存在したと仮定する。この時 (2.6); $(j \geq 1)$ が成立する事を見よう。定理 2.5 の証明と同様に $(*)$ のみを背理法で示す。我々は (2.7), (2.8) 式から出発できる。今 $r \geq r_0$ なる r に対して

$$(2.17) \quad n(A, r) \leq c_6 g_j(r)$$

としてよい。

$$\int_{B(r) \cap A} (-\Delta u) dv_M = 2r \int_{\partial B(r) \cap A} |du|^2 \omega_r, \quad -\Delta u = 4m,$$

$|u| \geq c > 0$ より次を得る。

$$(2.18) \quad \frac{\partial}{\partial r} V(r) \leq c_7 V(r)/r \quad (r \geq r_0)$$

(2.7), (2.17), (2.18) より次を得る。

$$(2.19) \quad \frac{c_7 E(t, r)}{r^{2m-1} g_j(r)} \leq \frac{B(t, r)}{E(t, r)} \quad (r \geq r_0)$$

定理 1.5, (1.6) と (2.19) より次を得る。

$$(2.20) \quad \frac{c_r e^{\chi_f(r)}}{r g_j(r)} \leq \frac{B(f, r)}{E(f, r)} \quad (r \geq r_0)$$

(2.20) の両辺を r_0 から r で積分すれば, (1.7) より

$$(2.21) \quad c_r \int_{r_0}^r \frac{e^{\chi_f(t)}}{t g_j(t)} dt \leq \chi_f(r)$$

を得る。一方 (2.8) と (2.17) より

$$E(f, r) / r^{2m-2} \leq c_r g_j(2r)$$

だから (2.21) と (1.6) より次を得る。

$$(2.22) \quad \chi_f(r) \leq \log g_j(2r) + O(1) \quad (r \geq r_0)$$

ところで (2.21) において $\chi_f(r)$ を繰り返し下から評価する事により

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi_f(r) / \log g_j(2r) = \infty$$

を得る。これは (2.22) に矛盾する。

以上で (2.6)_j が $\forall \epsilon \geq c > 0$ という条件の下示された。

さて例 2 で述べた $m \geq 1$ 次元完備ケーラー多様体 (M, ω_M) で pole $o \in M$ を持つ場合には, $\forall (\alpha) = d(o, x)$ に対して $\forall \epsilon > 0$ $\epsilon = 1/2$ が成立する。しかも $\forall \epsilon$ は完備性により M を exhaust する pole を持つという条件 i.e. $\exp_o: T_o M \rightarrow M$ が可微分同相写像; $\forall \epsilon$ と ϵ が一点であってもかなり強い条件である。

けれどもこのよりの多様体上では比較的(幾何学的)関数論が展開し易い。

$m=1$ の時次の結果が知られている (cf. [5] Propositions 7.5, 7.6).

定理 2.23. (M, ω_M) を実 2 次元完備リーマン多様体で $\text{pole } 0 \in M$ を持つと仮定する。 $\Phi(x) = d(0, x)$ とおく。 ω_M の断面曲率は M 上致る所非正とする。

(i) 断面曲率 K があるコンパクト集合の外で

$$K(z) \leq - \frac{1 + \varepsilon}{\Phi(z)^2 \log \Phi(z)} \quad (\varepsilon > 0)$$

を満たすならば, M は単位円板の複素構造を持つ。

(ii) M のあるコンパクト集合の外で

$$K(z) \geq - \frac{1}{\Phi(z)^2 \log \Phi(z)}$$

を満たすならば, M は複素平面の複素構造を持つ。

$m \geq 2$ の時には定理 2.23 のように美しい結果は知られていないが次の事実は知られている (cf. [5] p.56 Theorem C p.99 Theorem F).

定理 2.24. (M, ω_M) を $m \geq 2$ 次元完備ケーラー多様体

とは出来る。つまり (ii) の場合 $k_2(r) \equiv 0$ かつ M のあるコレ
 パート集合の外で $-1/r^2 \log r \sim -k_1(r)$ としても定理 2.
 23 におけるように (ii) との差が出て来るかどうかは定理 2.
 24 からは判らない。なお (ii) において \mathbb{R}^2 は M 上 強多 重 共 調 和 と
 なっている。また (2.25) は $V_0(B(r), \omega_M) / r^{2m} = O(1)$
 を意味している。

さて定理 2.24 の (ii) の場合 M 上でどのような Liouville 型定
 理が成立するかと言うと, Moser [7] の結果から次の事実が
 判る。

定理 2.26. (M, ω_M) を定理 2.24, (ii) の仮定を満たす
 ものとする。この時 M 上には正値非定数調和関数は存在し
 ない。特に M 上には非定数有界調和関数は存在しない。

この結果は性質 (2.25) = ω_M に関するラプラシアンの一
 様楕円性から導かれるのであって, この一様楕円性が言え
 るいと Moser の理論は使える。一方定理 2.24 の (ii) の仮定を
 満たす (M, ω_M) は \mathbb{C}^m に双正則かどうかは判らないが (実際
 に \mathbb{C}^m に双正則 又は 双正則的に等長になる場合が知られて
 いる [6] [10]) 十分 \mathbb{C}^m に近いと考えられるから, その他
 にも関数論的に \mathbb{C}^m に近い性質を持つのでは無いかと考えら
 れる。この点に関して次の定理が成立する。

