数理解析研究所講究録
627巻 1987年 83-88

Optimal Switching for Alternating Processes

愛媛大学・教養部　森本宏明　(Hiroaki Morimoto)

本稿では optimal switching problem について、Bensoussan-Lions [2] による impulsive control の idea に基づき、Dellacherie-Meyer [3] の martingale theory を手法として解くことを考える。

Notations ――――――

$(\Omega, \mathscr{F}, P; (\mathscr{F}_t))$: a complete prob. space with usual conditions

$W = \{x = (x_t) : \text{r-cont, bounded, } (\mathscr{F}_t)\text{-adapted process}\}$

$\|x\| = \text{P-ess sup}(\sup_t |x_t|)$, $x_\infty = \liminf_{t\to\infty} x_t$

$\Phi(S) = \{T : \text{stopping time, } T \geqq S\}$ for s.t. S

問題を次のように定式化する。

F.1 Switching strategy $\pi = (\{T_n\}, \{\theta_n\})$ とは

(a) $T_n \in \Phi(0) \uparrow \infty$, $T_0 = 0$, $T_n + q \leqq T_{n+1}$ ($q \geqq 0$: fixed)

(b) θ_n : $\mathscr{F}_{T_n}$-measurable r.v. taking values in $D = \{1, 2, \ldots, d\}$,
$\theta_0 = 1$, (d:given pos. integer)

なる $\{T_n\}$ と $\{\theta_n\}$ の組である。 Switching strategies π の全体の集合を Π で表す。

F.2 各 $\pi \in \Pi$ に対して cost function $J(\pi)$ を次式で定義する。

$$J(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\int_{T_{n-1}}^{T_n} e^{-\alpha r} f(\theta_{n-1};r)dr + e^{-\alpha T_n}(k+c(\theta_{n-1},\theta_n))\right]$$

ここで

$$f(i;\cdot) = f_i(\cdot) \in W, \quad f_i \geqq 0,$$

$$k \geqq 0, \quad c(i,j) \geqq 0, \quad i,j \in D.$$

F.3　目的は optimal switching strategy $\pi^* = (\{T^*_n\},\{\theta^*_n\}) \in \Pi$; i.e.

$$J(\pi^*) = \inf\{J(\pi): \pi \in \Pi\}$$

を求めることである。 T_n は与えられた d ケの processes を n 回目にスイッチする時刻、 θ_n はその時刻において選ぶ process の番号を意味する。

Def.　$Q_i: W \to W$　$(i \in D)$ を次式で定義する。

$$e^{-\alpha t} Q_i x(t) = \operatorname*{ess\,inf}_{T \in \Phi(t)} E\left[\int_t^T e^{-\alpha r} f(i;r)dr + e^{-\alpha T} x(T) \mid \mathscr{F}_t\right].$$

仮定に応じて議論を３種類（Ａ），（Ｂ），（Ｃ）に分ける。

（Ａ）————

仮定（Ａ）：　$q = 0$,　$k > 0$,　$(\mathscr{F}_t)$ is quasi-left continuous

Def.A　　$N: W^d \to W^d$ を次式で定義する。

$$Nx = (N_1x,\dots,N_dx) \in W^d \quad \text{for} \quad x = (x_1,\dots,x_d) \in W^d$$

$$N_i x(t) = \min_j \{x_j(t) + k + c(i,j)\}, \quad i \in D,$$

ここで

W^d : d-product of W .

Theorem A.1　　仮定（A）のもとで、the class of $x \in W^d$;

$$x \leqq Nx, \quad \left(e^{-\alpha t} x_i(t) + \int_0^t e^{-\alpha r} f(i;r)dr\right):\text{submartingale}, \ i \in D$$

は maximal element $w = (w_1, \ldots, w_d) \in W^d$ をもつ。 更に，equation

$$w_i = Q_i(N_i w), \quad i \in D,$$

の一意解である。

Remark.

N: increasing, concave,

$$\| Nx - Nx' \| \leqq \| x - x' \| \quad \text{on} \quad W^d, \qquad N_i 0 \geqq k > 0, \quad i \in D,$$

の性質を用いて $\{u_n\}$ を

$$u_0 = G_\alpha f_i(\cdot) = \int_0^\infty e^{-\alpha r} S_r f_i(\cdot)dr, \quad S_r x(t) = E[x(t+r) \mid \mathscr{F}_t]$$

$$u_{n+1} = Q_i(N_i u_n)$$

で定義すると

$$u_n \to w_i \quad \text{in} \quad W, \quad i \in D,$$

が Hanouzet-Joly の結果を W 上で焼き直しして得られる。

Theorem A.2　　仮定（A）のもとで、 optimal switching strategy π^* は

$$T_0^* = 0, \quad T_{n+1}^* = \inf\{t \geqq T_n^* \mid w(\theta_n^*;t) = Nw(\theta_n^*;t)\}$$

θ_n^* : the number attaining the minimum of

$$w_j^* = w_j(T_n^*) + k + c(\theta_{n-1}^*, j), \quad j \in D$$

で与えられる。

Remark.

