

ブロック・イデアルのソース多元環の加群構造

Sasaki, Hiroki

佐々木 洋城

Shinshu University, Faculty of Education

信州大学 教育学部

1 はじめに

以下, k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする. G を有限群とし, その位数は k の標数 p で割りきれられるものとする.

目的は群環 kG のブロック・イデアルの source 多元環の加群構造を考察することである. Sasaki [10] で得られた定理の改良を報告する.

ブロック・イデアルのコホモロジー環がそのブロック・イデアルの source 多元環から定められる defect 群のコホモロジー環の写像の像として表すことができると予想している. この度, 新たに defect 群が wreathed 2-group

$$\langle a_1, a_2, t \mid a_1^{2^n} = a_2^{2^n} = t^2 = 1, a_1 a_2 = a_2 a_1, t a_1 t = a_2 \rangle, n \geq 2$$

であるブロック・イデアルについて結論が得られた.

2 source 多元環の加群構造

以下, b を kG のブロック・イデアルとし, P をその defect 群とする. b を直既約 $k[G \times G]$ -加群とみると $\Delta(P) = \{(u, u) \mid u \in P\}$ は b の vertex である. そこで, b の $k[G \times P]$ -加群としての直既約直和因子で $\Delta(P)$ を vertex としてもつものがある. それを b の source 加群とよぶ. source 加群は $b^P = \{w \in b \mid uw = w \forall u \in P\}$ に属する原始的べき等元 i を用いて kGi と表される. $\Delta(P)$ が kGi の vertex であることは $\text{Br}_P(i) \neq 0$ ということである. $\text{Br}_P(i) \in kC_G(P)$ は原始的べき等元であるから, $kC_G(P)$ のあるブロック・イデアルに属する. いま, $\text{Br}_P(i)$ が $kC_G(P)e$ ($e \in Z(kC_G(P))$ はブロックべき等元) に属するとし, $b_P = k[PC_G(P)]e$ とおく. このとき, i は (P, b_P) に属するという.

(P, b_P) は Sylow b -subpair である. すなわち, b_P の G への Brauer 対応が b となる. P は b_P の defect 群である.

さて, $\text{End}_{k[G \times P]}(kGi) \simeq ikGi$ を b の source 多元環とよぶ.

本研究は科学研究費助成事業 (課題番号 15K04777) の助成を受けたものである. .

定義 2.1 (Linckelmann [4]) 上の記号の下で $X = kGi$ とおくと

$$H^*(G, b; X) = \{ \zeta \in H^*(P, k) \mid \text{con}^g \text{res}_Q \zeta = \text{res}_Q \zeta \ \forall (Q, b_Q) \subset (P, b_P) \ \forall g \in N_G(Q, b_Q) \}$$

を b のコホモロジー環とよぶ.

b の source 多元環 $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群である. 次はブロック・イデアルのコホモロジー環の基本定理である.

定理 2.1 (Linckelmann [4], Sasaki [9]) 同じ記号の下で, $\zeta \in H^*(P, k)$ について

$$\zeta \in H^*(G, b; X) \iff \delta_P(\zeta) \in HH^*(kP) \text{ は } k[P \times P] \text{ 加群 } ikGi \text{ について stable.}$$

ここで, $HH^*(kP)$ は kP の Hochschild コホモロジー環であり, $\delta_P : H^*(P, k) \rightarrow HH^*(kP)$ は diagonal embedding である.

ブロック・イデアルのコホモロジー環の立場から b の source 多元環の $k[P \times P]$ 加群としての構造を調べたい. 次は Puig によるもので, 出発点である.

定理 2.2 (例えば [12, Theorem 44.3]) $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群として次のように直和分解される.

$$ikGi \simeq \bigoplus_{v \in [N_G(P, b_P)/PC_G(P)]} k[Pv] \bigoplus Z.$$

ここで, $[N_G(P, b_P)/PC_G(P)]$ は商集合 $N_G(P, b_P)/PC_G(P)$ の (ひとつの) 完全代表系を表し, $v \in [N_G(P, b_P)/PC_G(P)]$ について $k[Pv]$ の $ikGi$ における重複度は 1 である. また, Z の直既約直和因子はある $x \in G \setminus N_G(P)$ で生成される $k[P \times P]$ 加群 $k[PxP]$ に同型である.

この定理の Z を調べなければならない. つまり

- どの $x \in G \setminus N_G(P)$ について $k[PxP]$ は $ikGi$ の直和因子に同型か?
- 重複度はいくつか?

を知りたいのである.