定理 2.27. (M, ω_m^2) を $m \geq 2$ 次元完備ケーラー多様体で pole $o \in M$ をもつとする。この時次の (i), (ii) のいずれかの仮定の下で, Φ^2 ($\Phi(x) = d(o, x)$) は M 上強多重要調和であり, 定理 2.2 の主張 $\alpha), \beta), \gamma)$ が成立する。但し $\alpha)$ における調和性は Φ^2 より導かれるケーラー計量に関する調和性である。

(i) 任意の $x \in M$ に対して

$$|\text{radial curvature at } x| \leq \frac{\varepsilon}{(\Phi(x) + \gamma)^2 \log(\Phi(x) + \gamma)}$$

但し $\gamma > \varepsilon$ で ε は次元 m と γ に依存して決まる 1 より十分小さい正定数

(ii) radial curvature は M 上致る所非正でコンパクト集合の外では

$$-\frac{\varepsilon}{\Phi(x)^2 \log \Phi(x)} \leq \text{radial curvature at } x$$

が成立。但し ε は m に依存して決まる 1 より十分小さい正定数である。

ここで $\alpha)$ における調和性が Φ^2 より導かれるケーラー計量に依るものであるという事は気持ちが良いけれども, 定理 2.24, (iii) と定理 2.27 の (ii) を合わせれば $m \geq 2$ の

場合でも ($0 < \varepsilon \ll 1$) ならば \mathbb{C}^m が有界な強多重調和関数の存在, 非存在に関して判別できた事になる。この定理の証明の手えられたケーラー計量ではなく, $\bar{\partial}$ 重 \mathbb{C}^m から導かれるケーラー計量を考える事により示され, 原理的には (2.6) の証明と同じ方法による。また条件 (i) 或いは (ii) は $\bigwedge \bar{\partial} \log \mathbb{C}^m$ が無限遠で 0 に収束する事を意味しかつその速度を指定している事に他ならない。つまり (2.3) のような $\bigwedge \bar{\partial} \log \mathbb{C}^m \equiv 0$ という条件は強すぎると思われるので, そのかわりに無限遠で $\bigwedge \bar{\partial} \log \mathbb{C}^m \rightarrow 0$ という条件に置き換えている訳である。ちなみに $\bar{\partial}$ 重 \mathbb{C}^m から導かれるケーラー計量に関する $M(r)$ の体積 $V(r)$ に関して (i), (ii) いずれの場合にも $V(r)/r^{2m} = O((\log r)^{\varepsilon'})$ (ε' は (i), (ii) の ε に依存した 1 より十分小さな正定数) が成立している。従って定理 2.27 も基本的に定理 2.5 と同じ考え方に従っている事になる。

さて最後に定理 2.27 から予想される少し無責任な予想を述べてこの論説を終える事にする。なおこの論説の詳細はいずれ論文として発表する予定である。

予想. (M, ω_M) を $m \geq 2$ は元完備ケーラー多様体とし $\text{pole } o \in M$ を持つとする。 $\mathbb{C}^m(x) = d(o, x)$ とおく。はのい
ずれかの仮定の下で M は \mathbb{C}^m に双正則であるか?

(cf. [5] [6] [10])

(i) 任意の点 $x \in M$ で

$$|\text{Sectional curvature at } x| \leq \frac{\varepsilon}{(\Phi(x)+\gamma)^2 \log(\Phi(x)+\gamma)}$$

が $\gamma > 1$, $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して成立する

(ii) Sectional curvature は M 上 致る所非正であるコンパクト集合の外で

$$-\frac{\varepsilon}{\Phi(x)^2 \log \Phi(x)} \leq \text{Sectional curvature at } x$$

が $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して成立する。

参考文献

[1] Bedford, E., Taylor, B. A., Variational properties of the complex Monge-Ampère equation I., Dirichlet principle, Duke Math. J. 45 (1978), 375-403.

[2] Bedford, E., Taylor, B. A., Two applications of a nonlinear integral formula to analytic functions, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 463-465.

- [3] Donnelly, H., Xavier, F., On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 106 (1984), 169-185.
- [4] Greene, R. E., Wu, H., Integrals of subharmonic functions on manifolds of non-negative curvature, Invent. Math. 27 (1974), 265-298.
- [5] Greene, R. E., Wu, H., Function theory on manifolds which possess a pole, Lecture Notes in Math. 697, Springer Verlag, 1979.
- [6] Mok, N., Siu, Y. T., Yau, S. T., The Poincaré-Lelong equation on complete Kähler manifolds, Comp. Math. 44 (1981), 183-218.
- [7] Moser, J., On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 577-591.
- [8] Sibony, N., Wong, P. M., Some remarks on the Casorati-Weierstraß theorem, Ann. Polonici Math. 39 (1981), 165-174.

- [9] Siu, Y. T., The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. of Math.* 112 (1980), 225-264.
- [10] Siu, Y. T., Yau, S. T., Complete Kähler manifolds with non-positive curvature of faster than quadratic decay, *Ann. of Math.* 105 (1977), 225-264.
- [11] Takegoshi, K., A non-existence theorem for pluriharmonic maps of finite energy, *Math. Z.*, 192 (1986), 21-27.