Optimal stopping の議論を適用するために、$N_i w$ には左側連続性が要る。

これは $(\mathscr{F}_t)$ についての仮定よりでる。 $k > 0$ から $T_n^* \uparrow \infty$ がでる。

この場合、impulsive control の optimal strategy の構成とは measurable

selection theorem を用いない点で異なる。

(B) ————

仮定（B）： $q > 0$, $k = 0$, $(\mathscr{F}_t)$ is quasi-left continuous

Def.B K: $W^d \to W^d$ を次式で定義する。

$$Kx = (K_1 x, \ldots, K_d x) \in W^d \quad \text{for} \quad x \in W^d$$

$$K_i x(t) = \min_j \{E[\int_t^{t+q} e^{-\alpha(r-t)} f_j(r)dr + e^{-\alpha q} x_j(t+q) \mid \mathscr{F}_t] + c(i,j)\}$$

Theorem B.1 仮定（B）のもとで、 equation

$$v_i = Q_i(K_i v), \quad i \in D,$$

は一意解 $v = (v_1, \ldots, v_d) \in W^d$ をもつ。

Remark. The contraction mapping theorem よりでる。

Theorem B.2 仮定（B）のもとで、optimal switching strategy π^* は

$$T_0^* = 0, \quad T_{n+1}^* = \inf\{t \geqq T_n^* + q \mid v(\theta_n^*;t) = Kv(\theta_n^*;t)\}$$

θ_n^* : the number attaining the minimum of

$$v_j^* = E[\int_{T_n^*}^{T_n^*+q} e^{-\alpha(r-T_n^*)} f_j(r)dr + e^{-\alpha q} v_j(T_n^*+q) \mid \mathscr{F}_{T_n^*}] + c(\theta_{n-1}^*, j)$$

で与えられる。

Remark. $K_i v$ の左側連続性は Theorem A.2 の Remark と同様。

(C) ————

仮定(C): $q = 0$, $k > 0$, $c(i) = c(i,i+1) \geqq 0 \pmod d$

$(\mathcal{F}_t)$ の quasi-left continuity の仮定を除くために、次のように定式化される cyclic switching を考えてみる。

F.C1 Strategy $\tau = (T_n)$ は F.1(a) と同じものとする。
この τ 全体の集合を T で表す。

F.C2 各 $\tau \in T$ に対して cost function $\hat{J}(\tau)$ を次式で定義する。

$$\hat{J}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\int_{T_{n-1}}^{T_n} e^{-\alpha r} f(s(n);r)dr + e^{-\alpha T_n}(k + c(s(n)))\right],$$

ここで $s(n) = i$ if $n = i \pmod d$.

F.C3 目的は optimal strategy $\tau^* = (T^*_n)$;i.e.

$$J(\tau^*) = \inf\{J(\tau): \tau \in T\}$$

を求めることである。この場合、スイッチしたときの process の番号は $s(n)$ で定められている。

Def.C $L: W_0^d \to W_0^d$ を次式で定義する。

$$Lx = (L_1 x, \dots, L_d x) \in W_0^d \quad \text{for} \quad x \in W_0^d$$

$$L_i x(t) = x_{i+1}(t) + c(i), \quad x_{d+1} = x_1$$

ここで

$$W_0^d : \text{d-product of } W_0 = \{x \in W \mid \|S_r x - x\| \to 0,\ r \downarrow 0\}$$

Theorem C.1　仮定（C）のもとで、eqution

$$z_i = Q_i(L_i z), \quad i \in D,$$

は一意解 $z = (z_1, \ldots, z_d) \in W_0^d$ をもつ。

Remark. $Q_i : W_0 \to W_0$, $G_\alpha(W) \subset W_0$ なる性質（cf. [4]）を用いて Theorem A.1 の Remark と同様にしてでる。

Theorem C.2　仮定（C）のもとで、optimal strategy τ^* は

$$T^*_0 = 0, \quad T^*_{n+1} = \inf\{t \geqq T^*_n \mid z(s(n+1);t) = Lz(s(n+1);t)\}$$

で与えられる。

参考文献

[1] A. Bensoussan, Stochastic Control by Functional Analysis Methods, North-Holland, 1982.

[2] A. Bensoussan and J.L. Lions, Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi Variationelles, Dunod, 1982.

[3] C. Dellacherie and P.A. Meyer, Probabilities and Potential, North-Holland, 1982.

[4] H. Morimoto, Dynkin games and martingale methods, Stochastics (1984) 213-228.

[5] H. Morimoto, Optimal switching for alternating processes, to appear in Appl. Math. Optim.