上の定理を示すために次の事実が用いられる.

$$\forall g \in N_G(P, b_P) \quad \exists \theta_g \in U(b^P) \text{ s.t. } {}^g i = \theta_g i = \theta_g i \theta_g^{-1}.$$

この θ_g はまた次の $k[P \times P]$ 加群としての同型

$$\Phi_g : g ikGi \rightarrow ikGi; \sigma g \mapsto \eta_g \sigma$$

を引き起こす. ここで, $\eta_g = \theta_g^{-1} g i = i \theta_g^{-1} g \in U(ikGi)$ である.

source 多元環 $ikGi$ は写像 $t_{ikGi} : HH^*(kP) \rightarrow HH^*(kP)$ を導く. $t_{ikGi} \circ \delta_P(H^*(P, k)) \subset \delta_P(H^*(P, k))$ であるから, t_{ikGi} は写像 $H^*(P, k) \rightarrow H^*(P, k)$ を導く. この写像も t_{ikGi} と

表す.

$$\begin{array}{ccc} H^*(P, k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) \\ t_{ikGi} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow t_{ikGi} \\ H^*(P, k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) \end{array}$$

いま, $k[P \times P]$ 加群として, ある $\mathcal{X} \subset G \setminus N_G(P)$ を用いて

$$(*)1) \quad ikGi \simeq \bigoplus_{v \in [N_G(P, b_P)/PC_G(P)]} k[Pv] \bigoplus \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{X}} k[PxP] \right)$$

と直和分解されるとすると, 写像 $t_{ikGi} : H^*(P, k) \rightarrow H^*(P, k)$ は $\zeta \in H^*(P, k)$ を次のように写像する.

$$t_{ikGi} : \zeta \mapsto \sum_{v \in [N_G(P, b_P)/PC_G(P)]} \text{con}^v \zeta + \sum_{x \in \mathcal{X}} \text{tr}^P \text{res}_{P \cap {}^x P} \text{con}^x \zeta.$$

定理 2.1 は $\text{Im } t_{ikGi} \subseteq H^*(G, b; X)$ であることを意味する. そこで, この写像の像がブロック・イデアルのコホモロジー環であると予想している.

予想

$$\text{Im } t_{ikGi} = H^*(G, b; X).$$

例 2.1 $N_G(P, b_P)$ が subpairs の fusion を統制する場合は予想が成り立つ. 例えば, 次の場合が該当する.

- (1) P が G の正規部分群である.
- (2) P が可換である.
- (3) P が exponent p^2 , 位数 p^3 の extraspecial p -群.
- (4) P がランク 3 以上の extraspecial p -群 (Stancu [11]).
- (5) b の hyper focal subgroup が巡回群である (Watanabe [13, Theorem 3]).

予想を確認するために具体的例を考察しているが, 目下のところ,

- (1) 直和分解 (*)1 に現れる $k[PxP]$ とその重複度を調べる.
- (2) 直和因子の $k[PxP]$ が定めるコホモロジー環の写像 $t_{PxP} : \zeta \mapsto \text{tr}^P \text{res}_{P \cap {}^x P} \text{con}^x \zeta$ を調べる

という素朴な方法をとっている.

例 2.2 以下の場合に予想は正しい.

- (1) $p = 2$ で b が tame 表現型.
- (2) P が exponent p , 位数 p^3 の extraspecial p -群.

次は $ikGi$ の $k[P \times P]$ 加群としての直既約直和因子が subpairs の fusion を引き起こすことを示し、重要である。

命題 2.3 (例えば, Külshammer, Okuyama and Watanabe [2]) $k[PgP]$ が $ikGi$ の直和因子に同型であるとする. $Q = P^g \cap P, R = P \cap {}^gP$ とおく. $(Q, b_Q), (R, b_R) \subset (P, b_P)$ について

$${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R).$$

従って, subpairs の fusion を調べることにより $ikGi$ の $k[P \times P]$ 加群としての直既約直和因子の可能性を調べられる。

subpairs の fusion を調べるためには essential subpair が有用である。

定義 2.2 subpair (T, c) について

- (1) (T, c) は self-centralizing (T は $k[TC_G(T)]$ のブロック・イデアル c の defect 群) であり
- (2) $N_G(T, c)/TC_G(T)$ が strongly p -embedded proper subgroup をもつ

が成り立つとき, (T, c) は essential であるという. このとき $\text{Aut } T$ は p -群ではない。

Linckelmann [5] により

定理 2.4 $\mathcal{F} = \{(T, b_T) \subset (P, b_P) \mid (T, b_T) \text{ は essential}\} \cup \{(P, b_P)\}$ は conjugation family である。

