

BMO における L^∞ の一側面

富山大・理 風巻 紀彦 (Norihiko Kazamaki)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; (\mathcal{F}_t))$ を通常の条件をみたす確率系とし, (\mathcal{F}_t) に
 属する martingale の sample continuity を仮定する。次に, M
 を martingale, λ を実数とし

$$Z_t^{(\lambda)} = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_t) \quad (0 \leq t < \infty)$$

とおく。簡単のため, $Z^{(1)}$ を Z で表すことにする。特に, M が
 uniformly integrable の場合, $1 \leq p < \infty$ に対し

$$\|M\|_{BMO_p} = \sup_T \|E[|M_\infty - M_T|^p | \mathcal{F}_T]\|^{1/p}_\infty$$

とおく。ここで, T は stopping time である。この有限のとき,
 M を BMO-martingale といい, その全体は BMO で表される。
 周知のように, $\|M\|_{BMO_p}$ は BMO 上の equiv. norms を
 なしている。定義より $\|M\|_{BMO_1} \leq 2\|M\|_\infty$ だから, $L^\infty \subset BMO$
 となる。しかも, trivial case を除き, L^∞ は BMO において
 dense ともないし closed ともない (Dellacherie-Meyer-Yor
 [1])。

本稿では, L^∞ と逆 Hölder 不等式の関連について述べる。

逆 Hölder 不等式とは.

$$(R_p) \quad \exists C_p > 0, \forall T, \mathbb{E}[Z_\infty^p | \mathcal{F}_T] \leq C_p Z_T^p$$

のことで, 特に $\mathbb{E}[Z_\infty] = 1$ のとき, 次の条件が成立している:

$$M \in \text{BMO} \iff \exists p > 1, Z \in (R_p)$$

なお, $M \in \text{BMO}$ から, $\mathbb{E}[Z_\infty] = 1$ が簡単に表れる。以下, この条件を仮定して話を進めよう。

まず, M を unif. integ. martingale とし.

$$\alpha(M) = \sup \{ \alpha > 0 : \exists C_\alpha > 0, \forall T, \mathbb{E}[\exp\{\alpha |M_\infty - M_T|\} | \mathcal{F}_T] \leq C_\alpha \}$$

と置く。従って, " $M \in \text{BMO} \iff \alpha(M) > 0$ " である。

次に, $1 \leq p < \infty$ に対し, $d_p(M, N) = \|M - N\|_{\text{BMO}_p}$ ($M, N \in \text{BMO}$) とする。

このとき:

補題 1 (Emery [2])

$$\frac{1}{4 d_1(M, L^\infty)} \leq \alpha(M) \leq \frac{4}{d_1(M, L^\infty)} \quad (M \in \text{BMO})$$

従って, " $M \in \overline{L^\infty} \iff \alpha(M) = \infty$ " である。

$$\text{定理 1} \quad M \in \overline{L^\infty} \iff (\forall \lambda \in \mathbb{R}) Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p)$$

∴

→: 仮定により $\alpha(M) = \infty$ 。従って, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}, p > 1$ に対し

$$\mathbb{E}[Z_\infty^{(\lambda)p} | \mathcal{F}_T] = Z_T^{(\lambda)p} \mathbb{E}\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \mid \mathcal{F}_T\right]$$

$$\leq Z_T^{(\lambda)^p} \mathbb{E}[\exp\{|\lambda|p|M_\infty - M_T|\} | \mathcal{F}_T]$$

$$\leq C_{\lambda,p} Z_T^{(\lambda)^p}$$

$$\text{i.e., } Z^{(\lambda)} \in (R_p)$$

←: $M \in \text{BMO}$ 故に

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists C_0 > 0 : \forall T, \mathbb{E}[\exp\{\frac{1}{2}\varepsilon_0(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)\} | \mathcal{F}_T] \leq C_0$$

次に, 任意の $\alpha > 0$ に対し, $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < \min\{2\alpha, \frac{\varepsilon_0}{2\alpha}\}$ とし,

$p = \frac{2\alpha}{\varepsilon}$ とおくと, $1 < p < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2}$ となる。Schwarz's inequality を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp\{\alpha(M_\infty - M_T)\} | \mathcal{F}_T] &= \mathbb{E}[\exp\{\alpha(M_\infty - M_T) - \frac{\varepsilon_0}{4}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)\} \\ &\quad \times \exp\{\frac{\varepsilon_0}{4}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)\} | \mathcal{F}_T] \\ &\leq \mathbb{E}[\exp\{2\alpha(M_\infty - M_T) - \frac{\varepsilon_0}{2}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)\} | \mathcal{F}_T]^{1/2} \\ &\quad \times \mathbb{E}[\exp\{\frac{\varepsilon_0}{2}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)\} | \mathcal{F}_T]^{1/2} \\ &\leq C_0^{1/2} \mathbb{E}[\exp\{\frac{2\alpha}{\varepsilon}(\varepsilon M_\infty - \varepsilon M_T) - \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon^2}(\langle \varepsilon M \rangle_\infty - \langle \varepsilon M \rangle_T)\} | \mathcal{F}_T]^{1/2} \\ &\leq C_0^{1/2} \mathbb{E}[\left\{\frac{Z_\infty^{(\varepsilon)}}{Z_T^{(\varepsilon)}}\right\}^p | \mathcal{F}_T]^{1/2} \\ &\leq C_{\alpha,\varepsilon}. \end{aligned}$$

