

Scott 加群の概分裂完全列とテンサー積について

名古屋市立大学 河田成人

Shigeto Kawata
Nagoya City University

$(K, \mathcal{O}, k)$ を p -モジュラー系 (p は素数) とする. すなわち, $\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環で極大イデアル $\pi\mathcal{O}$ を持ち, その剰余体 $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は正標数 p の代数閉体であるとし, K は $\mathcal{O}$ の商体とする. R で $\mathcal{O}$ または k を表し, 有限群 G の R 上の群環を RG で表す. ここで RG -lattice とは, R 上自由で有限生成な (右) RG -加群を意味する. H を G の部分群としたとき, RG -加群 V の作用を H に制限した RH -加群を $V\downarrow_H$ で表し, RH -加群 W を G に誘導して得られる RG -加群 $W \otimes_{RH} RG$ を $W\uparrow^G$ で表すことにする.

Q を G の p -部分群とし, ヴァーテックスが Q であるような Scott RG -加群を $S(Q)$ で表そう. ここでは, $S(Q)$ の概分裂完全列に, Q をヴァーテックスとしてもつ直既約 RG -lattice をテンサーすると, どのような短完全列となるかを考察したい.

用語について詳しいことは, 有限群の表現論に関しては [NT], [B] を, また Auslander-Reiten 理論に関しては [ASS], [ARS] 等を参照してください.

1. 群環の概分裂完全列

RG -lattice の短完全列 $\mathcal{A}: 0 \rightarrow N \rightarrow M \xrightarrow{f} L \rightarrow 0$ は次の 3 条件を満たすときに, 概分裂完全列と呼ばれる [Auslander-Reiten]:

- (i) $\mathcal{A}$ は分裂しない.
- (ii) L, N は直既約である.
- (iii) RG -準同型写像 $g: X \rightarrow L$ が分裂全射でなければ, g は $f: M \rightarrow L$ を経由する.

L を射影的でない直既約な RG -lattice とする. このとき, L で終わる概分裂完全列が一意的に存在することが Auslander-Reiten や Roggenkamp-Schmidt らによって示されている. 以後, L の概分裂完全列を

$$\mathcal{A}(L): 0 \rightarrow \tau L \rightarrow m(L) \rightarrow L \rightarrow 0$$

と書くことにする．ここで，Auslander-Reiten translation τ は， $R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$ (Heller operator) であり ([A],[RS])， $R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ である ([AR])．

Auslander-Carlson や Benson-Carlson は自明な RG -加群の概分裂完全列とテンサー積に関して次の興味深い結果を証明した．

定理 1.1 ([AC, Theorem 3.6], [BC, Proposition 2.15]) L は直既約 RG -lattice とし， $\mathcal{A}(R_G)$ は自明な RG -加群 R_G の概分裂完全列とする．

(1) L の rank が p で割り切れれば， $\mathcal{A}(R_G) \otimes_R L$ は分裂する．

(2) L の rank が p で割り切れなければ， $\mathcal{A}(R_G) \otimes_R L$ は概分裂完全列 $\mathcal{A}(L)$ と injective の直和である．

Scott 加群の概分裂完全列とテンサー積に関して考察して上記の結果をいくぶん拡張したい．そのために必要な準備をしておく．

まず， $R = \mathcal{O}$ の場合を考える．直既約 $\mathcal{O}G$ -lattice L が射影的でなければ， $\underline{\text{End}}_{\mathcal{O}G}(L) := \text{End}_{\mathcal{O}G}(L)/\{\text{projective}\}$ は simple socle を持ち，その生成元 $\rho \in \text{Soc}(\underline{\text{End}}_{\mathcal{O}G}(L))$ は almost projective と呼ばれて， L の概分裂完全列 $\mathcal{A}(L)$ はこの almost projective ρ と射影被覆の pull back として構成される [T]:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(L) : 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & \text{pull back} & \downarrow \rho \\ \text{射影被覆} : 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

Carlson-Jones は $\mathcal{O}G$ -lattice に対して exponent を定義し，exponential property という概念を導入した．

定義 1.2 [CJ] (1) $\mathcal{O}G$ -lattice L に対し， $\pi^a \text{id}_L$ (a は 0 以上の整数) は projective であるが $\pi^{a-1} \text{id}_L$ は projective でないとき， $\exp(L) = \pi^a$ と書く．

(2) $\exp(L) = \pi^a$ である直既約 $\mathcal{O}G$ -lattice L に対し， $\pi^{a-1} \text{id}_L$ が almost projective であるとき， L は exponential property を持つという．

注意 Knörr は irreducible $\mathcal{O}G$ -lattice の拡張として virtually irreducible $\mathcal{O}G$ -lattice という概念を導入した [Kn] が，この概念と exponential property という概念は同値であることが知られている [CJ]．

例 ([Kn], [CJ]) exponential property を持つ $\mathcal{O}G$ -lattice の例として, 次のクラスが知られている:

- (i) irreducible $\mathcal{O}G$ -lattice
- (ii) rank が p で割り切れないような直既約 $\mathcal{O}G$ -lattice
- (iii) 高さ 0 の直既約 $\mathcal{O}G$ -lattice

Carlson-Jones や Knörr は exponential property に関して次の事実を示した.