すなわち, b -subpairs $(Q, b_Q), (R, b_R)$ について ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ ならば, 適当な $(F_1, b_{F_1}), (F_2, b_{F_2}), \dots, (F_m, b_{F_m}) \in \mathcal{F}$ ($R_j \leq F_j \cap F_{j+1}$) と適当な $g_j \in N_G(F_j, b_{F_j})$ により $\text{con}^g : (Q, b_Q) \rightarrow (R, b_R)$ が $\text{con}^g = \text{con}^{g_m \cdots g_2 g_1}$ と表される:

$$\begin{array}{ccccccc} & (F_1, b_{F_1}) & & (F_2, b_{F_2}) & & \cdots & & (F_{m-1}, b_{F_{m-1}}) & & (F_m, b_{F_m}) \\ & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ (Q, b_Q) & \xrightarrow{g_1} & (R_1, b_{R_1}) & \xrightarrow{g_2} & (R_2, b_{R_2}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (R_{m-2}, b_{R_{m-2}}) & \xrightarrow{g_{m-1}} & (R_{m-1}, b_{R_{m-1}}) & \xrightarrow{g_m} & (R, b_R) \end{array}$$

このとき

$$R \leq {}^{g_m \cdots g_2}R_1 \cap {}^{g_m \cdots g_3}R_2 \cap \cdots \cap {}^{g_m}R_{m-1} \cap R_m$$

であることに注意する. 特に, 写像 $\text{tr}^P \text{res}_R \text{con}^g : H^*(P, k) \rightarrow H^*(P, k)$ が 0-写像でなければ等号が成り立つ. すなわち

$$R = {}^{g_m \cdots g_2}R_1 \cap {}^{g_m \cdots g_3}R_2 \cap \cdots \cap {}^{g_m}R_{m-1} \cap R_m.$$

$ikGi$ は p -置換加群であり, Brauer 準同型を用いて $ikGi$ の直和因子を調べることができるが, 次はそのときの基本となる事実である。

命題 2.5 (Okuyama and Sasaki [7]) $(T, b_T) \subset (P, b_P)$ を essential b -subpair とする. $j = \text{Br}_T(i) \in kC_G(T)e_T$ とおく. ここで, $e_T \in Z(kC_G(T))$ は b_T のブロックべき等元である. このとき, $k[T \times T]$ 加群として

$$k[TC_G(T)]j \simeq \bigoplus_{m \text{ 個}} kT$$

と直和分解され, 重複度 $m = m_T$ は p を法として 1 に合同である.

定理 2.6 (Okuyama and Sasaki [7]) $(T, b_T) \subset (P, b_P)$ を essential とする. $M \leq N_G(T, b_T)$ を $N_P(T)C_G(T)$ を含み, $M/TC_G(T) < N_G(T, b_T)/TC_G(T)$ が strongly p -embedded proper subgroup であるようにとる. このとき, 任意の $x \in N_G(T, b_T) \setminus M$ に対して $k[PxP]$ は $ikGi$ の直和因子に同型であり, 重複度は命題 2.5 の m_T で与えられる. 従って, p を法として 1 に合同である.

注意 2.1 $k[PxP]$ の重複度は $x \in N_G(T, b_T) \setminus M$ のとり方によらず m_T で一定なのである.

以前に次の定理が得られていた.

定理 2.7 (Sasaki [10]) $(Q, b_Q), (R, b_R) \subset (P, b_P)$ とし, $QC_P(Q)$ が b_Q の defect 群であるか $RC_P(R)$ が b_R の defect 群であると仮定する. $g \in G$ について ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$ とする. 条件

(NTC) 写像 $t_g : H^*(P, k) \rightarrow H^*(P, k); \zeta \mapsto \text{tr}^P \text{res}_R \text{con}^g \zeta$ は 0 写像でない

が成り立つならば次が成り立つ.

- (1) $k[PgP]$ は $ikGi$ の直和因子に同型である.
- (2) $R = P \cap {}^gP$ でありかつ ${}^g(Q, b_Q) = (R, b_R)$.
- (3) $t_{PgP} = t_g$, すなわち

$$t_{PgP}(\zeta) = \text{tr}^P \text{res}_R \text{con}^g \zeta \quad (\zeta \in H^*(P, k)).$$

最近の改良を報告する.

