

『「初学者のための図解でわかる制御工学 I」特集号』

基礎編

状態空間表現と安定性

永原 正章*

1. はじめに

次は 2005 年の第 16 回 IFAC World Congress 初日の特別講演における R. E. Kalman 博士の言葉である [5]:

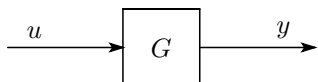
(1) Get the physics right.

(2) The rest is mathematics.

Kalman 博士は状態空間表現の創始者であり、その意味でも、これはたいへん示唆に富む言葉である。物理を正しく適用して数学モデルを得た後は、対象システムが電気系であろうが、機械系であろうが、同じ土俵の上の問題、すなわち数学の問題となるのである。物理を正しく適用して得られる数学モデルのひとつとして、状態空間表現がある。本解説では、システムの状態空間表現および、それにもとづいた安定性の定義と安定判別法について述べる。

2. 状態空間表現

倒立振子のような動的システムを表現する一つの方法として、**状態空間表現**がある。ここでは、下図に示すような入力 u と出力 y を持つシステム G の状態空間表現を説明する。



上のシステムの入出力関係を G が**ブラックボックス**であるとみなして表現すれば、例えば、

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n = \beta_0 u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} u' + \beta_n \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$ は実数とする。入出力信号 u, y の Laplace 変換 $\hat{u}(s), \hat{y}(s)$ を用い、微分方程式 (1) の初期値をすべて 0 とすることにより、入出力関係

$$\hat{y}(s) = \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \hat{u}(s)$$

が得られる。これは、古典制御で習う標準的なシステム表現であり、**伝達関数表現**と呼ばれる。また、

$$\hat{G}(s) := \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (2)$$

をシステム G の**伝達関数**と呼ぶ。

一方、この入出力関係を**ホワイトボックス**としてシステムを表現したものが状態空間表現である。もともと、システム G は何らかの物理システムである場合が多く、物理法則にもとづいて G の数式モデルを直接得ることができることも多い。次の例題はそのような場合のひとつである。

【例題 1】(台車型倒立振子) 台車型倒立振子の運動方程式は以下で与えられる(本特集号、川田氏の解説「物理法則に基づくモデリング」を参照のこと):

$$\begin{aligned} (m_c + m_p)\ddot{z} + m_p l \cos\theta \cdot \ddot{\theta} &= -\mu_c \dot{z} + m_p l \dot{\theta}^2 \sin\theta + f_c, \\ m_p l \cos\theta \cdot \ddot{z} + (J + m_p l^2)\ddot{\theta} &= -\mu_p \dot{\theta} + m_p g l \sin\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $x := [x_1, x_2, x_3, x_4]^\top := [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]^\top$, $u := f_c$ とおくと、まず、明らかに $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_3 = x_4$ であり、さらに (3) より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l \cos x_3 \\ m_p l \cos x_3 & J + m_p l^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} -\mu_c x_2 + m_p l x_4^2 \sin x_3 \\ -\mu_p x_4 + m_p g l \sin x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \right) \\ &=: \begin{bmatrix} f_2(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書けることがわかる。以上より、

$$\dot{x} = [x_2, f_2(x, u), x_4, f_4(x, u)]^\top =: f(x, u)$$

と状態空間表現ができる。また、例えば台車の位置 z と振子の角度 θ をセンサで計測するとし、そのセンサ出力を $y = [z, \theta]^\top$ とすると、

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0 \times u =: g(x, u)$$

と書ける。

上の例題のように、**状態変数**と呼ばれる変数 x を導入して、

* 京都大学 情報学研究科

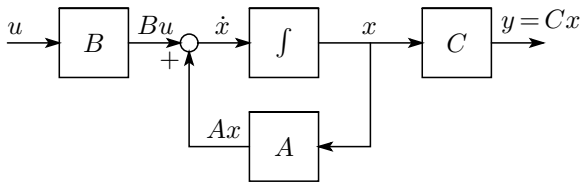
Key Words: state space representation, stability

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = g(x, u) \end{cases} \quad (4)$$

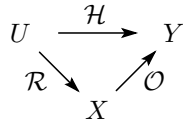
と表現したものを**状態空間表現**と呼ぶ。これは非線形システムも含む一般的な形式であるが、制御工学において最も基本的なシステムである**線形時不変システム**¹の場合、その状態空間表現は次式で与えられる。

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx. \end{cases} \quad (5)$$

この状態空間表現をブロック線図で表すと以下のようになる。



状態空間表現 (5) において、状態変数 x は入出力には直接現れてこない変数で内部変数とも呼ばれる。状態変数の属する空間を**状態空間**と呼ぶ。今の場合、状態空間は $\mathbb{R}^n$ である。一般に、状態空間を X 、入力属する空間を U 、出力属する空間を Y とおくと、状態空間表現では、下の図のように、状態空間 X を経由して、システムの入出力関係 $U \rightarrow Y$ を表現していることになる。