定理 1.3 ([Kn], [CJ]) L は直既約 $\mathcal{O}G$ -lattice で, Q をヴァーテックスとして持つとする. $\mathcal{O}N_G(Q)$ -lattice fL は L の $(G, Q, N_G(Q))$ に関する Green 対応子であるとし, $\mathcal{O}Q$ -lattice S は L の Q -source とする. このとき, L が exponential property を持てば, fL や S も exponential property を持つ.

Green 対応と概分裂完全列に関しては, 次の事実が知られている.

命題 1.4 直既約 RG -lattice L は Q をヴァーテックスに持つとする. $(G, Q, N = N_G(Q))$ に関する Green 対応を f とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1)[T, Theorem 35.5] $\mathcal{A}(fL)\uparrow^G$ は $\mathcal{A}(L)$ と分裂列の直和である.
- (2)[IH] $\mathcal{A}(L)\downarrow_N$ は $\mathcal{A}(fL)$ と「 Q に制限すれば分裂する短完全列」との直和である.

$R = k$ のモジュラー表現の Green ring における内積を Benson-Parker は次で定義した:
 kG -加群 M, N に対し

$$(M, N) := \dim_k \operatorname{Hom}(M, N)$$

この内積について, Benson-Parker の結果 [BP] を利用すると次の判定条件が言える.

補題 1.5 M を直既約 kG -加群とし, $\mathcal{E}: 0 \rightarrow \Omega^2 M \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$ を kG -加群の短完全列とする. Green 環において $[\mathcal{E}] = M + \Omega^2 M - X$ とおく.

- (1) $\mathcal{E}$ が分裂するための必要十分条件は $([\mathcal{E}], M) = 0$ である.
- (2) ([Ka1, Lemma 1.7], cf. [E, Lemma 1.5]) $\mathcal{E}$ が概分裂完全列 $\mathcal{A}(M)$ であるための必要十分条件は $([\mathcal{E}], M) = 1$ である.

2. Scott 加群の概分裂完全列

自明な RG -加群を R_G で表すこととする．まず， $R = k$ の場合， G の p -部分群 Q に対し，可移な置換加群 $k_Q \uparrow^G$ の直既約因子 $\bar{S}(Q)$ で次の 3 条件を満たすものが存在することが知られている（例えば [NT, IV. 定理 8.4] 参照）．

- (i) k_G が $\bar{S}(Q)$ の台 $\text{soc}(\bar{S}(Q))$ の直既約因子として現れる．
- (ii) k_G が $\bar{S}(Q)$ の頭 $\text{hd}(\bar{S}(Q)) = \bar{S}(Q)/\bar{S}(Q)J(kG)$ の直既約因子として現れる．
- (iii) $\bar{S}(Q)$ のヴァーテックスは Q である．さらに， $\bar{S}(Q)$ の $(G, Q, N = N_{G(Q)})$ に関する Green 対応子 $f\bar{S}(Q)$ は $k(N/Q)$ -加群とみなせて，自明な $k(N/Q)$ -加群 $k_{N/Q}$ の射影被覆である．

また， $k_Q \uparrow^G$ の直既約分解において，上の 3 条件のどの一つについても，その条件を満たすものが一意に定まる．このような kG -加群 $\bar{S}(Q)$ を， Q をヴァーテックスに持つ Scott kG -加群と呼ぶ．

次に， $\mathcal{O}$ 上の場合を考える． k 上の置換加群の直和因子は $\mathcal{O}$ 上の置換加群の直和因子に一意に持ち上げ可能である（例えば [NT, IV. 定理 8.9]）． $\mathcal{O}_Q \uparrow^G$ の直既約因子で $\bar{S}(Q)$ の持ち上げとなっているものを $S(Q)$ と書き， Q をヴァーテックスに持つ Scott $\mathcal{O}G$ -lattice と呼ぶ： $S(Q)/\pi S(Q) \cong \bar{S}(Q)$ ．なお， $S(Q)$ は $\mathcal{O}_Q \uparrow^G$ の直既約因子の中で $\text{Hom}_{\mathcal{O}G}(S(Q), \mathcal{O}_G) \neq 0$ となる唯一のものである．