定義 2.3 $P, Q \leq G$ を p -部分群とする.

$$x \in G \text{ が } (P, Q)\text{-ICC をみたす} \stackrel{\text{定義}}{\iff} \forall c \in C_G(P \cap {}^xQ) \ P \cap {}^xQ = P \cap {}^{cx}Q.$$

$x \in G$ が (P, Q) -ICC をみたすならばどの $c \in C_G(P \cap {}^xQ)$ についても $k[P \times Q]$ 加群として $k[PcxQ] \simeq k[PxQ]$ である. また, コホモロジー環の写像

$$t_{PxQ} : H^*(Q, k) \rightarrow H^*(P, k); \zeta \mapsto \text{tr}^P \text{res}_{P \cap {}^xQ}$$

が 0 写像でなければ, $x \in G$ は (P, Q) -ICC をみたす.

定理 2.8 $i \in b^P$ を source べき等元とし, Sylow b -subpair (P, b_P) に i が属するとする. $x \in G$ は (P, P) -ICC をみたすとする. すなわち, どの $c \in C_G(P \cap {}^xP)$ についても $P \cap {}^xP = P \cap {}^{cx}P$ が成り立つと仮定する. $Q = P^x \cap P, R = P \cap {}^xP$ とおく. b -subpairs $(Q, b_Q), (R, b_R) \subset$

(P, b_P) をとる. ${}^x(Q, b_Q) = (R, b_R)$ が成り立っていると仮定する. このとき, さらに, 以下の3つの条件のどれかが成り立てば $k[P \times P]$ 加群として $k[PxP]$ は b の source 多元環 $ikGi$ の直和因子に同型である.

- (1) $QC_P(Q)$ は b_Q の defect 群である.
- (2) $RC_P(R)$ は b_R の defect 群である.
- (3) b_Q はべき零ブロックである. (このとき, b_R もべき零ブロックである)

注意 2.2 (1) $k[PxP]$ が $ikGi$ の直和因子に同型ならば, ${}^x(Q, b_Q) = (R, b_R)$ が成り立つ.
 (2) 一般には, ある $y \in G$ により, $QC_{yP}(Q)$ は b_Q の defect 群である.

定理 2.9 定理 2.8 において条件 (3) が成り立つとき, すなわち, b_Q がべき零ブロックならば $k[PxP]$ の $ikGi$ の重複度 $\text{mlty}_{k[P \times P]}(k[PxP], ikGi)$ は下記の公式で与えられる.

$$\begin{aligned} & \text{mlty}_{k[P \times P]}(k[PxP], ikGi) \\ &= \frac{|Z(R)|}{|N_{xP}(R) \cap N_P(R)C_G(R) || C_P(R)|} \cdot |b_R \text{ の defect 群}| \cdot (1 + n_0 p) \end{aligned}$$

ここで, n_0 は 0 以上の整数である.

特に, さらに定理 2.8 の条件 (1) または (2) が成り立つとき

$$\text{mlty}_{k[P \times P]}(k[PxP], ikGi) \equiv 1 \pmod{p}.$$

3 defect 群が wreathed 群である 2-ブロック

ブロック・イデアル b の defect 群は wreathed 2-群

$$P = \langle a_1, a_2, t \mid a_1^{2^n} = a_2^{2^n} = t^2 = 1, a_1 a_2 = a_2 a_1, t a_1 t = a_2 \rangle, n \geq 2$$

であるとする.

$c = a_1 a_2, d = a_1 a_2^{-1}$ とおく. $Z(P) = \langle c \rangle, P' = \langle d \rangle$ である. さらに

$$x_1 = a_1^{2^{n-1}}, x_2 = a_2^{2^{n-1}}, z = c^{2^{n-1}} = x_1 x_2,$$

$$e = x_1 t, f = d^{2^{n-2}} (= (a_1 a_2^{-1})^{2^{n-2}})$$

$$U = \langle a_1, a_2 \rangle, Q = \langle e, f \rangle (\simeq Q_8), V = \langle e, f, c \rangle (= \langle x_1, t, c \rangle), W = \langle t, c \rangle,$$

$$E = \langle x_1, x_2 \rangle, F = \langle t, z \rangle$$

とおく.

Kawai and Sasaki [1] で構成した $\text{Tr}_P^b : H^*(P, k) \rightarrow H^*(P, k)$ が source 多元環 $ikGi$ の導く transfer 写像と一致することが確かめられた. (定理 3.13, 系 3.14)

P の自己同型群は 2-群であるから, $ikGi$ の直和分解 (*) は

$$(*) \quad ikGi \simeq kP \oplus \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{X}} k[PxP] \right)$$

の形である.

$\text{Aut } U \simeq \text{GL}(2, 2)$, $\text{Out } V \simeq \text{GL}(2, 2)$ である.