同様の計算により, $\mathbb{E}[\exp\{-\alpha(M_\infty - M_T)\} | \mathcal{F}_T] \leq C_0^{1/2} \mathbb{E}[\left\{\frac{Z_\infty^{(-\varepsilon)}}{Z_T^{(-\varepsilon)}}\right\}^p | \mathcal{F}_T]^{1/2}$

を得る。従って

$$\forall \lambda > 0, \exists C_\alpha > 0 : \forall T, \mathbb{E}[\exp\{\alpha|M_\infty - M_T|\} | \mathcal{F}_T] \leq C_\alpha$$

つまり, $\alpha(M) = \infty$. このとき, 補題 1 より, $M \in \overline{L^\infty}$ \square

注意 1. 上記証明より, 実際は次の成立が分る:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \lambda (|\lambda| < \delta), \quad Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \implies M \in \bar{L}^\infty$$

注意 2 $\forall \lambda > 0, \quad Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \iff M \in \bar{L}^\infty.$

さらに, $Z, Z^{(-1)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \iff M \in \bar{L}^\infty.$ 以下に, これを例証する。

$B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ を 1-dim. Brownian Motion on (Ω, \mathcal{F}, Q) , $B_0 = 0$, とし, $\tau = \inf\{t : |B_t| = 1\}$ とおく。このとき, $E_Q[\exp(\frac{\pi^2}{8}\tau)] = \infty$ ([4]) (ただし, E_Q は Q に束する平均)。次に, $dP = \exp(B_\tau - \frac{\tau}{2})dQ$ とおくと, 明らかに P は確率測度である。ここで Girsanov の変換 $M = 2B^\tau - 2\langle B^\tau \rangle$ を考えよう。 M は BMO-martingale/ P で $\langle M \rangle = 4\langle B^\tau \rangle$ である ([5])。条件付平均の定義により, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$, $p > 1$ に対し

$$\begin{aligned} E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \mid \mathcal{F}_T\right] &= E_Q\left[\exp\left\{(B_\tau - B_{\tau \wedge T}) - \frac{1}{2}(\tau - \tau \wedge T)\right\}\right. \\ &\quad \times \exp\left\{p\lambda(M_\infty - M_T) - \frac{p}{2}\lambda^2(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T)\right\} \mid \mathcal{F}_T\right] \\ &= E_Q\left[\exp\left\{(1+2p\lambda)(B_\tau - B_{\tau \wedge T})\right\}\right. \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(4p\lambda^2 + 4p\lambda + 1)(\tau - \tau \wedge T)\right\} \mid \mathcal{F}_T\right] \end{aligned}$$

従って, $4p\lambda^2 + 4p\lambda + 1 \geq 0$ (i.e., $|\lambda + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2\sqrt{p}}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$) ならば

$$E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \mid \mathcal{F}_T\right] \leq \exp\{2(1+2p|\lambda|)\}.$$

例えば, $\lambda > 0$ 又は $\lambda \leq -1$ のとき, $Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p)$ 。特に $Z, Z^{(-1)}$ は

すべての (R_p) 条件を満たしている。

他方, $-1 < \lambda < 0$ のとき, $p_\lambda = \frac{1 + \pi^2/4}{1 - (2\lambda + 1)^2}$ とおけば, $p_\lambda > 1$ で

$$-\frac{1}{2}(4p_\lambda\lambda^2 + 4p_\lambda\lambda + 1) = \frac{\pi^2}{8} \text{ となるから.}$$

$$E[\{Z_\infty^{(\lambda)}\}^{p\lambda}] \geq \exp\{-(1+2p)\} \cdot E_Q[\exp(\frac{\pi^2}{8}z)] = \infty.$$

つまり, $-1 < \lambda < 0$ のとき, $Z^{(\lambda)}$ は, $(R_{p,\lambda})$ 条件をみたさない。従って, 定理 1 により $M \notin \bar{L}^\infty$ 。実際には, 少し計算すると

$$d_1(M, L^\infty) \geq \frac{4}{4 + \pi^2}$$

が得られる。

さて, 次に, Z に対する (R_p) 条件が $\text{dist.}(M, L^\infty)$ に依存することを述べよう。先ず

$$\Phi(p) = \left\{ 1 + \frac{1}{p^2} \log \frac{2p-1}{2(p-1)} \right\}^{1/2} - 1 \quad (1 < p < \infty)$$

とおく。明らかに, Φ は *conti. decreases.* かつ $\Phi(1+0) = \infty, \Phi(\infty) = 0$ 。

補題 2 $\|M\|_{BMO_2} < \Phi(p) \implies Z \in (R_p)$.

