数理解析研究所講究録
627巻 1987年 89-93

マルチンゲール差の級数について

土倉 保

Tamotsu TSUCHIKURA

(東京電機大・理工)

1. 正規直交系 $\{\varphi_n\}$ による直交級数

$$\sum a_n \varphi_n(x) \qquad (\{a_n\} \in R^\infty) \tag{1}$$

および，マルチンゲール差の級数

$$\sum d_n \tag{2}$$

を考える．マルチンゲール差 $\{d_n\}$ が特に独立であるときは上の級数(2)またはその部分和の列について収束性，大数の法則等詳細な結果が知られているが，その多くはまた独立性を仮定しない(2)の場合にも成立，もしくは適当な条件で拡張されている．しかし L^2 可積分性を仮定しておいても(1)と(2)の間にはかなり挙動の異なることがある．この間に位置するような概念がほしいものである．

2. 上の2級数(1),(2)を対比するために(1)については1点 x における挙動でなく，ある正測度の集合上での挙動，(2)については正の確率をもつ挙動を考える．

(1)について絶対収束性 $\sum|a_n\varphi_n(x)|<\infty$，$(x\in E,\ m(E)>0)$ は $\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(x)=s_n(x)$ とするとき $\sum|s_n(x)-s_{n-1}(x)|<\infty$ と書くことができる．これは数列 $\{s_n\}$ の収束状況の有界変動性

を示すものである．これをより一般にして $\sigma_n=(s_1+\cdots+s_n)/n$ とするとき，

$$\sum|\sigma_n-\sigma_{n-1}|<\infty \quad \sim \quad \sum\frac{|\sigma_n-s_n|}{n}<\infty \tag{3}$$

を調べることが考えられる．$\{\sigma_n\}$ の有界変動性で $|C,1|$ 絶対収束という．さらに (C,α) 平均 σ_n^α を考えて

$$\sum|\sigma_n^\alpha-\sigma_{n-1}^\alpha| \sim \sum\frac{|\sigma_n^\alpha-\sigma_n^{\alpha-1}|}{n} \tag{4}$$

の収束性も考えられる．

一方 (1) の $\sum a_n\varphi_n$ が L^2 の直交級数（フーリエ展開）であるときはパーセバルの等式から $\sum a_n^2<\infty$ であるが，このときは

$$\sum\frac{(\sigma_n-s_n)^2}{n}<\infty, \quad \text{a.e.} \tag{5}$$

より正確には $\int\sum(\sigma_n-s_n)^2/n<\infty$ である．そこで (5) に現われた指数 2 と σ_n, s_n をより一般にして

$$\sum\frac{|\sigma_n^\alpha-\sigma_n^{\alpha-1}|^p}{n} \tag{6}$$

の収束性を調べることも収束あるいは総和性の一つの状況説明であり，Littlewood-Paley から始まる多くの研究がある．ここで $\alpha>\frac{1}{2}$，$p\geqq1$ で $\alpha=\frac{1}{2}$，$p=1$ は挙動が変化する一つの臨界インデックスと考えられている．

以下では $\alpha=1$，$p\geqq1$ の場合を述べる．

3. 簡単のために次のようにおく.

$$\Lambda^p \equiv \sum |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^p \sim \sum \frac{|\sigma_n - s_n|^p}{n} \sim \sum_n \frac{1}{n^{1+p}} \left|\sum_{j=1}^{n} j a_j \varphi_j\right|^p$$

マルチンゲール差についても同様で $s_n = \sum_{j=1}^{n} d_j$, $\sigma_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}$ とする。従って $\Lambda^p \equiv \sum_n \frac{1}{n^{1+p}} \left|\sum_{j=1}^{n} j d_j\right|^p$ などである. なお上の"〜"は収束性が同じであるという意味で, 単なる式の変形である. 同様に

$$\Pi^p \equiv \sum |s_{2^{n+1}} - s_{2^n}|^p \sim \sum_n \left|\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} a_j \varphi_j\right|^p \text{ または} \sim \sum_n \left|\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} d_j\right|^p$$

とおく.

<u>定理1.</u> $p \geqq 1$ とするとき

(i) $\sum a_n \varphi_n$ について, もし $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} a_j^2\right)^{p/2} < \infty$ ならば Λ^p, Π^p はともに a.e. 収束する.

(ii) $\sum d_n$ についても同様で, もし $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} E(d_j^2)\right)^{p/2} < \infty$ ならば $\Lambda^p, \Pi^p < \infty$, a.e.

<u>定理2</u> マルチンゲール差 $\{d_n\}$ が独立確率変数列になっているときは, もし Λ^p, Π^p のいずれかが正の確率で収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} E(d_j^2)\right)^{p/2} < \infty$.

これらはそれぞれ Beppo-Levi の定理の利用，Hinčin の定理の利用で示されることである．

次に Λ^p, Π^p の相互関係については，Golubov の問題というのがあって，それは一般の直交級数 (1) に対して Λ^1 と Π^1 は a.e. で収束，発散が同値ではないかというのであるが，これについては既に Tandori が否定的な結論を述べている．[2]

しかし (2) のマルチンゲール差級数については次の結果が知られている．

<u>定理 3.</u> (吾妻) マルチンゲール差級数 $\sum d_n$ に対しては

$$E[\Lambda^p] < \infty \quad , \quad E[\Pi^p] < \infty$$

は同値である．[1]

<u>定理 4.</u> (吾妻) マルチンゲール差級数 $\sum d_n$ について，もし $E[\sup_n |\sum_{j=1}^n d_j|^p] < \infty$ ならば Λ^p, Π^p は a.e. で同時に収束あるいは発散する．($p \geqq 1$ であるが，特に $p > 1$ のときは Doob の不等式から仮定を L^p 有界，すなわち $\sup_n E[|\sum_{j=1}^n d_j|^p] < \infty$ としてよい)．[1]

4. 1) Λ^1 と Π^1 の同値性については一般直交級数では成立しないが，マルチンゲール差の級数では成立している．そこで特殊な直交系として余弦系を考えたとき，すなわち $\sum a_n \cos nx$ については a.e. で Λ^1 と Π^1 は同値であるかを調

べたことがある．しかし $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$ という仮定だけでは同値でない例は得られたが，L^2 すなわち $\sum a_n^2 < \infty$ となる例ではない．[3]

2) フーリエ級数 $\mathfrak{S}(f)$ の絶対収束性については Bernstein の定理があり，$f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha > \frac{1}{2})$ が一つの十分条件であることが知られている．これのアナログとしては $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha > 0)$ が Π^1，$\Lambda^1 < \infty$（すべての点で）の十分条件である．この結果は，$\Pi^1 < \infty$ は Bosanquet の結果であるが，$\Lambda^1 < \infty$ は明示されている文献は見当らないようである．

文献

[1] K. Azuma, Absolute summability of martingale sequences, 宮城教育大紀要 18 (1983) 1-5

[2] K. Tandori, On a problem of B. I. Golubov, Analysis Math., 6 (1980) 157-164

[3] T. Tsuchikura, On the absolute summability of trigonometric series, Analysis Math., 12 (1986) 77-84