(P, b_P) を Sylow b -subpair とする. $(U, b_U), (V, b_V) \subset (P, b_P)$ をとる.

- $N_G(U, b_U)/C_G(U) \simeq \text{GL}(2, 2)$ のとき (U, b_U) は essential である. $PC_G(U)/C_G(U) < N_G(U, b_U)/C_G(U)$ は strongly embedded である.
- $N_G(V, b_V)/VC_G(V) \simeq \text{GL}(2, 2)$ のとき (V, b_V) は essential である. $N_P(V)C_G(V)/VC_G(V) < N_G(V, b_V)/VC_G(V)$ は strongly embedded である.

そこで, 以下では $N_G(U, b_U)/C_G(U) \simeq \text{GL}(2, 2)$, $N_G(V, b_V)/VC_G(V) \simeq \text{GL}(2, 2)$ であると仮定する. このとき, (P, b_P) に含まれる essential subpairs の集合は

$$\{(U, b_U)\} \cup \{^u(V, b_V) \mid u \in P\}$$

で与えられる. 従って, 定理 2.4 の共役族は $\mathcal{F} = \{(U, b_U)\} \cup \{^u(V, b_V) \mid u \in P\} \cup \{(P, b_P)\}$ である.

$g_U \in N_G(U, b_U) \setminus PC_G(U)$ を U の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし, 次のように作用するものとする.

$$^{g_U}a_1 = a_2, \quad ^{g_U}a_2 = a_1^{-1}a_2^{-1}.$$

$g_V \in N_G(V, b_V) \setminus N_P(V)C_G(V)$ を V の位数 3 の自己同型を引き起こすものとし, 次のように作用するものとする.

$$^{g_V}e = ef^{-1}, \quad ^{g_V}f = e, \quad ^{g_V}c = c.$$

$g_V \in N_G(V, b_V)$ の x_1, t への作用は次の通りである.

$$^{g_V}x_1 = c^{2^{n-2}}x_1t = c^{2^{n-2}}e, \quad ^{g_V}(c^{2^{n-2}}e) = t, \quad ^{g_V}t = x_1.$$

特に

$$^{g_V}F = ^{g_V}\langle t, z \rangle = \langle x_1, z \rangle = E.$$

Kawai and Sasaki [1] で定義した trace map は以下のように記述される. すなわち

$$\begin{aligned} \Gamma_U : H^*(P, k) &\rightarrow H^*(P, k); \zeta \mapsto \zeta + \text{tr}^P \text{res}_U \text{con}^{g_U} \zeta, \\ \Gamma_V : H^*(P, k) &\rightarrow H^*(P, k); \zeta \mapsto \zeta + \text{tr}^P \text{res}_V ^{g_V} \zeta \end{aligned}$$

と定義すると

命題 3.1

$$\Gamma_U \circ \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V \circ \Gamma_U = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V$$

が成り立ち, この写像を Tr_P^b と書く. $\text{Tr}_P^b = \Gamma_V \circ \Gamma_U \circ \Gamma_V$.

定理 3.2 (Kawai and Sasaki [1]) $\text{Im Tr}_P^b = H^*(G, b, X)$ が成り立つ.

写像 Tr_P^b は $\zeta \in H^*(P, k)$ を次のように写像する.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_P^b : \zeta \mapsto & \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} \zeta \\ & + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_V g_U} \zeta + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U \cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_U g_V} \zeta \\ & + \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap {}^{g_V}U \cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_V g_U g_V} \zeta. \end{aligned}$$

以下ではこの写像の意味を考える.

3.1 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V}$

Okuyama and Sasaki [7] が適用できて

命題 3.3 (1) $P \cap {}^{g_U}P = U$, $P \cap {}^{g_V}P = V$.

(2) $k[Pg_U P]$, $k[Pg_V P] \mid i k G i$. さらに, それぞれの重複度 m_U , m_V は奇数である.

(3) $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_U P}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_V P}$.

注意 3.1 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_U \mathrm{con}^{g_U} = t_{Pg_U P}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_V \mathrm{con}^{g_V} = t_{Pg_V P}$ は 0 写像ではない.