ここで $\mathcal{H}$ は入出力関係を表す作用素 (**Hankel 作用素**と呼ぶ) であり、入出力関係から状態空間を求めること、すなわち**状態空間実現**は、上のような $\mathcal{H}$ の分解を求めることに他ならない [4]。なお、 X が有限次元の場合は、上の写像 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{O}$ の行列表現はそれぞれ可制御性行列 M_R および可観測性行列 M_O となることが知られている。なお、 M_R については浦久保氏の、 M_O については國松氏の各解説を参照のこと。

逆に、状態空間表現が与えられたとき、その入出力表現 (伝達関数) を求めることを考える。まず、初期値を $x(0) = x_0$ とおき、状態 x 、入力 u 、出力 y の Laplace 変換をそれぞれ $\hat{x}$ 、 $\hat{u}$ 、 $\hat{y}$ とおくと、(5) の状態空間表現は

$$\begin{aligned} s\hat{x} - x_0 &= A\hat{x} + B\hat{u}(s), \\ \hat{y}(s) &= C\hat{x} \end{aligned}$$

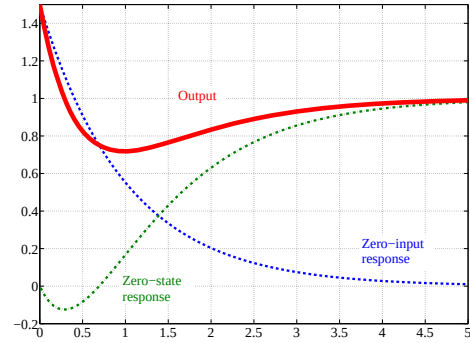
と書ける。これを整理することにより、

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \quad (6)$$

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \quad (7)$$

が得られる。ここで、(7) の右辺第 2 項の

¹略して**LTIシステム** (Linear Time-Invariant system) とも呼ぶ



第 1 図 出力応答 (実線) は零状態応答 (鎖線) と零入力応答 (点線) の和で与えられる

$$\hat{G}(s) := C(sI - A)^{-1}B \quad (8)$$

は、(2) で定義した伝達関数である。すなわち、(8) により、状態空間表現から伝達関数表現へ変換することができる。

上記の Laplace 変換法を用いれば、微分方程式 (5) の解は容易に求まる。行列 $(sI - A)^{-1}$ の逆 Laplace 変換が行列指数関数 e^{At} で与えられること¹、および Laplace 変換領域での掛け算が時間領域では畳み込みになることを用いれば、(6) より

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

が得られ、また (7) より

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \\ &= Ce^{At}x_0 + (g * u)(t) \end{aligned}$$

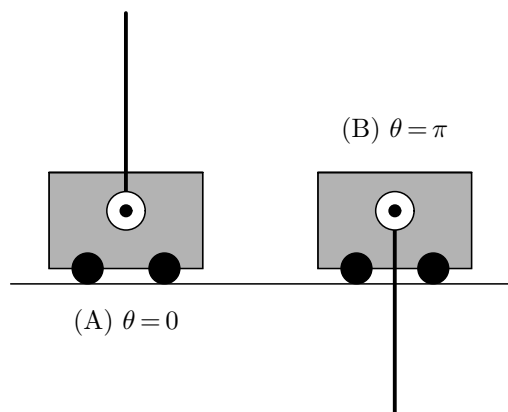
が得られる。ここで、 g は (8) の伝達関数 $\hat{G}(s)$ の逆ラプラス変換であり、システム G の**インパルス応答**と呼ばれる。また、 $g * u$ はインパルス応答 g と入力 u との畳み込みをあらわす。上の式の $Ce^{At}x_0$ を**零入力応答**、 $(g * u)(t)$ を**零状態応答**と呼ぶ。零入力応答は入力が $u \equiv 0$ であるときのシステム G の応答であり、零状態応答は初期値が $x(0) = 0$ であるときのシステム G の応答である。システム G は線形システムであるので、入力も初期値も零でないときの応答は、単にそれらの足し算となるという特徴がある。図 1 にある線形システムの出力応答 $y(t)$ を示す。出力応答が零状態応答と零入力応答との和になる様子がわかる。

3. 安定性

状態空間表現 (4) において、入力を $u \equiv 0$ とした次のシステムを**自励系**または**自由システム**と呼ぶ。

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

¹行列指数関数 e^{At} をシステム (5) の**遷移行列**と呼ぶ。



第 2 図 台車型倒立振子の 2 つの平衡点: 不安定な平衡点 (A) と安定な平衡点 (B)

