

6月8日

佐藤さんの研究集会の講義

50 Introduction "Variation of cohomology in an algebraic family".
by Robin Hartshorne
次の一般の問題も考えます。

$\{X_t\}_{t \in T}$, $T \text{ open } \subseteq \mathbb{C}$ を complex analytic space の analytic family として,
 $t \in T$ に対して, $H^i(X_t, \mathbb{C})$ を考え,
どの様に $H^i(X_t, \mathbb{C})$ は t に depend するか という問題も考えます。

- ① 例としては, f が smooth, proper のとき,
すなわち, $\forall t \in T$, X_t compact complex manifold,
 X manifold, f proper. として,
 $f: X \rightarrow T$ は differentiable family として
locally trivial なことすぐ分かります。たゞから, $f^{-1}(t) = X_t$.
 $|t - t'| < \epsilon$, $\exists$ isomorphism $X_t \cong X_{t'}$, differentiable manifold として, しかも, $H^i(X_t, \mathbb{C})$ は X_t の topological space であるから,
 $H^i(X_t, \mathbb{C}) \cong H^i(X_{t'}, \mathbb{C})$ となります。

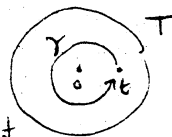
Thm: $f: X \rightarrow T$ smooth, proper $\Rightarrow$
function $t \mapsto \dim H^i(X_t, \mathbb{C})$ is constant.

- ② もっと面白い場合は $T = \text{disc } \{ |z| < 1 \}$ として,
 $f: X \rightarrow T$ proper map, $f: X - X_0 \rightarrow T - \{0\}$
smooth, X_0 singular points を持つ場合 である。
 $t \in T - \{0\}$ なら, $H^i(X_t, \mathbb{C})$ locally constant
だから, path γ に対して, automorphism

$$\varphi: H^i(X_t, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(X_t, \mathbb{C})$$

があります。これを "monodromy transformation" と呼びます。

それから, T contractible であるから, X_0 は X の retraction である。
したがって, $H^i(X, \mathbb{C}) \cong H^i(X_0, \mathbb{C})$ isomorphism である。



なお, $X_t \rightarrow X$ の injection に対して, $H^i(X) \rightarrow H^i(X_t)$ の mapping がありますから, 自然な mapping

$$\alpha^i: H^i(X_0, \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t, \mathbb{C})$$

を得ります。Image α^i は, $H^i(X_t, \mathbb{C})$ の invariant cycles ($\sum$ invariant $\Leftrightarrow \varphi^i = 1$) に含まれていますから,

$$\alpha^i: H^i(X_0, \mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X_t, \mathbb{C})^{\varphi^i = 1} = \text{invariant cycles.}$$

という mapping があります。

このように, X_0 と X_t の cohomology との関係は研究されます。

- ③ Differential equations との関係もあります。T- $\{0\}$ 上は, sheaf $F^i = R^i f_* (\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$ を考えて, これは locally free coherent sheaf $\mathcal{F}^i$, 自然な (integrable) connection ∇ を持っています。

(Integrable) connection とは, $F \xrightarrow{\nabla} F \otimes \Omega^1$ という mapping $\mathcal{F}^i$,

$$\nabla(sf) = s \nabla f + f \otimes ds$$

$$F \xrightarrow{\nabla} F \otimes \Omega^1 \xrightarrow{\nabla} F \otimes \Omega^2 \quad \mathcal{F}^i, \quad \nabla \circ \nabla = 0. \quad (T = \dim T \text{ 上は, } \nabla \circ \nabla = 0 \text{ である})$$

Local に, $F \cong \mathcal{O}_T^r$, ∇ は $\mathcal{O}_T^r \rightarrow (\Omega_T^1)^r$ $\mathcal{F}^i$ ですから,

$$\nabla = d + \omega, \quad \omega = (\omega_{ij}). \quad \omega_{ij} \in \Omega^1 = \sum g_{ij} dz.$$

だから, differential equations

$$df_i + \sum_{j=1}^r g_{ji} f_j dz = 0 \quad i=1, \dots, r$$

を考えます。これを Picard-Fuchs equation と呼びます。
 さらに, $\overline{\pi}^*$ の monodromy は, 2π DE の monodromy である。

今日は、このことを algebraic geometry の点で研究したいんです。
 目的は、algebraic family $f: X \rightarrow T$ に対して、

- 1) $H^i(X_t, \mathbb{C})$ を代数的で定義する
 - 2) monodromy と mapping α を代数的に定義する
 - 3) f についての hypotheses を一般化する
- (f smooth proper の代りに、 f は morphism of schemes とします。
 だから、 X_t は singularities を持ててもいいですし、 X_t non-proper
 でもいいです。)
- 4) monodromy ^は trivial ^{かつ} α は isom. なるような条件を述べる。

§1 Algebraic の場合の cohomology の定義

k 体. char. 0.