3.2 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_V g_U}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U \cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_U g_V}$

$V \cap {}^{g_V}U = W_0$, $U \cap {}^{g_U}V = T_1$ とおく. また, $\langle x_1, a_2 \rangle = T_0$, $\langle c, t \rangle = W_1$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} {}^{g_U}T_0 &= U \cap V, \quad {}^{g_V g_U}T_0 = {}^{g_V}(V \cap U) = V \cap {}^{g_V}U = W_0 \\ {}^{g_V}W_1 &= U \cap V, \quad {}^{g_U g_V}W_1 = {}^{g_U}(U \cap V) = U \cap {}^{g_U}V = T_1. \end{aligned}$$

補題 3.4 (1) 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap {}^{g_V}U} \mathrm{con}^{g_V g_U}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U \cap {}^{g_U}V} \mathrm{con}^{g_U g_V}$ は 0 写像ではない.

(2) $g_V g_U$ は (P, P) -ICC を満たす. 特に, $W_0 = P \cap {}^{g_V g_U}P$.

(3) $g_U g_V$ は (P, P) -ICC を満たす. 特に, $T_1 = P \cap {}^{g_U g_V}P$.

subpairs (T_0, b_{T_0}) , (T_1, b_{T_1}) , (W_0, b_{W_0}) , $(W_1, b_{W_1}) \subset (P, b_P)$ をとる.

補題 3.5 上の subpairs は次のように共役である.

$${}^{g_V g_U}(T_0, b_{T_0}) = (W_0, b_{W_0}), \quad {}^{g_U g_V}(W_1, b_{W_1}) = (T_1, b_{T_1}).$$

この共役は essential subpairs (U, b_U) , (V, b_V) の inertial groups の元 g_U , g_V による共役の合成として次のように得られる.

$$\begin{array}{ccc} (U, b_U) & & (V, b_V) \\ \swarrow & & \searrow \\ (T_0, b_{T_0}) & \xrightarrow{g_U} & (U \cap V, b_{U \cap V}) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} (V, b_V) & & (U, b_U) \\ \swarrow & & \searrow \\ (W_1, b_{W_1}) & \xrightarrow{g_V} & (U \cap V, b_{U \cap V}) \end{array} \xrightarrow{g_U} (T_1, b_{T_1})$$

補題 3.6 (1) (T_0, b_{T_0}) , (T_1, b_{T_1}) については $U = T_j C_P(T_j)$ は b_{T_j} の defect 群である.

(2) b_{W_0} , b_{T_1} はべき零ブロックである.

以上を総合して, 定理 2.8, 定理 2.9 により, 次が得られる.

命題 3.7 (1) $k[Pg_Vg_UP], k[Pg_Ug_VP] \mid ikGi$. さらに, それぞれの重複度 m_{VU}, m_{UV} は奇数である.

(2) $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap g_VU} \mathrm{con}^{g_Vg_U} = t_{P(g_Vg_U)P}$, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{U \cap g_UV} \mathrm{con}^{g_Ug_V} = t_{P(g_Ug_V)P}$.

3.3 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{V \cap g_VU \cap g_Vg_UV} \mathrm{con}^{g_Vg_Ug_V}$

$F_1 = V \cap g_VU \cap g_Vg_UV$ とおく.

補題 3.8 (1) 写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{F_1} \mathrm{con}^{g_Vg_Ug_V}$ は 0 写像ではない.

(2) $g_Vg_Ug_V$ は (P, P) -ICC を満たす. 特に, $P \cap g_Vg_Ug_VP = F_1$.

$\mathrm{subpairs} (E, b_E), (F, b_F), (F_1, b_{F_1}) \subset (P, b_P)$ をとる.

補題 3.9 $\mathrm{subpairs} (F, b_F), (F_1, b_{F_1})$ は次のように共役である.

$$g_Vg_Ug_V(F, b_F) = (F_1, b_{F_1}).$$

この共役は essential subpairs $(U, b_U), (V, b_V)$ の inertial groups の元 g_U, g_V による共役の合成として次のように得られる.

$$\begin{array}{ccccc} & (V, b_V) & & (U, b_U) & & (V, b_V) \\ & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ (F, b_F) & \xrightarrow{g_V} & (E, b_E) & \xrightarrow{g_U} & (E, b_E) & \xrightarrow{g_V} & (F_1, b_{F_1}) \end{array}$$

補題 3.10 (1) $g_V^{-1}U$ は b_F の defect 群である.

(2) g_VU は b_{F_1} の defect 群である.

(3) b_F はべき零ブロックである.

従って, 定理 2.8 の条件 (1) や (2) は満たされない. そこで, 定理 2.9 の公式を調べる. そのため, すこし, 工夫をする.

補題 3.11 $w = a_1^{2^{n-2}} g_Vg_Ug_V$ とおく.