ここでは、自励系の安定性を解説する。

まず、安定性を議論する前に、システム (9) の平衡点を定義しよう。

【定義 1】 (平衡点) 状態空間上の点 $x^* \in \mathbb{R}^n$ がシステム (9) の平衡点であるとは、点 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が $f(x^*) = 0$ を満たすことである。

平衡点とは、(9) より、状態の微分が 0 となる点である。すなわち、 $x(0) = x^*$ とすると、それ以降、システム (9) の状態はずっとその点にとどまり続ける、そのような点を平衡点と呼ぶのである。例題 1 の台車型倒立振子では、平衡点は無数にあり、振子が垂直で台車が静止している状態である。すなわち、

$$\theta = 0, \pi, \dot{\theta} = 0, z = \text{任意}, \dot{z} = 0,$$

となるような点が平衡点である。ここで、 $\dot{\theta} = z = \dot{z} = 0$ に固定し、 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の 2 つの平衡点を考えてみよう (図 2)。容易に想像できるように、 $\theta = 0$ の状態 (A) は、状態変数 x が少しでもずれば、振子は倒れてしまう。一方、 $\theta = \pi$ の状態 (B) では、多少、状態変数がずれても、平衡状態の付近にとどまる。特に摩擦がある場合 ($\mu_c > 0, \mu_p > 0$)、時間が経つにつれ、平衡状態に限りなく近づく。このように平衡点には、“不安定な” 平衡点と“安定な” 平衡点があることが直感的にわかる。

厳密な安定性の定義は次のようになる。

【定義 2】 (安定) システム (9) の平衡点の一つを x^* とおく。任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して、ある実数 $\delta > 0$ が存在して、 $\|x_0 - x^*\| < \delta$ を満たす¹ すべての初期値 x_0 と $t \geq 0$ について、 $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$ となるとき、システム (9) の平衡点 x^* は (Lyapunov の意味で) 安定であるという。

【定義 3】 (漸近安定) システム (9) の平衡点 x^* が (Lyapunov の意味で) 安定で、かつある $\delta' > 0$ が存在して、 $\|x_0 - x^*\| < \delta'$ となるすべての初期値 x_0 に対して、

¹ $\|\cdot\|$ は 1 つに固定すればどんなノルムでも良い。例えば、 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ など。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

となるならば、平衡点 x^* は漸近安定であるという。

【定義 4】 (不安定) システム (9) の平衡点 x^* が (Lyapunov の意味で) 安定でないとき、その平衡点は不安定であるという²。

これらの定義によれば、図 2 の平衡点 (B) は安定で、さらに摩擦があれば (すなわち、 $\mu_c > 0$ かつ $\mu_p > 0$)、漸近安定であることがわかる。また、平衡点 (A) は摩擦のあるなしに関係なく不安定である。

4. 安定判別法

入出力表現 (1) や伝達関数 (2) が与えられたとき、そのシステムの安定性を判別するには、Routh-Hurwitz の安定判別法 [2,1] や Nyquist の安定判別法 [1] があるが、ここでは、状態空間表現 (9) が与えられたときの Lyapunov の安定判別法と呼ばれる方法を解説する。ここでは、簡単のため、システム (9) の平衡点は $x^* = 0$ (原点) であるとし、原点の安定性について調べる。まず、(準) 正定関数を定義する。

【定義 5】 ((準) 正定関数) Ω を原点を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、関数 $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は Ω 上で連続、かつ、 $V(0) = 0$ とする。

- (1) 任意の $x \in \Omega$ ($x \neq 0$) に対して、 $V(x) > 0$ を満たすとき、 V は Ω 上で正定であるという。
- (2) 任意の $x \in \Omega$ に対して、 $V(x) \geq 0$ を満たすとき、 V は Ω 上で準正定であるという。