Y k -上 a scheme (finite type)

non-proper
singular てもよい。

$Y \hookrightarrow X$ X smooth / k .
closed

$$\Omega_X^\bullet = \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_X^n. \quad \text{differential forms a sheaf a complex.}$$

$\hat{\Omega}_X^\bullet$: $\Omega_X^\bullet$ の Y に沿った formal completion.
 (sheaf F に対して, formal completion $\hat{F} = \varprojlim F/I_Y^n F$ で定義します。)
 そうしたら、

$$H_{\text{DR}}^i(Y) = H^i(\hat{X}, \hat{\Omega}_X^\bullet) \quad \text{という定義します。}$$

Y の algebraic De Rham cohomology を呼びます。(X の取り方によりまじい。)

Thm 1. $H_{\text{DR}}^i(Y)$ fin. dim. k -vector space $\forall i$.

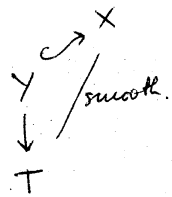
Thm 2 $k = \mathbb{C}$ なら、
 $H_{\text{DR}}^i(Y) \cong H^i(Y, \mathbb{C})$.

同様に, $f: Y \rightarrow T$ family とし,

$Y \hookrightarrow X$, T は smooth scheme τ ,

$\Omega_{X/T}$ relative differentials の sheaf の complex,

$\hat{\Omega}_{X/T}$, Y に沿っての formal completion,



$$R_{\text{DR}}^i f_*(Y) = R_{f_*}^i(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/T}) \quad \text{という定義 します.}$$

sheaf of relative De Rham cohomology を 呼びます.

absolute の場合には, $H^i(Y)$ は dim. τ だが, relative の場合には coherent ではありません. quasi-coherent となっています.

けれど $\tau \in$,

Thm 3. $\exists$ ^(Zariski) open dense subset $U \subseteq T$ such that $R_{\text{DR}}^i f_*(Y)$ is coherent and locally free on U , for all i .

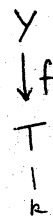
Thm 4. $k = \mathbb{C}$ なら, $\exists$ open dense subset $U \subseteq T$ such that

$$R_{\text{DR}}^i f_*(Y)^h \cong R_{f_*}^i(Y^h, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T^h.$$

§2 Monodromy + relation with cohomology of fibre

今から, T smooth, dim 1 とします.

Thm 5: $R_{\text{DR}}^i f_*(Y)$ は canonical integrable connection ∇ を持っています.



Katz と 小田 で construct されています, f smooth の場合 τ , 一般の場合で同じ方法を使います.

analytic の場合 $\Rightarrow$ coherent sheaf の int. connection は $\Rightarrow$ locally trivial である, algebraic の場合 $\Rightarrow$ Zariski topology 弱い である, そんなことは成り立ちません。

だから, complete local ring を使って, 局所的 localization をします。

そうしたら,

$$R^i f_* (Y)_{\tau} = H^i_{\text{DR}}(Y'_{\tau}) / K$$

$$\begin{array}{ccc} Y' & & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ t_0 \in T' & \xrightarrow{\quad} & T \\ \text{generic} & \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{t_0, T} & \\ \text{point} & \text{Spec } k[[t]] \subseteq K = k((t)) & \end{array}$$

τ は generic point τ , $H^i(Y'_{\tau})$ generic fibre の cohomology を得ります。 $K = k((t))$ の vector space である。

K 上の vector space $H^i(Y'_{\tau})$ と ∇ の connection ∇ τ , t の 近傍 の monodromy を表わします。

$H^i(Y'_{\tau})^{\nabla}$ は horizontal sections として, k -E 2 finite dim vector space である。 "invariant cocycles".

Thm 6: $f: Y \rightarrow T$ proper map τ , $t_0 \in T$. $T' = \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{t_0, T}$. τ generic point. $\Rightarrow$ 自然な mapping

$$\alpha^i: H^i(Y_{t_0}) \rightarrow H^i(Y'_{\tau})^{\nabla}$$

があります。

しかも, integer r に対して, $R^i f_*(Y')$ は coherent $\forall i \leq r$ と仮定すると,

$$\Rightarrow \forall i \leq r, \quad \nabla: H^i(Y'_{\tau}) \text{ は trivial } \quad \alpha^i \text{ isomorphism.}$$

Cor 7: $f: X \rightarrow T$ map of schemes. $k = \mathbb{C}$. $\exists$ U open dense Zariski subset s.t. $\forall t \in T$, $t \mapsto \dim H^i(X_t^h, \mathbb{C})$ constant.

Problems

① "Griffiths' Conjecture"
 α^i surjective でしょうか。
 (Deligne によって 証明 ありそうですが, 複雑ですし, analytic と思います。たぶん, 簡単な代数的な証明 あります。)

② semi-continuity.
 H^0 について, $\dim H^0(X_0) \leq \dim H^0(X_t)$ 이기도 そうです,
 "connectedness principle" によつて.
 H^i について, $i > 0$, ある semi-continuity 成り立つ かな。
 (X は 適当な 条件 を みたすとき)

Reference:

"Algebraic De Rham Cohomology"
 to appear, manuscripta math.