(1) $w \in N_G(F, b_F)$, $^wt = zt$, $^wz = t$. すなわち, w は F の位数 3 の自己同型を引き起こし

$$N_G(F, b_F) = \langle x_1, w \rangle C_G(F).$$

(2) $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{F_1} \mathrm{con}^{g_Vg_Ug_V} = \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_F \mathrm{con}^w$.

そこで, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_F \mathrm{con}^w$ に定理 2.9 を適用して次が得られるのである.

命題 3.12 (1) $F = P \cap {}^wP$.

(2) $k[Pg_Vg_Ug_VP] = k[PwP] \mid ikGi$. さらに, その重複度 m_{VUV} は奇数である.

以上により, $k[P \times P]$ 加群

$$kP \oplus m_U k[Pg_UP] \oplus m_V k[Pg_VP] \oplus m_{UV} k[Pg_Ug_VP] \oplus m_{VU} k[Pg_Vg_UP] \oplus m_{VUV} k[Pg_Vg_Ug_VP]$$

は $ikGi$ の直和因子に同型であり, これが導く $H^*(P, k)$ の写像は Tr_P^b であることがわかった.

3.4 $ikGi$ の加群構造

残る課題は $ikGi$ の上の直和因子以外の直和因子の考察である.

$k[PgP] \mid ikGi$ とし, $R = P^g \cap P$, $S = P \cap {}^gP$ とおく. $(R, b_R), (S, b_S) \subseteq (P, b_P)$ をとる. このとき

$${}^g(R, b_R) = (S, b_S)$$

である. 共役 ${}^g(R, b_R) = (S, b_S)$ を essential subpairs の inertial groups の元による共役の合成として次のように表すことができる.

$$\begin{array}{ccccccc} & (P, b_P) & & (F_2, b_{F_2}) & & \cdots & & (F_{m-1}, b_{F_{m-1}}) & & (P, b_P) \\ & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ (R, b_R) & \xrightarrow{g_1} & (R_1, b_{R_1}) & \xrightarrow{g_2} & (R_2, b_{R_2}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & (R_{m-2}, b_{R_{m-2}}) & \xrightarrow{g_{m-1}} & (R_{m-1}, b_{R_{m-1}}) & \xrightarrow{g_m} & (S, b_S) \end{array}$$

ただし, $2 \leq q \leq m-1$ については $(F_q, g_q) = (U, g_U)$ または (V, g_V) . また, $g_1, g_m \in PC_G(P)$ については, 1 のこともある.

注意 3.2 essential supair としては (V, b_V) の P -共役も考えなければならないし, inertial groups の元も g_U や g_V 以外の元もあるのだから, 上のように表すことができるということは自明ではない. (もっとも, 容易なことではある)

写像 $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ が 0 写像でないような $k[PgP] \mid ikGi$ を知りたいのである.

$$\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g = \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^{g_m g_{m-1} \cdots g_2 g_1} = \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{R_{m-1}} \mathrm{con}^{g_{m-1} \cdots g_2}$$

であるから $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ が 0 写像でない $\iff \mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{R_{m-1}} \mathrm{con}^{g_{m-1} \cdots g_2}$ が 0 写像でない.

この条件が成り立つとき $k[PgP] \simeq k[Pg_{m-1} \cdots g_2 P]$.

従って, 最初と最後の (P, b_P) と $g_1, g_m \in PC_G(P)$ は省略して考察してよい.

(1) $m = 3$ で

$$\begin{array}{ccc} & (U, b_U) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ (R_1, b_{R_1}) & \xrightarrow{g_U} & (R_2, b_{R_2}) \end{array}$$

と表されるとき, $R \leq U$ である.

(a) $R_2 = U$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像でなく $k[PgP] \simeq k[Pg_U P]$.

(b) $R_2 < U$ のとき, $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_S \mathrm{con}^g$ は 0 写像.

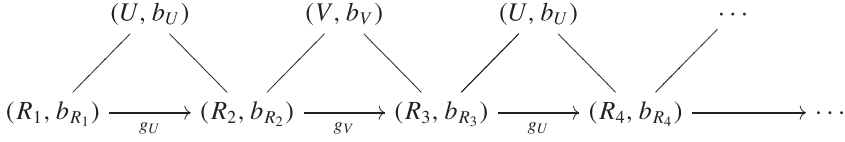
(2) $m = 4$ で

$$\begin{array}{ccccc} & (U, b_U) & & (V, b_V) & \\ & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & \\ (R_1, b_{R_1}) & \xrightarrow{g_U} & (R_2, b_{R_2}) & \xrightarrow{g_V} & (R_3, b_{R_3}) \end{array}$$

と表されるとき, $R_3 \leq W_0$ である.