∴

本質的には, Emery's idea ([3]) に従って示す。便宜上

$$n(M) = 2\|M\|_{BMO_1} + \|M\|_{BMO_2}^2$$

とおく。このとき

$$n(M) \leq (\|M\|_{BMO_2} + 1)^2 - 1 < \frac{1}{p^2} \log \frac{2p-1}{2(p-1)} \quad \text{i.e., } 0 < \frac{2(p-1)}{2p-1} e^{p^2 n(M)} < 1.$$

$$K_{p,M} = 2 / \left\{ 1 - \frac{2(p-1)}{2p-1} e^{p^2 n(M)} \right\} \quad \text{とおき, 先ず}$$

$$(*) \quad E[Z_\infty^p] \leq K_{p,M}$$

を示す。

$n(M^T) \leq n(M)$ 故に $K_{p,M^T} \leq K_{p,M}$ 。従って, あらかじめ Z を有

界と仮定できる。次に、 $\delta = \exp\{-\phi n(M)\}$ とおくと、任意の stopping time T に対し

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{Z_\infty}{Z_T} < \delta \mid \mathcal{F}_T\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\delta} < \frac{Z_T}{Z_\infty} \mid \mathcal{F}_T\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\log \frac{1}{\delta} < -(M_\infty - M_T) + \frac{1}{2}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \mid \mathcal{F}_T\right) \\ &\leq \frac{1}{\phi n(M)} \mathbb{E}\left[|M_\infty - M_T| + \frac{1}{2}(\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_T) \mid \mathcal{F}_T\right] \\ &\leq \frac{1}{2\phi n(M)} \cdot n(M) = \frac{1}{2\phi} \end{aligned}$$

$$\text{i.e., } \mathbb{P}\left(\frac{Z_\infty}{Z_T} \geq \delta \mid \mathcal{F}_T\right) \geq 1 - \frac{1}{2\phi}$$

いま $\lambda > 1$ を任意にとり、 $T = \inf\{t : Z_t > \lambda\}$ とおく。このとき、 $Z_T = \lambda$ on $\{T < \infty\}$ だから

$$\mathbb{P}(Z_\infty \geq \delta \lambda \mid \mathcal{F}_T) \geq \left(1 - \frac{1}{2\phi}\right) \mathbb{I}_{\{T < \infty\}}.$$

$\{Z_\infty > \lambda\} \subset \{T < \infty\}$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_\infty : Z_\infty > \lambda] &\leq \mathbb{E}[Z_\infty : T < \infty] \\ &\leq \mathbb{E}[Z_T : T < \infty] \\ &\leq \lambda \mathbb{P}(T < \infty) \\ &\leq \frac{2\phi}{2\phi - 1} \lambda \mathbb{P}(Z_\infty \geq \delta \lambda). \end{aligned}$$

右端に、 $(\phi - 1)\lambda^{\phi - 2}$ を掛けて λ に索して区間 $[1, \infty)$ 上で積分すると

$$\mathbb{E}[Z_\infty (Z_\infty^{\phi - 1} - 1) : Z_\infty > 1] \leq \frac{2\phi}{2\phi - 1} \cdot \frac{\phi - 1}{\phi} \mathbb{E}\left[\left(\frac{Z_\infty}{\delta}\right)^\phi - 1 : Z_\infty > \delta\right]$$

$\delta = e^{-\phi n(M)}$ だから

$$\mathbb{E}[Z_\infty^\phi : Z_\infty > 1] \leq \left\{1 + \frac{2(\phi - 1)}{2\phi - 1} e^{\phi^2 n(M)}\right\} / \left\{1 - \frac{2(\phi - 1)}{2\phi - 1} e^{\phi^2 n(M)}\right\}$$

これを整理すると (*) のある。

次に T を fix し, $A \in \mathcal{F}_T, \mathbb{P}(A) > 0$ とし

$$M'_t = M_{T+t} - M_T, \quad \mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t}, \quad \mathbb{P}'(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

とおくとき, M' は (\mathcal{F}'_t) -martingale / \mathbb{P}' , $\langle M' \rangle'_t = \langle M \rangle_{T+t} - \langle M \rangle_T$,