Q が G の正規部分群のときは， $S(Q)$ は $\mathcal{O}(G/Q)$ -lattice とみなせて，自明な $\mathcal{O}(G/Q)$ -lattice $\mathcal{O}_{G/Q}$ の射影被覆であり，入射包絡でもある．そして，次の写像 $\rho \in \text{End}_{\mathcal{O}G} S(Q)$ が almost projective である：

$$\rho : S(Q) \xrightarrow{\text{射影被覆}} \mathcal{O}_{G/Q} \xrightarrow{|G/Q|\pi^{-1}} \mathcal{O}_{G/Q} \xrightarrow{\text{入射包絡}} S(Q)$$

$S(Q)$ で終わる $\mathcal{O}G$ -lattice の概分裂完全列 $\mathcal{A}(S(Q))$ について次のことが知られている．

命題 2.1 $\mathcal{A}(S(Q))$ を Q に制限して得られる短完全列は $\mathcal{A}(\mathcal{O}_Q)$ と分裂列の直和である．

$S(Q) \otimes L$ は Q -projective である． $(\mathcal{A}(S(Q)) \otimes L) \downarrow_Q$ は定理 1.1(1) と命題 2.1 から分裂すると分かるので，次が成り立つ．

補題 2.2 $\mathcal{O}G$ -lattice L を Q に制限した $L \downarrow_Q$ の直既約因子の rank が全て p で割り切れるとする．このとき， $\mathcal{A}(S(Q)) \otimes L$ は分裂する．

直既約 $\mathcal{O}G$ -lattice L は Q をヴァーテックスに持ち, その Q -source S の rank が p で割り切れないとする. このとき, $S(Q) \otimes L$ は Q -projective であるが, $(\mathcal{A}(S(Q)) \otimes L) \downarrow_Q$ は定理 1.1(2) と命題 2.1 から分裂しないと分かるので, $\mathcal{A}(S(Q)) \otimes L$ は分裂しない.

注意 $S(Q)$ の概分裂完全列 $\mathcal{A}(S(Q))$ の中間項 $m(L)$ は直既約で, そのヴァーテックスは $N_{G(Q)}$ の Sylow p -部分群である ([IH], [K2]). そのため, 例えば $L = S(Q)$ で Q が G の Sylow p -部分群でなければ, $\mathcal{A}(S(Q)) \otimes S(Q)$ の中間項は Q -projective なので, $\mathcal{A}(S(Q)) \otimes S(Q)$ に概分裂完全列は現れない.

Q が G の正規部分群であるとする. L が Q -projective であれば, $S(Q) \xrightarrow{\text{射影被覆}} \mathcal{O}_{G/Q}$ に L をテンサーすると分裂全射となる. また, $\mathcal{A}(S(Q)) \otimes L$ は, $\rho \otimes \text{id}_L$ (ここで ρ は上で見た almost projective) と $S(Q) \otimes L$ の射影被覆の pull back である. L が exponential property を持つことと, $\rho \otimes \text{id}_L$ が L の almost projective と 0-map の直和となることは同値である. このことと, 概分裂完全列と Green 対応の関係を述べた命題 1.4 を考え合わせれば, 次が成り立つ.

定理 2.3 直既約 $\mathcal{O}G$ -lattice L は $Q (\neq 1)$ をヴァーテックスに持ち, L の Q -source の rank は p で割り切れないとする. もし L が exponential property を持てば, $\mathcal{A}(S(Q)) \otimes L$ は $\mathcal{A}(L)$ と分裂列の直和となる. 逆に, $\mathcal{A}(S(Q)) \otimes L$ が $\mathcal{A}(L)$ と分裂列の直和であれば, L は exponential property を持つ.

最後に, モジュラー表現の場合を考えよう. Q が正規部分群であるときは, $\bar{S}(Q)$ は $k(G/Q)$ -加群として $k_{G/Q}$ の射影被覆であり, $\Omega \bar{S}(Q)$ の台は単純で k_G に同型である. そして, 次の kG -準同型写像 $\varphi: \bar{S}(Q) \rightarrow \Omega \bar{S}(Q)$ が almost projective である:

$$\varphi: \bar{S}(Q) \rightarrow k_G = k_G \hookrightarrow \Omega \bar{S}(Q)$$

すなわち, $\mathcal{A}(\bar{S}(Q))$ は φ と $\Omega \bar{S}(Q)$ の射影被覆との pull back として構成される.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(\bar{S}(Q)): 0 & \longrightarrow & \Omega^2 \bar{S}(Q) & \longrightarrow & m(\bar{S}(Q)) & \longrightarrow & \bar{S}(Q) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \text{pull back} & & \downarrow \varphi \\ \text{射影被覆}: 0 & \longrightarrow & \Omega^2 \bar{S}(Q) & \longrightarrow & P_{\Omega \bar{S}(Q)} & \longrightarrow & \Omega \bar{S}(Q) \longrightarrow 0 \end{array}$$

kG -加群 M は Q -projective とする. $\bar{S}(Q) \rightarrow k_G$ に M をテンサーすると分裂する. また, $k = k \otimes k \hookrightarrow \Omega k \otimes \bar{S}(Q)$ に M をテンサーしたものは, M から $\Omega k \otimes M$ の写像と 0-map と