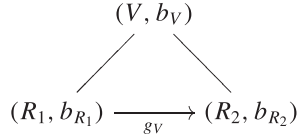
- (a) $R_3 = W_0$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像でなく $k[PgP] \simeq k[Pg_Vg_UP]$.
 (b) $R_3 < W_0$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像.

(3) $m \geq 5$ で



と表されるとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像である.

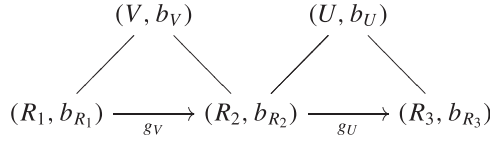
(4) $m = 3$ で



と表されるとき.

- (a) $R_2 = V$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像でなく, $k[PgP] \simeq k[Pg_VP]$.
 (b) $R_2 < V$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像.

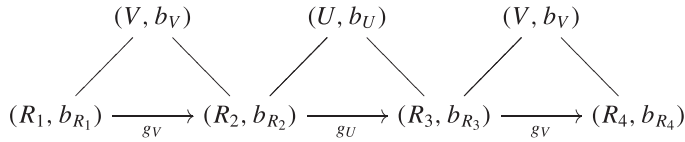
(5) $m = 4$ で



と表されるとき. $R_3 \leq T_1$ である.

- (a) $R_3 = T_1$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像でなく, $k[PgP] \simeq k[Pg_Ug_VP]$.
 (b) $R_3 < T_1$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_R \text{con}^g$ は 0 写像.

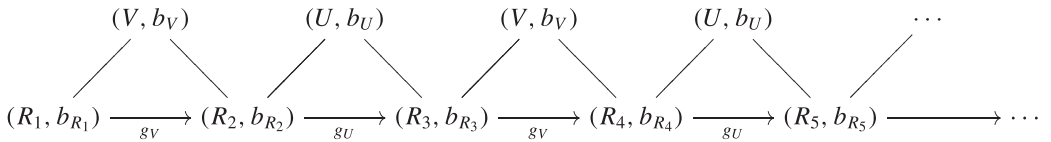
(6) $m = 5$ で



と表されるとき. $R_4 \leq F_1$ である.

- (a) $R_4 = F_1$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像でなく, $k[PgP] \simeq k[Pg_Vg_Ug_VP]$.
 (b) $R_4 < F_1$ のとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像.

(7) $m \geq 6$ で



と表されるとき, $\text{tr}^P \text{res}_S \text{con}^g$ は 0 写像である.

以上により

定理 3.13 $ikGi$ は $k[P \times P]$ 加群として次のように直和分解される.

$$\begin{aligned} ikGi \simeq & kP \oplus m_U k[Pg_U P] \oplus m_V k[Pg_V P] \oplus m_{UV} k[Pg_U g_V P] \oplus m_{VU} k[Pg_V g_U P] \\ & \oplus m_{VUV} k[Pg_V g_U g_V P] \oplus Z. \end{aligned}$$

ここで, 重複度 $m_U, m_V, m_{UV}, m_{VU}, m_{VUV}$ はいずれも奇数であり, Z のどの直既約直和因子についてもそれに同型な $k[PgP]$ については $\mathrm{tr}^P \mathrm{res}_{P \cap gP} \mathrm{con}^g$ は 0 写像である.

系 3.14 $\mathrm{Tr}_P^b = t_{ikGi}$.

参考文献

- [1] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of 2-blocks of finite groups with defect groups of rank two, J. Algebra **306** (2006), no. 2, 301–321.
- [2] B. Külshammer, T. Okuyama, and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras, J. Algebra **232** (2000), 299–309.
- [3] M. Linckelmann, On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups, Turkish J. Math. **22** (1998), 93–107.
- [4] ———, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.
- [5] M. Linckelmann, Introduction to fusion systems, Group representation theory, EPFL Press, Lausanne, 2007, pp. 79–113.
- [6] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.
- [7] T. Okuyama and H. Sasaki, A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups, J. Algebra **497** (2018), 92–101.
- [8] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra **116** (1988), 7–129.
- [9] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.
- [10] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of finite group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.
- [11] R. Stancu, Control of fusion in fusion systems, J. Algebra Appl **5** (2006), 817–837.
- [12] J. Thévenaz, G -algebras and modular representation theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [13] A. Watanabe, The number of irreducible Brauer characters in a p -block of a finite group with cyclic hyperfocal subgroup, J. Algebra **416** (2014), 167–183.