また、 $-V$ が正定するとき、 V を負定と呼ぶ。

システム (9) に沿った正定関数 V の時間微分を $\dot{V}$ とおく。すなわち、

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

である。以上の準備の下で、Lyapunov の安定定理は以下で与えられる。

【定理 1】 (Lyapunov の安定定理) システム (9) の平衡点は原点であるとする。

- (1) 原点を含むある開集合 Ω と Ω 上で正定な関数 V が存在して、任意の $x \in \Omega$ に対して、

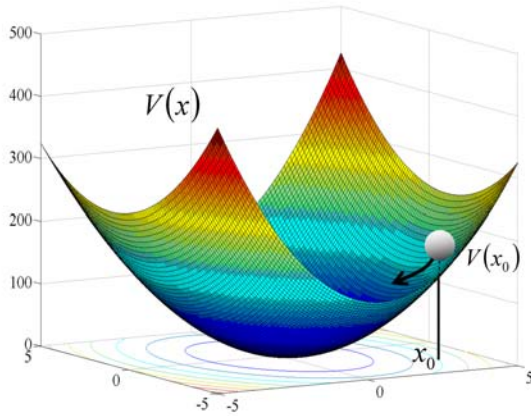
$$\dot{V}(x) \leq 0$$

が成り立つなら、システム (9) の平衡点 (原点) は安定である。

- (2) 原点を含むある開集合 Ω と Ω 上で正定な関数 V が存在して、0 でない任意の $x \in \Omega$ に対して、

$$\dot{V}(x) < 0$$

² この不安定性の定義では、いわゆる Practical 安定 [3]、すなわち、平衡点を含むある有界閉集合へ収束する場合も不安定と判定されることに注意。



第3図 Lyapunov関数 $V(x)$

が成り立つなら、システム(9)の平衡点(原点)は漸近安定である。

いずれの場合も、上記を満たす正定関数 V をシステム(9)の **Lyapunov関数**と呼ぶ。

Lyapunovの安定定理の幾何学的な意味は以下の通りである。2次元の場合を考えよう。Lyapunov関数 V は図3に示すような、原点に接するお椀のような形をしている。 $\dot{V}(x) < 0$ (漸近安定) というのは、初期値が $x(0) = x_0 \in \Omega$ であれば、 $V(x_0)$ の位置からビー玉が $V(x)$ の曲面の上をコロコロと原点に向かって転がり落ちることに対応する。

システム(9)に対して、うまく Lyapunov 関数が見つかれば、(漸近)安定性は示されるが、Lyapunov 関数が見つからないからと言って、システム(9)の平衡点が不安定であると結論づけることは、一般にはできない。これは、上記の Lyapunov の定理が、安定性のための十分条件ではあるが、必要条件ではないためである。しかし、システム(9)が線形システム

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

の場合は、次の必要十分条件が得られる。

【定理2】 次の4つは等価である。

- (1) 原点は大域的に漸近安定、すなわち、任意の初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

が成り立つ。

- (2) 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とおくと、

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- (3) ある正定行列¹ $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して、行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に関する方程式 (**Lyapunov 方程式**)

$$PA + A^T P = -Q \quad (11)$$

¹対称行列 Q を用いたスカラー値関数 $V(x) = x^T Q x$ が正定関数となるとき、行列 Q は正定であるという。

が正定な一意解を持つ。

- (4) 任意の正定行列 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、Lyapunov 方程式(11)は正定な一意解を持つ。

上の定理より、適当に決めた正定行列(例えば単位行列) $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、Lyapunov 方程式(11)を解き、もし正定な解 P が見つければ、原点は大域的に漸近安定であることがわかる。なお、このとき、

$$V(x) = x^T P x$$

は線形システム(10)の Lyapunov 関数となるのが簡単な計算よりわかる。また、逆に、Lyapunov 方程式の解 P が正定でなければ、(1)と(4)の等価性より、原点は Lyapunov の意味で安定、もしくは不安定であることもわかる。

なお、MATLAB で線形システム(10)の安定性を調べるには、定理2より、次の方法がある。

- 行列 A の固有値を求める (`eig(A)`)。
- Lyapunov 不等式を解き (`P=lyap(A',Q)`)、解の正定性を調べる (`[P2,r]=chol(P)`)、 r が0なら正定、 $r \neq 0$ なら正定ではない)。

5. おわりに

本解説では、状態空間表現、および、それにもとづいた安定性の定義と安定判別法について述べた。状態空間表現は、安定性のほかにも、システムを調べたり、制御をしたりするための、強力で統一的な枠組みを与える。詳しいことは、本特集号のほかの記事や、下記参考文献を参照していただきたい。

参考文献

- [1] 井村, システム制御のための安定論, コロナ社, 2000.
- [2] 小郷, 美多, システム制御理論入門, 実教出版, 1979.
- [3] ラサル, レフシェッツ, リヤプノフの方法による安定性理論, 産業図書, 1975.
- [4] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, 2nd Ed., Springer, 1998. Available at <http://www.math.rutgers.edu/~sontag/mct.html>
- [5] J. C. Willems, "The behavioral approach to open and interconnected systems," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 27, No. 6, pp. 46–99, Dec. 2007.

著者略歴

ながはら まさあき
永原 正章 (正会員)



2003年3月京都大学大学院情報学研究科博士課程修了。同年4月同大学助手、2007年4月同大学助教となり現在に至る。デジタル信号処理、サンプル値制御、ネットワーク化制御などの研究に従事。IEEE, SICE, IEICEなどの会員。