の和であるので, $\varphi \otimes \text{id}_M : \bar{S}(Q) \otimes M \rightarrow \Omega \bar{S}(Q) \otimes M$ は M から ΩM への写像と 0-map の和である. このことから, $\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は, 「 $0 \rightarrow \Omega^2 M \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$ の形をした短完全列」とある分裂列の直和である. 一方で, $\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \downarrow_Q$ は $\mathcal{A}(k_Q)$ と分裂列の直和である. そのため定理 1.1 から, $\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は, M の Q -source の次元が p で割り切れると分裂し, M の Q -source の次元が p で割り切れなければ分裂しない. 従って, 次が成り立つ (Q が G の正規部分群でないときは命題 1.4 を使えば良い).

補題 2.4 直既約 kG -加群 M のヴァーテックスは Q であり, M の Q -source の次元は p で割り切れないとする. このとき, $\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は, 「 $0 \rightarrow \Omega^2 M \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$ の形をした分裂しない短完全列」とある分裂列の直和である.

上の補題から, Benson-Carlson によって示された次の事実の別証明を得る.

命題 2.5[BC, Proposition 2.4] 直既約 kG -加群 M のヴァーテックスは Q であり, M の Q -source の次元は p で割り切れないとする. このとき, $\bar{S}(Q)$ が $M \otimes M^*$ の直既約因子として現れる.

証明 Green 環における内積を利用して, $([\mathcal{A}(\bar{S}(Q))], M \otimes M^*) \neq 0$ を示せば良い. $([\mathcal{A}(\bar{S}(Q))], M \otimes M^*) = ([\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M], M)$ であるが, 補題 2.4 から $\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は 「 $0 \rightarrow \Omega^2 M \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$ の形をした分裂しない短完全列」である. よって, 補題 1.5 から $([\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M], M) \neq 0$ が従う. $\square$

Green 環の内積を考える (補題 1.5) と, $M \otimes M^*$ の直既約因子として $\bar{S}(Q)$ が重複度が 1 で現れるときに限り, $\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は $\mathcal{A}(M)$ と分裂列の直和となることが分かる. 例えば, M (もしくは M の Green 対応子 fM) が単純加群のとき, $M \otimes M^*$ に $\bar{S}(Q)$ が重複度が 1 で現れるので, このようなときには, $\mathcal{A}(\bar{S}(Q)) \otimes M$ は $\mathcal{A}(M)$ と分裂列の直和となる.

参考文献

- [ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

- [A] Auslander, M.: *Functors and morphisms determined by objects*, in “Proceedings of conference on Representation Theory, Philadelphia 1976,” pp. 1–244, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 37, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [AC] Auslander, M. and Carlson, J.F.: *Almost-split sequences and group rings*, J. Algebra **103**(1986), 122–140.
- [AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras III: Almost split sequences*, Comm. Algebra **3**(1975), 239–284.
- [ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [B] Benson, D. J.: *Representations and Cohomology I*, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [BC] Benson, D. J. and Carlson, J.F.: *Nilpotent elements in the Green ring*, J. Algebra **104**(1986), 329–350.
- [BP] Benson, D. J. and Parker, R.A.: *The Green ring of a finite group*, J. Algebra **87**(1984), 290–331.
- [CJ] Carlson, J. F. and Jones, A.: *An exponential property of lattices over group rings*, J. London Math. Soc. **39**(1989), 467–479.
- [E] Erdmann, K.: *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver of p -groups*, Math. Z. **203**(1990), 321–334.
- [IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.
- [Ka1] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components for certain group modules*, Osaka J. Math. **30**(1993), 137–157.
- [Ka2] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings*, J. Algebra **322**(2009), 1395–1405.
- [Kn] Knörr, R.: *Virtually irreducible lattices*, Proc. London Math. Soc. **59**(1989), 99–132.
- [NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.
- [RS] Roggenkamp, K. W. and Schmidt, J.: *Almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **4**(1976), 893–917.
- [T] Thévenaz, J.: *G-Algebras and Modular Representation Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.