従って, $\|M'\|_{\text{BMO}_2(\mathbb{P}')} \leq \|M\|_{\text{BMO}_2}$, $\exp(M'_t - \frac{1}{2}\langle M' \rangle'_t) = Z_{T+t}/Z_T$,

$K_{p,M'} \leq K_{p,M}$ となる。このとき (*) より

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p\right] \leq K_{p,M} \quad \text{i.e.,} \quad \mathbb{E}\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p : A\right] \leq K_{p,M} \mathbb{P}(A).$$

換言すべし, $\mathbb{E}[Z_\infty^p | \mathcal{F}_T] \leq K_{p,M} Z_T^p \quad \square$

定数 $K > 0$ に対し, $L_K^\infty = \{M : |M| \leq K\}$ とおく。このとき:

定理 2 $1 < p < \infty$ に対し,

$$d_2(M, L_K^\infty) < e^{-K} \Phi(p) \implies Z \in (\mathcal{R}_p)$$

∴

仮定により, $\exists N \in L_K^\infty : \|M - N\|_{\text{BMO}_2} < e^{-K} \Phi(p)$. 簡単のため

め $X = M - N$ とおく。測度の変換 $d\hat{\mathbb{P}} = \exp(N_\infty - \frac{1}{2}\langle N \rangle_\infty) d\mathbb{P}$ を

施すことにより, $\hat{X} \equiv X - \langle X, N \rangle$ は martingale / $\hat{\mathbb{P}}$ で $\langle \hat{X} \rangle =$

$\langle X \rangle$ となる。 \hat{X} に対応する exponential martingale / $\hat{\mathbb{P}}$ を都合

により $\mathcal{E}(\hat{X})$ で表すと

$$Z = \exp(N - \frac{1}{2}\langle N \rangle) \cdot \mathcal{E}(\hat{X}).$$

がなりたつ。このとき,

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p \mid \mathcal{F}_T\right] &= E\left[\exp\left\{(\phi-1)\left[(N_\infty-N_T)-\frac{1}{2}(\langle N \rangle_\infty-\langle N \rangle_T)\right]\right\}\right. \\
&\quad \left.\times \left\{\frac{\varepsilon(\hat{X})_\infty}{\varepsilon(\hat{X})_T}\right\}^p \cdot \exp\left\{(N_\infty-N_T)-\frac{1}{2}(\langle N \rangle_\infty-\langle N \rangle_T)\right\} \mid \mathcal{F}_T\right] \\
&\leq e^{2(\phi-1)K} \hat{E}\left[\left\{\frac{\varepsilon(\hat{X})_\infty}{\varepsilon(\hat{X})_T}\right\}^p \mid \mathcal{F}_T\right]
\end{aligned}$$

と 3 2''

$$\begin{aligned}
\hat{E}[\langle \hat{X} \rangle_\infty - \langle \hat{X} \rangle_T \mid \mathcal{F}_T] &= E[(\langle X \rangle_\infty - \langle X \rangle_T) \exp\{(N_\infty - N_T) - \frac{1}{2}(\langle N \rangle_\infty - \langle N \rangle_T)\} \mid \mathcal{F}_T] \\
&\leq e^{2K} E[\langle M-N \rangle_\infty - \langle M-N \rangle_T \mid \mathcal{F}_T] \\
&\leq e^{2K} \|M-N\|_{BMO_2}^2 < \Phi(\phi)^2
\end{aligned}$$

$$\text{i.e., } \|\hat{X}\|_{BMO_2(\hat{\mathbb{F}})} < \Phi(\phi)$$

従って, 補題 2 により, $\varepsilon(\hat{X}) \in (R_p)$. つまり, $Z \in (R_p)$. \square

注意 3 条件 (i) $\langle M-N, N \rangle = 0$ (ii) $\|M-N\|_{BMO_2} < \Phi(\phi)$ をみたす $N \in \overline{L}^\infty$ が存在するとき, $Z \in (R_p)$ である。これは条件 (i) から, $Z = \exp(N - \frac{1}{2}\langle N \rangle) \cdot \exp(M-N - \frac{1}{2}\langle M-N \rangle)$ かなりなることに注意し, 定理 1, 定理 2 を適用すれば比較的簡単に証明できる。

参考文献

- [1] C. Dellacherie, P.A. Meyer and M. Yor, Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sémin. Prob. XII Lecture Notes in Math. 649 (1978), 98-113

- [2] M. Emery, Le théorème de Garnett-Jones d'après Varopoulos, *Sém. Prob. XV, Lecture Notes in Math.* 850 (1981), 278-284.
- [3] M. Emery, Une définition faible de BMO, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 21-1 (1985), 59-71.
- [4] K. Ito and H. P. McKean, Jr, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer-Verlag, New York, 1964
- [5] N. Kazamaki, Martingale の理論, *Seminar on Probability*, vol. 51, 1981.